МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

НАУКОВИЙ ВІСНИК УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Випуск 22 № 2

Ужгород 2011

УДК 519.6

М. І. Глебена (Ужгородський нац. ун-т)
Г. Г. Цегелик (Львівський нац. ун-т імені Івана Франка)

ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД МАЖОРАНТНОГО ТИПУ ВІДШУКАННЯ ЕКСТРЕМУМУ ДОВІЛЬНИХ ЛОГАРИФМІЧНО ВГНУТИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ДІЙСНИХ ЗМІННИХ

Modification of the algorithm for finding the extremum of logarithmic concave functions of two real variables is considered. The method is based on the use of the apparatus of non-classical Newtonian majorant and diagrams functions which are given discretely.

Розглядається модифікація алгоритму відшукання екстремуму логарифмічно вгнутих функцій двох дійсних змінних в основі якого лежить використання апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично.

Вступ. В [1], використовуючи апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій однієї дійсної змінної, заданих таблично [2], побудовано чисельний метод відшукання екстремуму довільних логарифмічно вгнутих функцій однієї дійсної змінної. Цей же апарат в [3,4] використано для розробки чисельних методів типу покоординатного підйому для оптимізації довільних логарифмічно вгнутих функцій двох і багатьох дійсних змінних.

В [5], використовуючи апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій двох дійсних змінних, заданих таблично, побудовано чисельний метод відшукання екстремуму довільних логарифмічно вгнутих функцій двох дійсних змінних. В даній роботі проведена модифікація побудованого в [5] методу, яка забезпечує більш швидку його збіжність.

1. Постановка задачі. Нехай в області $D = \{a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$ задана довільна логарифмічно вгнута функція $f(x,y)$. Побудуємо в області D сітку:

$$x = x_i = a + ih, \quad i = 0,1,\dots,n, \quad h = (b-a)/n;$$

$$y = y_j = c + js, \quad j = 0,1,\dots,m, \quad s = (d-c)/m.$$

Позначимо $f(x_i,y_j) = a_{ij} \quad (i = 0,1,\dots,n;\ j = 0,1,\dots,m)$ і, використовуючи характеристики некласичної діаграми Ньютона, побудованої для функції $f(x,y)$ за її значеннями у вибраній системі точок, розробимо алгоритм, який дає змогу з заданою точністю відшукати екстремум функції $f(x,y)$ за будь-якого початкового наближення.

2. Числові характеристики діаграми Ньютона. В просторі xyz побудуємо множину точок $P_{ij}(x_i, y_j, -\ln a_{ij})$ з координатами $x = x_i,\ y = y_i,\ z = -\ln a_{ij}$ $(i = 0,1,\dots,n; \quad j = 0,1,\dots,m)$. З кожної точки P_{ij} проведемо півпряму в додатному напрямі осі Oz, перпендикулярно до площини xy. Множину точок цих півпрямих позначимо через S, а її опуклу оболонку – через $C(S)$. Для кожної точки $(x,y) \in D$ визначимо точку $B(x,y,\kappa(x,y))$, де

$$\kappa(x,y) = \inf_{(x,y,z)\in C(S)} z.$$

Множина точок $B(x,y,\kappa(x,y))$, $(x,y) \in D$, утворює багатогранну поверхню δ_f, яка обмежує $C(S)$ знизу. Ця поверхня є неперервною, опуклою і її рівняння має вигляд

$$z = \kappa(x,y), \quad (x,y) \in D.$$

Якщо позначити

$$M_f(x,y) = \exp(-\kappa(x,y)), \quad (x,y) \in D,$$

то для кожної точки (x_i, y_j) $(i = 0,1,\ldots,n;\ j = 0,1,\ldots,m)$ виконуються нерівності $a_{ij} \le M_f(x_i, y_j)$. Крім того, $M_f(x_0,y_0) = a_{00}$, $M_f(x_0,y_m) = a_{0m}$, $M_f(x_n,y_0) = a_{n0}$, $M_f(x_n,y_m) = a_{nm}$. Отже, апроксимуюча функція $M_f(x,y)$, $(x,y) \in D$, є некласичною мажорантою Ньютона для функції $f(x,y)$ за значеннями a_{ij} $(i = 0,1,\ldots,n;\ j = 0,1,\ldots,m)$, а δ_f – некласичною діаграмою Ньютона.

