VISNYK OF THE LVIV UNIVERSITY

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Series Applied Mathematics and Informatics

Серія прикладна математика та інформатика

Issue 18

Випуск 18

Published 1-2 issues per year

Виходить 1-2 рази на рік

Published since 1999

Видається з 1999 року

Ivan Franko National University of Lviv

Львівський національний університет імені Івана Франка

2012

ISSN 2078–5097. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. пр. матем. та інф. 2012. Вип. 18. С. 70–75
Visnyk of the Lviv University. Series Appl. Math. and Informatics. Issue 18. P. 70–75

УДК 519.651

ПРО ТОЧНІСТЬ АПРОКСИМАЦІЇ ФУНКЦІЇ ДВОХ ДІЙСНИХ ЗМІННИХ НЕКЛАСИЧНОЮ МАЖОРАНТОЮ НЬЮТОНА

М. Глебена*, Н. Грипинська, Г. Цегелик*****

**Ужгородський національний університет,*
вул. Підгірна 46, Ужгород, 88000,
***Хмельницький національний університет,*
вул. Інститутська, 11, Хмельницький, 29016,
****Львівський національний університет імені Івана Франка,*
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: kafmmsep@franko.lviv.ua

Визначено точність наближення функції двох дійсних змінних некласичною мажорантою Ньютона функції, заданої таблично.

Ключові слова: методи оптимізації, мажоранта та діаграма Ньютона, точність апроксимації.

1. ВСТУП

В [1,2] розроблено апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій двох дійсних змінних, заданих таблично. В [3] цей апарат використано для побудови формули для наближеного обчислення визначених подвійних інтегралів. В [4,5], використовуючи властивості некласичних мажорант і діаграм Ньютона, побудовано чисельні методи відшукання абсолютного екстремуму негладких логарифмічно ввігнутих функцій двох дійсних змінних. Наша мета – розглянути питання точності наближення функції двох дійсних змінних некласичною мажорантою Ньютона.

2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Нехай функція двох дійсних змінних $z = f(x,y)$ задана своїми значеннями в точках (x_i, y_j) $(i = 1,2,\ldots,n;\quad j = 1,2,\ldots,m)$

$$f(x_i, y_j) = z_{ij} \quad (i = 1,2,\ldots,n;\quad j = 1,2,\ldots,m),$$

де $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, $\quad y_1 < y_2 < \ldots < y_m$, $\left|z_{ij}\right| = a_{ij} \le M$ і $a_{11} \cdot a_{1m} \cdot a_{n1} \cdot a_{nm} \ne 0$.

В просторі xyz побудуємо точки зображення $P_{ij}(x_i, y_j - \ln a_{ij})$ $(i = 1,2,\ldots,n$; $j = 1,2,\ldots,m)$ і з кожної точки P_{ij} проведемо півпряму в додатному напрямі осі Oz, перпендикулярно до площини xy. Множину точок цих півпрямих позначимо через S, а її опуклу оболонку – через $C(S)$. Для кожної точки $(x,y) \in R$, де $R = \{(x,y) |\ x_1 \le x \le x_n,\ y_1 \le y \le y_m\}$, визначимо точку $B(x,y,\kappa(x,y))$, де

$$\kappa(x,y) = \inf_{(x,y,z)\in C(S)} z\,.$$

Множина точок $B(x,y,\kappa(x,y))$, $(x,y) \in R$, утворює багатогранну поверхню, яка обмежує $C(S)$ знизу. Ця поверхня називається некласичною діаграмою Ньютона функції $z = f(x,y)$ на R, а її рівняння $z = \kappa(x,y)$, $(x,y) \in R$. Функція

$$M_f(x,y) = \exp(-\kappa(x,y)), \quad (x,y) \in R\,,$$

називається некласичною мажорантою Ньютона функції $z = f(x,y)$ на R.

