УДК 519.6

М.І. ГЛЕБЕНА[1], Г.Г. ЦЕГЕЛИК[2]
[1]ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Україна,
[2]Львівський національний університет імені Івана Франка, Україна,
HlebenaM@gmail.com

ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД НУЛЬОВОГО ПОРЯДКУ ДЛЯ ОПТИМІЗАЦІЇ НЕГЛАДКИХ ЛОГАРИФМІЧНО ВГНУТИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

В роботі [1] розглянуто використання апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій однієї та двох дійсних змінних, заданих таблично [2], для побудови чисельних методів нульового порядку оптимізації як гладких, так і негладких, розривних й заданих дискретно функцій однієї, двох та багатьох дійсних змінних.

В доповіді розглядається побудова апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій багатьох дійсних змінних, заданих таблично, та його використання для розробки чисельного методу нульового порядку оптимізації логарифмічно вгнутих функцій багатьох дійсних змінних.

Розглянемо функцію $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, визначену в області $D = \{a_i \le x_i \le b_i, i = 1,2,\ldots,n\}$. Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що $f(x_1, x_2, \ldots x_n) > 0$ для всіх $x = (x_1, x_2, \ldots x_n) \in D$. Нехай функція $y = f(x)$ задана своїми значеннями на дискретній множині точок $(a_1 + k_1h_1, a_2 + k_2h_2, \ldots, a_n + k_nh_n)$, де $k_i = 0,1,\ldots,m_i$, $h_i = (b_i - a_i)/m_i$, $i = 1,2,\ldots,n$, яку позначимо M. Введемо в розгляд позначення $f(a_1 + k_1h_1, a_2 + k_2h_2, \ldots, a_n + k_nh_n) = a_{k_1k_2\ldots k_n}$.

У просторі змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$ побудуємо точки зображення $P_{k_1k_2\ldots k_n}(a_1 + k_1h_1, a_2 + k_2h_2, \ldots, a_n + k_nh_n, -\ln a_{k_1k_2\ldots k_n})$ і з кожної точки $P_{k_1k_2\ldots k_n}$ проведемо півпряму в додатному напрямі осі Oy. Сукупність точок цих півпрямих позначимо S, а їхню опуклу оболонку – $C(S)$. Для кожної точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ знайдемо точку $B_x(x_1, x_2, \ldots, x_n, \chi_x)$, де $\chi_x = \inf\limits_{x \in C(S)} y$.

Множина точок $B_x, x \in D$, утворює багатогранну поверхню δ_f, яку називатимемо некласичною діаграмою Ньютона, визначеною в області D, функції $y = f(x)$, заданої таблично. Ця поверхня є неперервною, опуклою і її рівняння має вигляд $y = \chi(x)$, де $\chi(x) = \chi_x, x \in D$.

Позначимо

$$M_f(x) = \exp(-\chi(x)), x \in D.$$

Тоді для будь-якого $x \in R$ виконується нерівність $-\ln f(x) \ge \chi(x)$, або $f(x) \le \exp(-\chi(x)) = M_f(x)$. Функцію $M_f(x)$, визначену в області D, називатимемо некласичною мажорантою Ньютона функції $y = f(x)$, заданої таблично.

Позначимо $T_{k_1k_2\ldots,k_n}$ значення мажоранти Ньютона в точці $x = (a_1 + k_1h_1, a_2 + k_2h_2, \ldots, a_n + k_nh_n)$. Величини $R_{k_1\ldots,k_i\ldots k_n}(x_i) = \left(\frac{T_{k_1,\ldots,k_{i-1},k_i-1,k_{i+1},\ldots,k_n}}{T_{k_1,\ldots,k_{i-1},k_i,k_{i+1},\ldots,k_n}}\right)^{\frac{1}{h_i}}$, називатимемо $(k_1\ldots,k_i,\ldots k_n)$ числовими нахилами мажоранти $M_f(x)$ в напрямі осі Ox_i, а величини $D_{k_1\ldots k_i\ldots k_n}(x_i) = \frac{R_{k_1,\ldots,k_{i-1},k_i+1,k_{i+1},k_n}(x_i)}{R_{k_1,\ldots,k_{i-1},k_i,k_{i+1},\ldots,k_n}(x_i)}$ називатимемо $(k_1,\ldots,k_i,\ldots,k_n)$ відхиленнями в напрямі осі Ox_i.

