УДК 519.6

Глебена М.І., к.ф.-м.н.

Чисельний метод оптимізації логарифмічно увігнутих функцій двох дійсних змінних

Ужгородський національний університет, 88000, м. Ужгород, вул. Університетська, 14
e-mail: HlebenaM@gmail.com

M.I. Hlebena, Ph.D.

Numerical method of optimization of logarithmically concave functions of two real variables

Uzhgorod National University, 88000, Uzhgorod, Universitetska str., 14
e-mail: HlebenaM@gmail.com

Розглядається задача відшукання екстремуму логарифмічно увігнутих функцій двох дійсних змінних. Пропонується новий чисельний метод, який ґрунтується на використанні апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій.

Ключові слова: методи оптимізації, мажоранта та діаграма Ньютона.

In the paper the problem of finding the extremum logarithmically concave functions of two real variables is considered. A new numerical method of zero order is proposed to solve this problem. It is based on the properties of non-classical device majorants and Newton diagrams of functions of two real variables that is defined tabular. It is no need to build majorant Newton algorithm to find the extremum, thus numerical properties inclinations and deviations Newton majorants are used. This proposed method is used to find the extrema as smooth so non-smooth logarithmically concave functions of two real variables. To select the initial approximation it is not necessary to know in which circle is the point of extremum. This method is convergent for some initial approximation and obtains a solution accurate to step value.

The advantages of the method over the classical optimization methods and their modifications are convergency (that does not depend on the choice of initial approximation), simplicity and clarity.

Key Words: method of optimization, majorant and diagram of Newton.

Статтю представив д.т.н. Волошин О.Ф.

Вступ

В [1] побудовано апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій однієї дійсної змінної, заданих таблично, який знайшов широке застосування для побудови нових чисельних методів розв'язування окремих класів задач алгебри, математичного аналізу та диференціальних рівнянь. Зокрема, його використано для розробки чисельних методів розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь і їхніх систем, точних на певних класах функцій, чисельних методів оптимізації як гладких, так і негладких функцій однієї та багатьох дійсних змінних (типу покоординатного підйому) [2].

В [3] побудовано апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій двох дійсних змінних, заданих таблично, який використано для розробки чисельного методу обчислення подвійних інтегралів, точного на певному класі функцій; деяких чисельних методів відшукання екстремуму негладких функцій двох дійсних змінних [4]. Зауважимо, що у випадку негладких функцій задача їх оптимізації в [5] розв'язується з використанням поняття субградієнта.

В даній роботі, використовуючи апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій двох дійсних змінних, заданих таблично, приводиться новий чисельний метод відшукання логарифмічно увігнутих функцій двох дійсних змінних. Основна перевага цього методу над класичними методами оптимізації та їхніми модифікаціями полягає в такому:

– збіжність методу не залежить від вибору початкового наближення;
– для роботи методу не треба знати, в якому околі знаходиться точка екстремуму;
– оптимізаційна функція може бути як гладкою, так і негладкою;
– простота та наглядність методу.

Апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій двох дійсних змінних, заданих таблично [3]

Нехай в області $D=\{a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$ визначена логарифмічно вгнута функція $f(x,y)$, яка може бути як гладкою, так і негладкою. Побудуємо в області D сітку:

$$x_i = a + ih_1,\quad i = 0,1,\ldots,n,\ h_1 = (b-a)/n,$$
$$y_j = c + jh_2,\quad j = 0,1,\ldots,m,\ h_2 = (d-c)/m.$$