Позначимо

$$M_f(x_i,y_j) = T_{ij} \qquad (i = 0,1,\ldots,n;\ j = 0,1,\ldots,m)\ .$$

Оскільки функція $f(x,y)$ є логарифмічно вгнутою, то $T_{ij} = a_{ij}$ $(i = 0,1,\ldots,n;\ j = 0,1,\ldots,m)$. Числові нахили діаграми Ньютона в напрямі осей Ox і Oy матимуть вигляд

$$R_{ij}(x) = \left(\frac{a_{i-1,j}}{a_{ij}}\right)^{\frac{1}{h}}, \quad R_{i+1,j}(x) = \left(\frac{a_{ij}}{a_{i+1,j}}\right)^{\frac{1}{h}};$$

$$R_{ij}(y) = \left(\frac{a_{i,j-1}}{a_{ij}}\right)^{\frac{1}{s}}, \quad R_{i,j+1}(y) = \left(\frac{a_{ij}}{a_{i,j+1}}\right)^{\frac{1}{s}}.$$

Зазначимо, що для роботи алгоритму відшукання з заданою точністю екстремуму функції $f(x,y)$ не потрібно будувати мажоранту та діаграму Ньютона для функції $f(x,y)$ за значеннями цієї функції у вибраній системі точок. Достатньо буде обчислити значення функції $f(x,y)$ в деякій послідовності точок, яка визначається алгоритмом. Умовою завершення алгоритму є наступна теорема.

Теорема. ([6]) Якщо для деякої пари індексів (k,l) виконуються умови

$$R_{kl}(x) \le 1, \quad R_{k+1,l}(x) \ge 1, \quad R_{kl}(y) \le 1, \quad R_{k,l+1}(y) \ge 1;$$

$$D_{kl}(x) = \frac{R_{k+1,l}(x)}{R_{kl}(x)} > 1, \quad D_{kl}(y) = \frac{R_{k,l+1}(y)}{R_{kl}(y)} > 1,$$

то точка (x_k, y_l) є точкою максимуму функції $f(x,y)$ з точністю $\max(s,h)$.

Не зменшуючи загальності, покладемо $s = h$.

3. Алгоритм методу. Алгоритм методу складається з початкового кроку і загального, який повторюється.

Початковий крок.

1.Вибираємо в області D довільну точку (x_k, y_l) за початкову (бажано середню точку в D).

2.Перевіряємо виконання умов теореми. Якщо умови виконуються, то точку (x_k, y_l) з точністю h приймаємо за точку максимуму функції $f(x,y)$ і на цьому робота алгоритму завершується. Якщо хоч одна умова теореми не виконується, то серед точок (x_{k-1}, y_{l-1}),(x_{k-1}, y_l), (x_{k-1}, y_{l+1}), (x_k, y_{l-1}), (x_k, y_{l+1}), (x_{k+1}, y_{l-1}),

(x_{k+1}, y_l), (x_{k+1}, y_{l+1}) знаходимо точку, в якій функція $f(x, y)$ набуває найбільшого значення. Позначимо цю точку через (x_p, y_q) і переходимо до загального кроку.