В [2] знайдено явний вигляд $M_f(x,y)$ для функції $z = f(x,y)$, заданої своїми значеннями у вершинах трикутника Δ з вершинами (a_1,b_1), (a_2,b_2), (a_3,b_3). Якщо $f(a_1,b_1) = A$, $f(a_2,b_2) = B$, $f(a_3,b_3) = C$, то

$$M_f(x,y) = \left(|A|^{h_{32}(x,y)}|B|^{h_{13}(x,y)}|C|^{h_{21}(x,y)}\right)^{\frac{1}{h_{13}(a_2,b_2)}}, \qquad (1)$$

де

$$h_{ij}(x,y) = \begin{vmatrix} x-a_i & y-b_i \\ a_j-a_i & b_j-b_i \end{vmatrix}, \ (i,j = 1,2,3;\ i \neq j).$$

Використовуючи формулу (1), оцінимо точність наближення функції $z = f(x,y)$ некласичною мажорантою Ньютона.

3. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ

Нехай областю, в якій треба наблизити неперервну функцію $f(x,y)$, є прямокутник

$$D = \{(x,y) | a \le x \le b, c \le y \le d\}.$$

Розіб'ємо область D на прямокутники прямими $x = x_i$ $(i = 1,2,\ldots,p)$ і $y = y_j$ $(j = 1,2,\ldots,q)$, де $x_{i+1} = x_i + h_1$, $y_{j+1} = y_j + h_2$, $h_1 = (b-a)/p$, $h_2 = (d-c)/q$. Кожний прямокутник діагоналлю розіб'ємо на два трикутники: верхній і нижній. Якщо прямокутник утворено перетином прямих $x = x_{i-1}$, $x = x_i$ і $y = y_{j-1}$, $y = y_j$, то вершинами нижнього трикутника будуть точки (x_{i-1},y_{j-1}), (x_{i-1},y_j), (x_i,y_{j-1}), а верхнього (x_{i-1},y_j), (x_i,y_j), (x_i,y_{j-1}). Нижній трикутник позначимо через D_{ij}^-, а верхній – D_{ij}^+.

Теорема. *Якщо виконуються умови*

$$1 \le f(x,y) \le M, \quad \forall (x,y) \in D,$$

$$|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| \le L(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|), \quad \forall (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in D, \qquad (2)$$

то точність наближення функції $f(x,y)$ мажорантою Ньютона $M_f(x,y)$ визначається нерівністю

$$|f(x,y) - M_f(x,y)| \le 2hL(1+M),$$

де $h = \max(h_1,h_2)$.

Доведення. На кожному нижньому трикутнику D_{ij}^- $(i = 1,2,\ldots p;\ j = 1,2,\ldots,q)$, використовуючи формулу (1), наблизимо функцію $f(x,y)$ некласичною мажорантою Ньютона

$$M_{f,i,j}^-(x,y) = \left(f(x_{i-1},y_{j-1})^{h_{32}(x,y)} f(x_{i-1},y_j)^{h_{13}(x,y)} f(x_i,y_{j-1})^{h_{21}(x,y)}\right)^{\frac{1}{h_{13}(x_{i-1},y_j)}},$$

де

$$h_{32}(x,y) = \begin{vmatrix} x-x_i & y-y_{j-1} \\ x_{i-1}-x_i & y_j-y_{j-1} \end{vmatrix} = h_1(y-y_{j-1}) + h_2(x-x_i),$$

$$h_{13}(x,y)=\begin{vmatrix} x-x_{i-1} & y-y_{j-1} \\ x_i-x_{i-1} & y_{j-1}-y_{j-1}\end{vmatrix}=-h_1(y-y_{j-1}),$$

$$h_{21}(x,y)=\begin{vmatrix} x-x_{i-1} & y-y_j \\ x_{i-1}-x_{i-1} & y_{j-1}-y_j\end{vmatrix}=-h_2(x-x_{i-1}),$$

$$h_{13}(x_{i-1},y_j)=\begin{vmatrix} x_{i-1}-x_{i-1} & y_j-y_{j-1} \\ x_i-x_{i-1} & y_{j-1}-y_{j-1}\end{vmatrix}=-h_1h_2.$$

