МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ З НЕГЛАДКИМИ ЦІЛЬОВИМИ ФУНКЦІЯМИ

Глебена М.І., Цегелик Г.Г.
hlebenam@gmail.com
(ДВНЗ „Ужгородський національний університет“, Львівський національний університет імені Івана Франка, Україна)

Розглянемо задачу нелінійного програмування: знайти екстремум (мінімум або максимум) негладкої функції

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to min(max)$$

за умов

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0, \ (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Вважатимемо, що функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ та $g_i (i = 1, 2, \ldots, m)$ є негладкими опуклими чи вгнутими. Для цієї задачі побудуємо функцію Лагранжа

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Таким чином, за допомогою функції Лагранжа ми переходимо від задачі умовної оптимізації до задачі безумовної оптимізації з негладкою цільовою функцією Лагранжа, при цьому обмеження задачі враховуються в цільовій функції.

Для відшукання екстремуму побудованої функції скористаємось алгоритмом [1], який грунтується на використанні апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій однієї дійсної змінної [2].

Мажоранта та діаграма Ньютона функції, заданої таблично.

Розглянемо функцію дійсної змінної $y = f(x)$, яка задана своїми значеннями у деяких точках x_i $(i = 0, 1, \ldots, n) : f(x_i) = y_i$.

Нехай $|y_i| = a_i \leq M$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, $a_0 \cdot a_n \neq 0$ де M - деяка стала.

Точка $P_i(x_i, -lna_i)$ в площині xOy називається точкою зображення значення функції $y = f(x)$ в точці $x = x_i$. Припустимо, що точки зображення P_i значень функції $y = f(x)$ в точках x_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ в площині xOy побудовані. З кожної точки P_i проведемо півпряму в додатному напрямку осі Oy, перпендикулярно до осі Ox. Множину точок цих півпрямих позначимо через S, а її опуклу оболонку через $C(S)$. Для кожного $x \in [x_0, x_n]$ визначимо точку $B_\chi(x, \kappa_x)$, де $\kappa_x = \inf\limits_{(x,y) \in C(S)} y$.

Множина точок $B_\chi(x, \kappa_x)$, $x \in [x_0, x_n]$, утворюють лінію δ_f, яка обмежує $C(S)$ знизу. Ця лінія є неперервною, опуклою ламаною лінією і її рівняння має вигляд $y = \kappa(x), x \in [x_0, x_n]$, де $\kappa(x) = \kappa_x$.

Ламана лінія δ_f, визначена на проміжку $[x_0, x_n]$, називається некласичною діаграмою Ньютона для функції $y = f(x)$ на цьому проміжку.

Діаграма Ньютона δ_f, функції $y = f(x)$ має такі властивості: кожна вершина δ_f розміщена в одній із точок зображення P_i значення функції $y = f(x)$ в точці x_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$; кожна точка зображення P_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ знаходиться на δ_f або розміщена вище неї.

Позначимо $M_f(x) = exp(-\kappa(x))$, $x \in [x_0, x_n]$. Тоді для кожного x_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ виконується нерівність $|f(x_i)| = a_i \leq M_f(x_i)$. Крім цього, $M_f(x_0) = |f(x_0)|$, $M_f(x_n) = |f(x_n)|$.

Функція $M_f(x)$, визначена на проміжку $[x_0, x_n]$, називається некласичною мажорантою Ньютона функції $y = f(x)$ на цьому проміжку.

Нехай $M_f(x_i) = T_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Величини $R_i = (T_{i-1}/T_i)^{1/(x_i - x_{i-1})}$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ R_0 = 0)$ і $D_i = R_{i+1}/R_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1; D_0 = D_n = \infty)$ називаються відповідно i-им числовим нахилом і i-им відхиленням діаграми Ньютона δ_f.

Якщо точка зображення P_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ знаходиться в вершині δ_f, то індекс i називається вершинним індексом, якщо ж на δ_f, то – діаграмним індексом. Індекси $i = 0$ та $i = n$ відносяться до вершинних індексів. Множину всіх вершинних індексів позначимо через I, а множину діаграмних індексів – через G. При цьому $I \subset G$ і $T_i = a_i$ для всіх $i \in G$.

Нехай φ_i– кут між відрізком $B_{x_{i-1}} B_{x_i}$ діаграми Ньютона δ_f і додатним напрямком осі абсцис. Тоді кутовий коефіцієнт k_i відрізка $B_{x_{i-1}} B_{x_i}$ визначається за формулою

$$k_i = \frac{\kappa_{x_i} - \kappa_{x_{i-1}}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{-lnT_i + lnT_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = ln\left(\frac{T_{i-1}}{T_i}\right)^{\frac{1}{x_i - x_{i-1}}}.$$

Тому $k_i = lnR_i$. Звідси випливає, що $R_i = exp(tg\varphi_i)$, $D_i = exp(tg\varphi_{i+1} - tg\varphi_i)$. Якщо $\{i_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots, s; s \leq n)$ – послідовність вершинних індексів δ_f, то

$$0 = R_0 = R_{i_1} < R_{i_2} < \ldots < R_{i_s} = R_n;$$

$$R_{i_k+1} = R_{i_k+2} = \ldots = R_{i_{k+1}};$$

$$D_i \geq 1\ (i = 0, 1, \ldots, n);\ D_{i_k} > 1\ (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Якщо p і q – два послідовні вершинні індекси δ_f, то мажоранта Ньютона $M_f(x)$ на проміжку $[x_p, x_q]$ виражається формулою

$$M_f(x) = \left(a_p^{x_q - x} \cdot a_q^{x - x_p}\right)^{\frac{1}{x_q - x_p}}.$$

1. *Глебена М.І.* Чисельний метод покоординатного підйому відшукання абсолютного максимуму негладких і розривних функцій багатьох змінних / М.І. Глебена, Г.Г. Цегелик// Наук. зб. "Прикладні проблеми механіки і математики". – 2009. – Вип. 7. – С. 78–82.
2. *Цегелик Г. Г.* Теория мажорант и диаграмм Ньютона функций, заданных таблично, и ее приложение // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, №9. – С. 1273–1276.