Позначимо $f(x_i,y_j) = a_{ij}\quad (i = 0,1,\ldots,n;\ j = 0,1,\ldots,m).$ У просторі xyz побудуємо множину точок $P_{ij}(x_i,y_j,-\ln a_{ij})$ (точки зображень) з координатами $x = x_i,\ y = y_i,\ z = -\ln a_{ij}$ $(i = 0,1,\ldots,n;\ j = 0,1,\ldots,m)$. З кожної точки P_{ij} проведемо півпряму в додатному напрямі осі Oz, перпендикулярно до площини xy. Множину точок цих півпрямих позначимо через S, а її опуклу оболонку – через $C(S)$. Для кожної точки $(x,y)\in D$ визначимо точку $B(x,y,\kappa(x,y))$, де

$$\chi(x,y) = \inf_{(x,y,z)\in C(S)} z.$$

Множина точок $B(x,y,\chi(x,y))$, $(x,y)\in D$, утворює багатогранну поверхню δ_f, яка обмежує $C(S)$ знизу. Ця поверхня є неперервною, опуклою і її рівняння має вигляд

$$z = \chi(x,y),\quad (x,y)\in D.$$

Позначимо $M_f(x,y) = \exp(-\chi(x,y)),\quad (x,y)\in D.$

Позаяк функція $f(x,y)$ є логарифмічно вгнутою, тоді всі точки зображення P_{ij} знаходяться у вершинах діаграми Ньютона δ_f, а всі пари індексів (i,j) будуть вершинними і для кожної точки (x_i,y_j) $(i = 0,1,\ldots,n;\ j = 0,1,\ldots,m)$ виконується рівність $M_f(x_i,y_j) = a_{ij}$. Отже, апроксимуюча функція $M_f(x,y)$, $(x,y)\in D$, є некласичною мажорантою Ньютона для значень a_{ij} $(i = 0,1,\ldots,n;\ j = 0,1,\ldots,m)$, а δ_f – некласичною діаграмою Ньютона.

Величини

$$R_{ij}(x) = \left(\frac{a_{i-1,j}}{a_{ij}}\right)^{\frac{1}{h_1}}$$
$$(i = 1,2,\ldots,n;\ j = 0,1,\ldots,m;\ R_{0j} = 0)$$

і

$$R_{ij}(y) = \left(\frac{a_{i,j-1}}{a_{ij}}\right)^{\frac{1}{h_2}}$$
$$(j = 1,2,\ldots,m;\ i = 0,1,\ldots,n;\ R_{i0} = 0)$$

називатимемо (i,j)–ми числовими нахилами мажоранти Ньютона $M_f(x,y)$ відповідно в напрямку осей абсцис і ординат, а величини

$$D_{ij}(x) = \frac{R_{i+1,j}(x)}{R_{ij}(x)}$$
$$(i = 1,2,\ldots,n-1;\ j = 0,1,\ldots,m;\quad D_{0j} = D_{nj} = \infty)$$

і

$$D_{ij}(y) = \frac{R_{i,j+1}(y)}{R_{ij}(y)}$$
$$(j = 1,2,\ldots,m-1;\ i = 0,1,\ldots,n;\quad D_{i0} = D_{im} = \infty)$$

називатимемо (i,j)–ми відхиленнями мажоранти Ньютона $M_f(x,y)$ відповідно в напрямку осей Ox і Oy.

Із опуклості вниз поверхні δ_f випливають такі нерівності

$$R_{ij}(x) \le R_{i+1,j}(x)$$
$$(i = 0,1,\ldots,n-1;\ j = 0,1,\ldots,m),$$
$$R_{ij}(y) \le R_{i,j+1}(y)$$
$$(j = 0,1,\ldots,m-1;\ i = 0,1,\ldots,n),$$
$$D_{ij}(x) \ge 1\quad (i = 1,2,\ldots,n-1;\ j = 0,1,\ldots,m),$$
$$D_{ij}(y) \ge 1\quad (j = 1,2,\ldots,m-1;\ i = 0,1,\ldots,n).$$

Алгоритм методу

Спочатку зауважимо, якщо для деякої точки $(x_k,y_l)\in D$ виконуються умови:

$$R_{kl}(x) \le 1,\ R_{k+1,l}(x) \ge 1, \tag{1}$$
$$R_{kl}(y) \le 1,\ R_{k,l+1}(y) \ge 1, \tag{2}$$

то точка (x_k, y_l) з точністю $\varepsilon \le max(h_1, h_2)$ є точкою екстремуму функції $f(x,y)$.