Отже,

$$M^-_{f,i,j}(x,y)=f(x_{i-1},y_{j-1})^{\frac{x_i-x}{h_1}}f(x_{i-1},y_{j-1})^{\frac{y_{j-1}-y}{h_2}}f(x_{i-1},y_j)^{\frac{y-y_{j-1}}{h_2}}f(x_i,y_{j-1})^{\frac{x-x_{i-1}}{h_1}}.$$

Розглянемо похибку

$$z^-_{ij}(x,y)=f(x,y)-M^-_{f,i,j}(x,y),\quad (x,y)\in D^-_{ij}.$$

Тоді

$$\left|z^-_{ij}(x,y)\right|\le\left|f(x,y)-f(x,y_{j-1})\right|+\left|f(x,y_{j-1})-f(x_{i-1},y_{j-1})\right|+$$

$$+\left|f(x_{i-1},y_{j-1})-f(x_{i-1},y_{j-1})^{\frac{x_i-x}{h_1}}f(x_{i-1},y_{j-1})^{\frac{y_{j-1}-y}{h_2}}f(x_{i-1},y_j)^{\frac{y-y_{j-1}}{h_2}}f(x_i,y_{j-1})^{\frac{x-x_{i-1}}{h_1}}\right|.$$

Оскільки

$$\left|f(x_{i-1},y_{j-1})-f(x_{i-1},y_{j-1})^{\frac{x_i-x}{h_1}}f(x_{i-1},y_{j-1})^{\frac{y_{j-1}-y}{h_2}}f(x_{i-1},y_j)^{\frac{y-y_{j-1}}{h_2}}f(x_i,y_{j-1})^{\frac{x-x_{i-1}}{h_1}}\right|=$$

$$=f(x_{i-1},y_{j-1})^{\frac{x_i-x}{h_1}}\left|f(x_{i-1},y_{j-1})^{\frac{x-x_{i-1}}{h_1}}-f(x_{i-1},y_{j-1})^{\frac{y_{j-1}-y}{h_2}}f(x_{i-1},y_j)^{\frac{y-y_{j-1}}{h_2}}f(x_i,y_{j-1})^{\frac{x-x_{i-1}}{h_1}}\right|=$$

$$=f(x_{i-1},y_{j-1})^{\frac{x_i-x}{h_1}}\Big|f(x_{i-1},y_{j-1})^{\frac{x-x_{i-1}}{h_1}}-f(x_i,y_{j-1})^{\frac{x-x_{i-1}}{h_1}}+f(x_i,y_{j-1})^{\frac{x-x_{i-1}}{h_1}}-$$

$$-f(x_{i-1},y_{j-1})^{\frac{y_{j-1}-y}{h_2}}f(x_{i-1},y_j)^{\frac{y-y_{j-1}}{h_2}}f(x_i,y_{j-1})^{\frac{x-x_{i-1}}{h_1}}\Big|\le$$

$$\le f(x_{i-1},y_{j-1})^{\frac{x_i-x}{h_1}}\left|f(x_{i-1},y_{j-1})^{\frac{x-x_{i-1}}{h_1}}-f(x_i,y_{j-1})^{\frac{x-x_{i-1}}{h_1}}\right|+$$

$$+f(x_{i-1},y_{j-1})^{\frac{x_i-x}{h_1}}f(x_i,y_{j-1})^{\frac{x-x_{i-1}}{h_1}}\left|1-f(x_{i-1},y_{j-1})^{\frac{y_{j-1}-y}{h_2}}f(x_{i-1},y_j)^{\frac{y-y_{j-1}}{h_2}}\right|=$$

$$=f(x_{i-1},y_{j-1})^{\frac{x_i-x}{h_1}}\left|f(x_{i-1},y_{j-1})^{\frac{x-x_{i-1}}{h_1}}-f(x_i,y_{j-1})^{\frac{x-x_{i-1}}{h_1}}\right|+$$

$$+f(x_{i-1},y_{j-1})^{\frac{x_i-x}{h_1}}f(x_i,y_{j-1})^{\frac{x-x_{i-1}}{h_1}}f(x_{i-1},y_{j-1})^{\frac{y_{j-1}-y}{h_2}}\left|f(x_{i-1},y_{j-1})^{\frac{y-y_{j-1}}{h_2}}-f(x_{i-1},y_j)^{\frac{y-y_{j-1}}{h_2}}\right|$$

