Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет
імені Івана Франка

XXI Всеукраїнська
наукова конференція

СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ ТА ІНФОРМАТИКИ

APAMCS – 2015

присвячена
80-річчю проф. Й.В.Людкевича,
40-річчю заснування факультету прикладної математики та інформатики,
20-річчю заснування кафедри інформаційних систем

24–25 вересня 2015 року

Збірник наукових праць

Львів – 2015

УДК 519.6

М.І. Глебена[*], *Г.Г. Цегелик*[**]

(* Ужгородський національний університет,
** Львівський національний університет імені Івана Франка)

ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД МАЖОРАНТНОГО ТИПУ ВІДШУКАННЯ ЕКСТРЕМУМУ ДОВІЛЬНИХ ЛОГАРИФМІЧНО ВГНУТИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ДІЙСНИХ ЗМІННИХ

В [2] розроблено апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій однієї дійсної змінної, заданих таблично, який одержав широке застосування для побудови нових чисельних методів розв'язування окремих класів задач алгебри, математичного аналізу та диференціальних рівнянь [3]. Зокрема, цей апарат використано для побудови чисельного методу відшукання екстремуму довільних логарифмічно вгнутих функцій двох дійсних змінних [1].

У доповіді пропонується модифікація методу [1], направлена на підвищення його ефективності.

Постановка задачі.

Нехай в області $D = \{ a \le x \le b,\ c \le y \le d \}$ визначена логарифмічно вгнута функція $f(x, y)$, яка може бути як гладкою, так і негладкою. Потрібно знайти максимальне значення вищеназваної функції.

Алгоритм методу.

Побудуємо в області D сітку:

$$x = x_i = a + ih, \quad i = 0,1,\ldots,n, \ h = (b-a)/n;$$
$$y = y_j = c + js, \quad j = 0,1,\ldots,m, \ s = (d-c)/m.$$

Позначимо $f(x_i, y_j) = a_{ij} \quad (i = 0,1,\ldots,n;\ j = 0,1,\ldots,m)$. Побудуємо для значень $f(x_i, y_j) = a_{ij}$ некласичну мажоранту Ньютона $M_f(x, y)$ [2]. Оскільки функція $f(x, y)$ є логарифмічно вгнутою в області D, то

$$R_{ij}(x) = \left(\frac{a_{i-1,j}}{a_{ij}} \right)^{\frac{1}{h}} \quad (i = 1,2,\ldots,n;\ j = 0,1,\ldots,m),$$

$$R_{ij}(y) = \left(\frac{a_{i,j-1}}{a_{ij}} \right)^{\frac{1}{s}} \quad (i = 0,1,\ldots,n;\ j = 1,2,\ldots,m),$$

$$R_{ij}(x, y) = \left(\frac{a_{i-1,j-1}}{a_{ij}} \right)^{\frac{1}{\sqrt{h^2+s^2}}} \quad (i = 1,2,\ldots,n;\ j = 1,2,\ldots,m).$$

Легко бачити, що якщо для деякої точки $(x_k, y_l) \in D$ виконуються умови

$$R_{kl}(x) \le 1, \quad R_{k+1,l}(x) > 1, \tag{1}$$

$$R_{kl}(y) \le 1, \quad R_{k,l+1}(y) > 1, \tag{2}$$

то точка (x_k, y_l) з точністю $\varepsilon = \max(s, h)$ є точкою екстремуму функції $f(x, y)$.

Вибравши за початкове наближення екстремальної точки будь-яку точку $(x_k, y_l) \in D$, алгоритм методу є таким.