Загальний крок. Припустимо, що ми перейшли до точки (x_p, y_q) з однієї з точок:

1. (x_{p-1}, y_{q-1}). Тоді серед точок (x_p, y_{q+1}),(x_{p+1}, y_q),(x_{p+1}, y_{q+1}) знаходимо точку, в якій функція $f(x, y)$ досягає максимуму, і позначаємо її через (x_p, y_q).
2. (x_p, y_{q-1}). Тоді серед точок (x_{p-1}, y_{q+1}),(x_p, y_{q+1}),(x_{p+1}, y_{q+1}) знаходимо точку, в якій функція $f(x, y)$ досягає максимуму, і позначаємо її через (x_p, y_q).
3. (x_{p+1}, y_{q-1}). Тоді серед точок (x_{p-1}, y_q),(x_{p-1}, y_{q+1}),(x_p, y_{q+1}) знаходимо точку, в якій функція $f(x, y)$ досягає максимуму, і позначаємо її через (x_p, y_q).
4. (x_{p-1}, y_q). Тоді серед точок (x_{p+1}, y_{q-1}),(x_{p+1}, y_q),(x_{p+1}, y_{q+1}) знаходимо точку, в якій функція $f(x, y)$ досягає максимуму, і позначаємо її через (x_p, y_q).
5. (x_{p+1}, y_q). Тоді серед точок (x_{p-1}, y_{q-1}),(x_{p-1}, y_q),(x_{p-1}, y_{q+1}) знаходимо точку, в якій функція $f(x, y)$ досягає максимуму, і позначаємо її через (x_p, y_q).
6. (x_{p-1}, y_{q+1}). Тоді серед точок (x_p, y_{q-1}),(x_{p+1}, y_{q-1}),(x_{p+1}, y_q) знаходимо точку, в якій функція $f(x, y)$ досягає максимуму, і позначаємо її через (x_p, y_q).
7. (x_p, y_{q+1}). Тоді серед точок (x_{p-1}, y_{q-1}),(x_p, y_{q-1}),(x_{p+1}, y_{q-1}) знаходимо точку, в якій функція $f(x, y)$ досягає максимуму, і позначаємо її через (x_p, y_q).
8. (x_{p+1}, y_{q+1}). Тоді серед точок (x_{p-1}, y_q),(x_{p-1}, y_{q-1}),(x_p, y_{q-1}) знаходимо точку, в якій функція $f(x, y)$ досягає максимуму, і позначаємо її через (x_p, y_q).

Знайшовши нову точку (x_p, y_q), перевіряємо виконання умов теореми, поклавши $k = p$, $l = q$. Якщо умови теореми виконуються, то точку (x_p, y_q) з точністю h приймаємо за точку максимуму функції $f(x, y)$. Якщо умови не виконуються, то повторюємо загальний крок.

Приклад 1. *Розглянемо задачу мінімізації штрафної функції №2 при $n=2$.*

$$f(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + 10^{-3}(x^2 + y^2 - 0.25)^2$$

Її графік зображено на рис.1. Дана функція є строго опуклою, тому вищенаведений алгоритм будемо застосовувати до задачі максимізації функції