і

$$\left|f(x,y)-f(x,y_{j-1})\right|\le L\left|y-y_{j-1}\right|,$$

$$\left|f(x,y_{j-1})-f(x_{i-1},y_{j-1})\right|\le L\left|x-x_{i-1}\right|,$$

$$\left|f(x_{i-1},y_{j-1})^{\frac{x-x_{i-1}}{h_1}}-f(x_i,y_{j-1})^{\frac{x-x_{i-1}}{h_1}}\right|\le\left|f(x_{i-1},y_{j-1})-f(x_i,y_{j-1})\right|\le L\left|x_{i-1}-x_i\right|,$$

$$\left| f(x_{i-1}, y_{j-1})^{\frac{y-y_{j-1}}{h_2}} - f(x_{i-1}, y_j)^{\frac{y-y_{j-1}}{h_2}} \right| \le \left| f(x_{i-1}, y_{j-1}) - f(x_{i-1}, y_j) \right| \le L\left| y_{j-1} - y_j \right|,$$

то врахувавши умови (2), одержимо

$$\left| z_{ij}^-(x,y) \right| \le Lh_2 + Lh_1 + MLh_1 + M^{\frac{x_i - x}{h_1} + \frac{x - x_{i-1}}{h_1}} Lh_2 = L(h_1 + h_2 + Mh_1 + Mh_2) = L(h_1 + h_2)(1+M).$$

Аналогічно для похибки

$$z_{ij}^+(x,y) = f(x,y) - M_{f,i,j}^+(x,y), \quad (x,y) \in D_{ij}^+,$$

у верхньому елементарному трикутнику одержуємо оцінку

$$\left| z_{ij}^+(x,y) \right| \le L(h_1 + h_2)(1+M),$$

де

$$M_{f,i,j}^+(x,y) = \left(f(x_{i-1}, y_j)^{h_{32}(x,y)} f(x_i, y_j)^{h_{13}(x,y)} f(x_i, y_{j-1})^{h_{21}(x,y)} \right)^{\frac{1}{h_{13}(x_i, y_j)}},$$
$$h_{32}(x,y) = h_2(x - x_i), \quad h_{13}(x,y) = -h_2(x - x_{i-1}) - h_1(y - y_j),$$
$$h_{21}(x,y) = h_1(y - y_j), \quad h_{13}(x_i, y_j) = -h_1 h_2.$$

Справді,

$$M_{f,i,j}^+(x,y) = f(x_{i-1}, y_j)^{\frac{x_i - x}{h_1}} f(x_i, y_j)^{\frac{x - x_{i-1}}{h_1}} f(x_i, y_j)^{\frac{y - y_j}{h_2}} f(x_i, y_{j-1})^{\frac{y_j - y}{h_2}}.$$

Тому

$$\left| z_{ij}^+(x,y) \right| \le \left| f(x,y) - f(x, y_{j-1}) \right| + \left| f(x, y_{j-1}) - f(x_i, y_{j-1}) \right| +$$
$$+ \left| f(x_i, y_{j-1}) - f(x_{i-1}, y_j)^{\frac{x_i - x}{h_1}} f(x_i, y_j)^{\frac{x - x_{i-1}}{h_1}} f(x_i, y_j)^{\frac{y - y_j}{h_2}} f(x_i, y_{j-1})^{\frac{y_j - y}{h_2}} \right|.$$