Якщо умова (1) не виконується, то

$$R_{kl}(x) < 1,\ R_{k+1,l}(x) \le 1, \quad (3)$$

або

$$R_{kl}(x) \ge 1,\ R_{k+1,l}(x) > 1. \quad (4)$$

При невиконанні умови (2)

$$R_{kl}(y) < 1,\ R_{k,l+1}(y) \le 1, \quad (5)$$

$$R_{kl}(y) \ge 1,\ R_{k,l+1}(y) > 1. \quad (6)$$

Вибравши за початкове наближення екстремальної точки будь-яку точку $(x_k, y_l) \in D$, алгоритм методу є таким.

1. Якщо для точки (x_k, y_l) виконуються умови (1), (2), то точка (x_k, y_l) з точністю $\varepsilon \le max(h_1, h_2)$ приймається за оптимальну і на цьому робота алгоритму завершується.
2. Якщо для точки (x_k, y_l) не виконується умова (1), а виконується умова (2), то у випадку (3) знаходимо найменше значення індекса $\mu > 1$, для якого $R_{k+\mu,l}(x) > 1;$ у випадку (4) знаходимо найменше значення індекса $\nu > 1$, для якого $R_{k-\nu,l}(x) \le 1.$ Знайшовши найближчу до (x_k, y_l) точку, для якої виконується умова (1), і позначивши цю точку через (x_k, y_l), переходимо до пункту 1.
3. Якщо для точки (x_k, y_l) виконується умова (1), а не виконується умова (2), то у випадку (5) знаходимо найменше значення індекса $\mu > 1$, для якого $R_{k,l+\mu}(y) > 1;$ у випадку (6) знаходимо найменше значення індекса $\nu > 1$, для якого $R_{k,l-\nu}(x) \le 1.$ Знайшовши найближчу до (x_k, y_l) точку, для якої виконується умова (2), і позначивши цю точку через (x_k, y_l), переходимо до пункту 1.
4. Якщо для точки (x_k, y_l) умови (1), (2) не виконуються, то аналогічно як в пункті 2 знаходимо найближчу до (x_k, y_l) точку, для якої виконується умова (1). Позначивши цю точку через (x_k, y_l), аналогічно як в пункті 3 знаходимо найближчу до (x_k, y_l) точку, для якої виконується умова (2). Позначивши цю точку через (x_k, y_l), переходимо до пункту 1.

Якщо з більшою точністю треба знайти екстремальну точку, то за область D беремо окіл знайденої точки, зменшуємо кроки h_1 і h_2 і виконуємо описаний алгоритм.

Приклад

Розглянемо задачу мінімізації штрафної функції №2 [6] при $n = 2$.

$$f(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + 10^{-3}(x^2 + y^2 - 0.25)^2$$

Графік цієї функції зображено на рис.1.

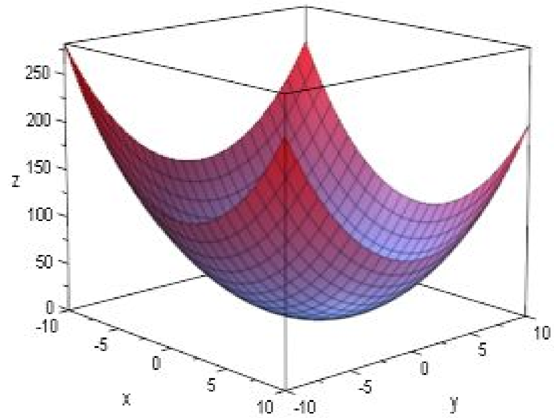

Рис.1.

Функція $f(x,y)$ є строго опуклою, тому шукатимемо максимум функції

$$-f(x,y) + 10 = -(x-1)^2 - (y-1)^2 - 10^{-3}(x^2 + y^2 - 0.25)^2 + 10,$$

оскільки $-f(x,y) + 10 > 0$ в області $D = \{-1 \le x \le 2,\ -1 \le y \le 2\}$.