Із опуклості діаграми δ_f випливають такі властивості:

$$R_{k_1,\ldots,k_{i-1},k_i,k_{i+1},\ldots k_n}(x_i) \le R_{k_1,\ldots k_{i-1},k_i+1,k_{i+1},\ldots k_n}(x_i),$$

$$D_{k_1,\ldots,k_i,\ldots,k_n}(x_i) \ge 1,$$

$$\max_{x\in R} f(x) = \max_{x\in D} M_f(x).$$

Крім того, якщо

$$\max_{x\in R} f(x) = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n),$$

то

$$\max_{x\in D} M_f(x) = M_f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n).$$

Ці властивості лежать в основі чисельного методу нульового порядку відшукання з певною точністю екстремуму будь-якої логарифмічно вгнутої функції багатьох змінних за будь-якого початкового наближення. Зазначимо, якщо $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – логарифмічно вгнута функція, то $T_{k_1k_2\ldots,k_n} = a_{k_1k_2\ldots k_n}$.

Суть методу полягає у наступному. Якщо в точці $(a_1 + k_1h_1, a_2 + k_2h_2, \ldots, a_n + k_nh_n) \in M$ виконуються умови:

$$R_{k_1,\ldots,k_{i-1},k_i,k_{i+1},\ldots k_n}(x_i) \le 1,$$

$$R_{k_1,\ldots k_{i-1},k_i+1,k_{i+1},\ldots k_n}(x_i) > 1 \qquad (1)$$

для всіх $i = 1,2,\ldots,n$, то ця точка з точністю $h = \max_{1\le i\le n} h_i$ приймається за точку максимуму функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Якщо для фіксованого i,($i = 1,2,\ldots,n$) умови (1) не виконуються, то

$$R_{k_1,\ldots,k_{i-1},k_i,k_{i+1},\ldots k_n}(x_i) > 1,$$

$$R_{k_1,\ldots k_{i-1},k_i+1,k_{i+1},\ldots k_n}(x_i) > 1, \qquad (2)$$

або

$$R_{k_1,\ldots,k_{i-1},k_i,k_{i+1},\ldots k_n}(x_i) < 1,$$

$$R_{k_1,\ldots k_{i-1},k_i+1,k_{i+1},\ldots k_n}(x_i) < 1. \qquad (3)$$

Алгоритм методу полягає у наступному. За початкову точку беремо будь-яку точку із множини M. Для кожного індекса i ($i = 1,2,\ldots,n$) знаходимо точку для якої виконуються умови (1). При цьому, якщо для фіксованого індекса i умови (1) виконуються в точці $M_i \in M$, то для знаходження точки, для якої будуть виконуватись умови (1), наступного i, за початкову точку беремо точку M_i.

Для відшукання точки, для якої виконуються умови (1) у випадку (2) знаходимо мінімальне значення індекса ν, для якого

$$R_{k_1,\ldots,k_{i-1},k_i-\nu,k_{i+1},\ldots k_n}(x_i) \le 1.$$

Для відшукання точки, для якої виконуються умови (1) у випадку (3) знаходимо мінімальне значення індекса ν, для якого

$$R_{k_1,\ldots,k_{i-1},k_i+\nu,k_{i+1},\ldots k_n}(x_i) > 1.$$

1. Глебена М.І. Математичні моделі та числові методи мажорантного типу для аналізу дискретних оптимізаційного типу процесів: автореф. Дис. … канд. фіз.-мат. наук: ДВНЗ Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника. – Івано-Франківськ, 2012. – 23 с.
2. Цегелик Г.Г. Апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично, та його використання в чисельному аналізі: монографія. – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2013. – 190 с.