Оскільки

$$\left| f(x_i, y_{j-1}) - f(x_{i-1}, y_j)^{\frac{x_i - x}{h_1}} f(x_i, y_j)^{\frac{x - x_{i-1}}{h_1}} f(x_i, y_j)^{\frac{y - y_j}{h_2}} f(x_i, y_{j-1})^{\frac{y_j - y}{h_2}} \right| =$$
$$= f(x_i, y_{j-1})^{\frac{y_j - y}{h_2}} \left| f(x_i, y_{j-1})^{\frac{y - y_{j-1}}{h_2}} - f(x_{i-1}, y_j)^{\frac{x_i - x}{h_1}} f(x_i, y_j)^{\frac{x - x_{i-1}}{h_1}} f(x_i, y_j)^{\frac{y - y_j}{h_2}} \right| =$$
$$= f(x_i, y_{j-1})^{\frac{y_j - y}{h_2}} \left| f(x_i, y_{j-1})^{\frac{y - y_{j-1}}{h_2}} - f(x_i, y_j)^{\frac{y - y_{j-1}}{h_2}} + f(x_i, y_j)^{\frac{y - y_{j-1}}{h_2}} - \right.$$
$$\left. - f(x_{i-1}, y_j)^{\frac{x_i - x}{h_1}} f(x_i, y_j)^{\frac{x - x_{i-1}}{h_1}} f(x_i, y_j)^{\frac{y - y_j}{h_2}} \right| \le$$
$$\le f(x_i, y_{j-1})^{\frac{y_j - y}{h_2}} \left| f(x_i, y_{j-1})^{\frac{y - y_{j-1}}{h_2}} - f(x_i, y_j)^{\frac{y - y_{j-1}}{h_2}} \right| +$$
$$+ f(x_i, y_{j-1})^{\frac{y_j - y}{h_2}} f(x_i, y_j)^{\frac{y - y_j}{h_2}} \left| f(x_i, y_j) - f(x_{i-1}, y_j)^{\frac{x_i - x}{h_1}} f(x_i, y_j)^{\frac{x - x_{i-1}}{h_1}} \right| =$$
$$= f(x_i, y_{j-1})^{\frac{y_j - y}{h_2}} \left| f(x_i, y_{j-1})^{\frac{y - y_{j-1}}{h_2}} - f(x_i, y_j)^{\frac{y - y_{j-1}}{h_2}} \right| +$$
$$+ f(x_i, y_{j-1})^{\frac{y_j - y}{h_2}} f(x_i, y_j)^{\frac{y - y_j}{h_2}} f(x_i, y_j)^{\frac{x - x_{i-1}}{h_1}} \left| f(x_i, y_j)^{\frac{x_i - x}{h_1}} - f(x_{i-1}, y_j)^{\frac{x_i - x}{h_1}} \right|$$

і

$$\left|f(x,y)-f(x,y_{j-1})\right| \le L\left|y-y_{j-1}\right|,$$
$$\left|f(x,y_{j-1})-f(x_i,y_{j-1})\right| \le L\left|x-x_i\right|,$$
$$\left|f(x_i,y_j)^{\frac{x_i-x}{h_1}}-f(x_{i-1},y_j)^{\frac{x_i-x}{h_1}}\right| \le \left|f(x_i,y_j)-f(x_{i-1},y_j)\right| \le L\left|x_i-x_{i-1}\right|,$$
$$\left|f(x_i,y_{j-1})^{\frac{y-y_{j-1}}{h_2}}-f(x_i,y_j)^{\frac{y-y_{j-1}}{h_2}}\right| \le \left|f(x_i,y_{j-1})-f(x_i,y_j)\right| \le L\left|y_{j-1}-y_j\right|,$$

то, врахувавши умови (2), одержимо

$$\left|z_{ij}^{+}(x,y)\right| \le Lh_2+Lh_1+MLh_1+MLh_2=L(h_1+h_2+Mh_1+Mh_2)=L(h_1+h_2)(1+M).$$