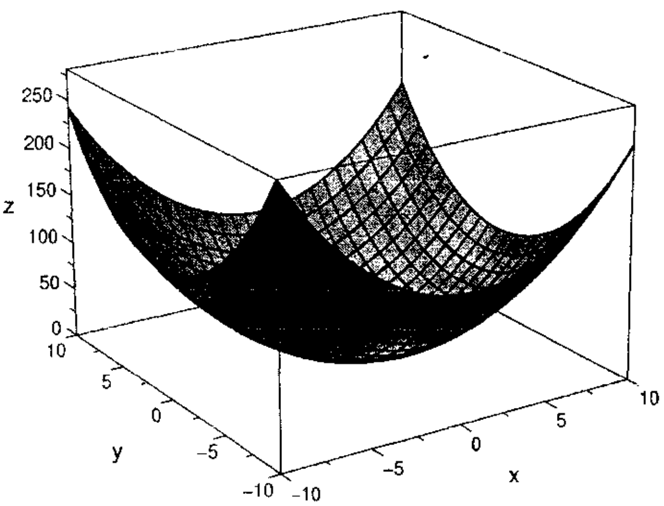

Рис. 1

$$-f(x,y) = -(x-1)^2 - (y-1)^2 - 10^{-3}(x^2+y^2-0.25)^2 \to \max$$

Будемо розглядати функцію $-f(x_1,x_2)+10$, *оскільки для неї виконується умова* $-f(x_1,x_2)+10>0$ *в області* $D=\{-1\le x\le 5,\ \ -1\le y\le 5\}$. *Виберемо точку (-0,9;0,1) за початкову і перевіримо виконання умов теореми. Оскільки при* $h=s=0,1$ *то умови теореми не виконуються. Згідно початкового кроку серед точок (-1;0), (-0,9;0), (-0,8;0), (-1;0,1), (-0,8;0,1), (-1;0,2), (-0,9;0,2), (-0,8;0,2) виберемо точку в якій функція набуває найбільшого значення. Серед цих точок найбільшого значення функція набуває у точці (-0,8;0,2). Позначимо цю точку через* (x_p,y_q), *а точку з якої перейшли через* (x_{p-1},y_{q-1}), *тобто виконується умова 1 загального кроку. Серед точок (-0,8;0,3), (-0,7;0,3), (-0,7;0,2) шукаємо точку, в якій функція досягає максимального значення, такою точкою є (-0,7;0,3). Повторюючи загальний крок, послідовно перейдемо до точки (1;1), для якої виконуються умови теореми:*

(x_k,y_l)	h	$R_{kl}(x)$	$R_{k+1,l}(x)$	$R_{kl}(y)$	$R_{k,l+1}(y)$	$D_{kl}(x)$	$D_{kl}(y)$
(-0,9;0,1)	0,1	0,4843	0,5261	0,7072	0,7407	1,0863	1,0475

(x_k,y_l)	h	$R_{kl}(x)$	$R_{k+1,l}(x)$	$R_{kl}(y)$	$R_{k,l+1}(y)$	$D_{kl}(x)$	$D_{kl}(y)$
(1;1)	0,1	0,9907	1,0108	0,9907	1,0108	1,0204	1,0204

Отже, з точністю 0,1 точку (1;1) приймаємо за точку, в якій функція досягає максимуму. Уточнимо дану точку, зменшивши крок. За початкову точку виберемо (0,99;0,99) і покладемо $h=s=0,001$. *Виконавши послідовність кроків алгоритму, одержимо точку (0,997;0,997), в якій функція досягає найбільшого значення. Проводячи подальші уточнення, одержимо точку (0,99654; 0,99654), яку приймаємо з точністю 0,00001 за точку, в якій досягається максимум функції. Значення функції в цій точці дорівнює* $f(x,y)=0,003038277885$.

Зазначимо, що побудований чисельний метод можна успішно застосовувати для відшукання локальних екстремумів довільних негладких функцій, а також для відшукання абсолютного екстремуму довільних функцій двох дійсних змінних, які задовольняють в розглянутій області умову Ліпшиця з сталою L.

1. *Глебена М. І., Цегелик Г. Г.* Чисельний метод мажорантного типу відшукання екстремуму негладких і розривних функцій //Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер.матем. і інформ. – 2006. - Вип.12-13. – С. 55-58.
2. *Цегелик Г. Г.* Теория мажорант и диаграмм Ньютона функций, заданных таблично, и ее приложение // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, №9. – С. 1273–1276.
3. *Глебена М. І., Цегелик Г. Г.* Алгоритм відшукання максимального значення довільної логарифмічно вгнутої функції двох дійсних змінних // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2009.–Вип. 18. – С.46 – 50.
4. *Глебена М. І., Цегелик Г. Г.* Чисельний метод покоординатного підйому відшукання абсолютного екстремуму довільної логарифмічно вгнутої функції багатьох змінних // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2009.–Вип. 19. – С.17 – 19.
5. *Глебена М. І., Цегелик Г. Г.* Чисельний метод відшукання екстремуму негладких функцій двох дійсних змінних //Прикладні проблеми механіки і матем. – 2007. - Вип.5 – С. 17-21.
6. *Цегелик Г. Г., Глебена М. І.* Чисельний метод мажорантного типу відшукання абсолютного екстремуму довільних негладких функцій двох дійсних змінних // Наук. зб. "Вісник Львівського університету ". -2010. -Вип. 16. –С. 63-70.

Одержано 20.09.2011