Нехай $m = n = 100$, виберемо за початкове наближення точку $(x_{50}, y_{40}) = (0{,}5; 0{,}2)$. Для цієї точки виконується умова (3) та (5), застосуємо пункт 4 побудованого алгоритму. Знайдемо найменше значення індекса μ для якого $R_{50+\mu,40}(x) > 1$. Така нерівність виконується для $R_{67,40}(x) = 1{,}005727$. На наступному кроці шукаємо найменше значення індексу μ для якого $R_{67,40+\mu}(y) > 1$, в результаті чого одержуємо $R_{67,67}(y) = 1{,}005766$. Тоді точку (1,01;1,01) приймаємо за перше наближення до оптимальної.

Для уточнення одержаної точки застосуємо алгоритм у області

$D = \{0,9 \le x \le 1,1;\ 0,9 \le y \le 1,1\}$, при $m = n = 100$. Максимум розглядуваної функції досягається в точці (0,996;0,996), а її значення в цій точці дорівнює $f(x,y) = 0,003038867$.

Висновки

Запропоновано новий чисельний метод відшукання екстремуму як гладких, так і негладких логарифмічно увігнутих функцій двох дійсних змінних, в основі якого лежить використання апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій двох дійсних змінних, заданих таблично. Перевагами методу є збіжність, яка не залежить від вибору початкового наближення. Збіжнісь методу випливає із опуклості вниз діаграми Ньютона δ_f. Згідно алгоритму початкове наближення вибираємо довільним чином, а напрям руху від точки до точки вибираємо в залежності від виконання нерівностей для числових нахилів. Тобто, з будь-якої точки області, в якій шукаємо екстремум, будемо рухатись до точки екстремуму. В результаті застосування алгоритму одержимо розв'язок з точністю до величини кроку.

Список використаних джерел

1. *Цегелик Г.Г.* Теория мажорант и диаграмм Ньютона функций, заданных таблично, и ее приложение //Укр. мат. журн.- 1989.- Т.41.- №9. с.1273-1276.
2. *Цегелик Г.Г.* Апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично, та його використання в чисельному аналізі: монографія / Г.Г.Цегелик. – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2013.- 190с.
3. *Цегелик Г.Г. Федчишин Н.В.* Апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій двох дійсних змінних, заданих таблично // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1998. Вип.50. с.209-211.
4. *Глебена М.І.* Математичні моделі та числові методи мажорантного типу для аналізу дискретних оптимізаційних процесів: автореф. дис. на здобуття ступеня канд. фіз.-мат. наук спец. 01.05.02 „Математичне моделювання та обчислювальні методи" / М.І Глебена. – Івано-Франківськ, 2012. – 23с.
5. *Шор Н.З.* Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения.- К.: Наук. думка, 1979.- 199с.
6. *Koko J.* A conjugate gradient method with quasi-Newton approximation /J.Koko // Applicationes mathematicae. -2000. -№ 27. P.153-165.

References

1. *H. Tsehelyk* The theory of majorant and diagrams Newtonian functions which are given discretely and its application //Ukr. mat. journal. - 1989.- T.41.- №9. c.1273-1276.
2. *H. Tsehelyk* Apparatus of non-classical majorants and diagrams Newtonian functions which are given discretely and and its use in the numerical analysis Lviv: 2013.- P.190.
3. *H.Tsehelyk, N Fedchishin* The apparatus of non-classical majorants and Newton diagrams of functions of two real variables defined tabular. // Herald Lviv Univ. Series. mech.-mat.-1998 ed.50. p.209-211.
4. *Hlebena M.* Mathematical models and numerical methods of majorant type for analysis of discrete optimization processes: Abstract thesis for the obtaining the Candidate of Physical and Mathematical Sciences degree on the speciality 01.05.02. – mathematical modeling and computational methods. Ivano-Frankivsk, 2012. -p.23.
5. *Shor N.* Methods of minimization of nondifferentiable functions and their application. Kiev: 1979.- 199*p*.
6. *Koko J.* A conjugate gradient method with quasi-Newton approximation /J.Koko // Applicationes mathematicae. -2000. -№ 27. P.153-165.

Надійшла до редколегії 12.09.2014