Позначимо

$$M_f(x,y)=\begin{cases}M_{f,i,j}^{-}, & (x,y)\in D_{ij}^{-},\\ M_{f,i,j}^{+}, & (x,y)\in D_{ij}^{+},\end{cases}$$

де $i=1,2,\dots,p$; $j=1,2,\dots,q$, наближення функції $f(x,y)$ у всьому прямокутнику D, а через

$$z(x,y)=\begin{cases}z_{ij}^{-}, & (x,y)\in D_{ij}^{-},\\ z_{ij}^{+}, & (x,y)\in D_{ij}^{+},\end{cases}$$

де $i=1,2,\dots,p$; $j=1,2,\dots,q$, його похибку. Тоді

$$\left|f(x,y)-M_f(x,y)\right| \le 2hL(1+M),$$

де $h=\max(h_1,h_2)$. Теорему доведено.

4. ВИСНОВКИ

Ми розглянули питання точності наближення функції двох дійсних змінних некласичною мажорантою Ньютона. Доведено теорему про точність наближення функції двох дійсних змінних некласичною мажорантою Ньютона.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Цегелик Г.Г.* Апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій двох дійсних змінних, заданих таблично / Г.Г. Цегелик, Н.В. Федчишин // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1998. – Вип. 50. – С. 209-211.
2. *Цегелик Г.Г.* До побудови апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій двох дійсних змінних, заданих таблично / Г.Г. Цегелик, Н.В. Федчишин // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1999. – Вип. 52. – С. 111-116.
3. *Цегелик Г.Г.* Нова формула мажорантного типу для наближеного обчислення подвійних інтегралів / Г.Г. Цегелик, Н.В. Федчишин // Волинський матем. вісник. – 2000. – Вип. 7. С. 159-164.
4. *Глебена М.І.* Чисельний метод відшукання екстремуму негладких функцій двох дійсних змінних / М.І. Глебена , Г.Г. Цегелик // Прикладні проблеми механіки і матем. – 2007. – Вип. 5. – С. 17-21.

5. *Цегелик Г.Г.* Чисельний метод мажорантного типу відшукання абсолютного екстремуму довільних негладких функцій двох дійсних змінних / Г.Г. Цегелик, М.І. Глебена // Вісник Львів. ун-ту. Серія прикл. матем. та інформ. – 2010. – Вип. 16. – С. 63-70.

Стаття: надійшла до редколегії 15.11.2011
доопрацьована 01.12.2011
прийнята до друку 15.12.2011

О ТОЧНОСТИ АПРОКСИММАЦИИ ФУНКЦИИ ДВУХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ МАЖОРАНТОЙ НЬЮТОНА

М. Глебена[*], Н. Грипинская[**], Г. Цегелик[***]

[*]*Ужгородский национальный университет,*
ул. Подгорная, 46, Ужгород, 88000,
[**]*Хмельницкий национальный университет,*
ул. Иститутская, 11, Хмельницкий, 29016,
[***]*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,*
ул. Университетская, 1, Львов, 79000, e-mail: kafmmsep@franko.lviv.ua

Рассмотрено вопрос точности приближения функции двух действительных переменных неклассической мажорантой Ньютона.

Ключевые слова: методы оптимизации, мажоранта и диаграмма Ньютона, точность апроксимации.

THE ACCURACY OF APPROXIMATION FUNCTION OF TWO REAL VARIABLES OF NON-CLASSICAL NEWTONIAN MAJORANT

M. Hlebena[*], N. Hrypynska[**], H. Tsehelyk[***]

[*]*Uzhgorod National University,*
Pidgirna str., 46, Uzhgorod, 88000,
[**]*Khmelnitsky National University,*
Instytutska str., 11, Khmelnitskyy, 29016,
[***]*Ivan Franko National University of Lviv,*
Universytetska str, 1, Lviv, 79000, e-mail: kafmmsep@franko.lviv.ua

In the article is suggested the question of the accuracy of approximation function of two real variables of non-classical Newtonian majorant.

Key words: method of optimization, majorant and diagrams of Newton, accuracy of approximation.