1. Обчислюємо $R_{kl}(x)$, $R_{kl}(y)$, $R_{k+1,l}(x)$, $R_{k,l+1}(y)$. Якщо умови (1), (2) виконуються, то точку (x_k, y_l) з точністю $\varepsilon \le \max(s, h)$ приймаємо за оптимальну і на цьому робота алгоритму завершується. Якщо обидві умови не виконуються, то визначаємо $\tilde{R}_{kl} = \max\{R_{kl}(x), R_{kl}(y), R_{kl}(x, y)\}$ і переходимо до пункту 2. Якщо умова (1) виконується, а умова (2) не виконується, то визначаємо $\tilde{R}_{kl} = \max\{R_{kl}(y), R_{kl}(x, y)\}$ і переходимо до пункту 3. Якщо умова (2) виконується, а умова (1) не виконується, то визначаємо $\tilde{R}_{kl} = \max\{R_{kl}(x), R_{kl}(x, y)\}$ і переходимо до пункту 4.
2. Якщо $R_{kl}(x) \le 1$ і $R_{kl}(y) \le 1$, то при $\tilde{R}_{kl} = R_{kl}(x)$ за точку (x_k, y_l) приймаємо точку (x_{k+1}, y_l) і переходимо до пункту 1; при $\tilde{R}_{kl} = R_{kl}(y)$ за точку (x_k, y_l) приймаємо точку (x_k, y_{l+1}) і переходимо до пункту 1; при $\tilde{R}_{kl} = R_{kl}(x, y)$ за точку (x_k, y_l) приймаємо точку (x_{k+1}, y_{l+1}) і переходимо до пункту 1. Якщо $R_{kl}(x) \ge 1$, $R_{kl}(y) \ge 1$, то при $\tilde{R}_{kl} = R_{kl}(x)$ за точку (x_k, y_l) приймаємо точку (x_{k-1}, y_l) і переходимо до пункту 1; при $\tilde{R}_{kl} = R_{kl}(y)$, то за точку (x_k, y_l) приймаємо точку (x_k, y_{l-1}) і переходимо до пункту 1; при $\tilde{R}_{kl} = R_{kl}(x, y)$ за точку (x_k, y_l) приймаємо точку (x_{k-1}, y_{l-1}) і переходимо до пункту 1. У випадку якщо $R_{kl}(x) \le 1$ і $R_{kl}(y) \ge 1$, то при $\tilde{R}_{kl} = R_{kl}(x)$ за точку (x_k, y_l) приймаємо точку (x_{k+1}, y_l) і переходимо до пункту 1; при $\tilde{R}_{kl} = R_{kl}(y)$ за точку (x_k, y_l) приймаємо точку (x_k, y_{l-1}) і переходимо до пункту 1; при $\tilde{R}_{kl} = R_{kl}(x, y)$ за точку (x_k, y_l) приймаємо точку (x_{k+1}, y_{l-1}) і переходимо до пункту 1.

3. Якщо $R_{kl}(y)\leq 1,$ то при $\tilde{R}_{kl}=R_{kl}(y)$ за точку (x_k, y_l) приймаємо точку (x_k, y_{l+1}) і переходимо до пункту 1; при $\tilde{R}_{kl}=R_{kl}(x,y)$ за точку (x_k, y_l) приймаємо точку (x_{k+1}, y_{l+1}) і переходимо до пункту 1. Якщо $R_{kl}(y)\geq 1,$ то при $\tilde{R}_{kl}=R_{kl}(y)$ за точку (x_k, y_l) приймаємо точку (x_k, y_{l-1}) і переходимо до пункту 1; при $\tilde{R}_{kl}=R_{kl}(x,y)$ за точку (x_k, y_l) приймаємо точку (x_{k-1}, y_{l-1}) і переходимо до пункту 1.
4. Якщо $R_{kl}(x)\leq 1$, то при $\tilde{R}_{kl}=R_{kl}(x)$ за точку (x_k, y_l) приймаємо точку (x_{k+1}, y_l) і переходимо до пункту 1; при $\tilde{R}_{kl}=R_{kl}(x,y)$ за точку (x_k, y_l) приймаємо точку (x_{k+1}, y_{l+1}) і переходимо до пункту 1. Якщо $R_{kl}(x)\geq 1,$ то при $\tilde{R}_{kl}=R_{kl}(x)$ за точку (x_k, y_l) приймаємо точку (x_{k-1}, y_l) і переходимо до пункту 1; при $\tilde{R}_{kl}=R_{kl}(x,y)$ за точку (x_k, y_l) приймаємо точку (x_{k-1}, y_{l-1}) і переходимо до пункту 1.

1. *Глебена М.І.* Чисельний метод мажорантного типу відшукання екстремуму довільних логарифмічно вгнутих функцій двох дійсних змінних / М.І.Глебена, Г.Г.Цегелик // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2011.– Вип. 22. №2 – С.50 – 53.
2. *Цегелик Г.Г.* Теория мажорант и диаграмм Ньютона функций, заданных таблично, и ее приложение // Укр. мат. журн.- 1989.- Т.41.- №9. с.1273-1276.
3. *Цегелик Г.Г.* Апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично, та його використання в чисельному аналізі: монографія / Г.Г.Цегелик. – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2013.- 190с.