УДК 519.6

М. І. Глебена (Ужгородський нац. ун-т)

ДО ПИТАННЯ ТОЧНОСТІ АПРОКСИМАЦІЇ ФУНКЦІЇ ДВОХ ДІЙСНИХ ЗМІННИХ НЕКЛАСИЧНОЮ МАЖОРАНТОЮ НЬЮТОНА

In the article is suggested the question of the accuracy of approximation function of two real variables of non-classical Newtonian majorant.

Розглянуто питання точності наближення функції двох дійсних змінних некласичною мажорантою Ньютона.

Вступ. В [1, 2] розроблено апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій двох дійсних змінних, заданих таблично. В [3] цей апарат використано для побудови формули для наближеного обчислення визначених подвійних інтегралів. В [4,5], використовуючи властивості некласичних мажорант і діаграм Ньютона, побудовано чисельні методи відшукання абсолютного екстремуму негладких логарифмічно вгнутих функцій двох дійсних змінних. В [6] розглянуто оцінку точності апроксимації двічі неперервно диференційованої і логарифмічно опуклої функції $f(x)$ визначеної на проміжку $[a,\, b]$, функцією $g_n(f;\, x)$, яка на кожному проміжку $[x_i,\, x_{i+1}]$ $(x_i \in [a,\, b],\ i = 0,\, 1, ...,\, n-1)$, збігається з некласичною мажорантою Ньютона, побудованою за значеннями функції $f(x)$ в двох точках x_i та x_{i+1}.

В даній роботі розглянуто питання точності апроксимації функції двох дійсних змінних некласичною мажорантою Ньютона.

Постановка задачі. Нехай функція двох дійсних змінних $z = f\,(x, y)$ задана своїми значеннями в точках $(x_i, y_j) \quad (i = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, m)$:

$$f\,(x_i, y_j) = z_{ij} \quad (i = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, m)\,,$$

де $x_1 < x_2 < \ldots < x_n,\ \ y_1 < y_2 < \ldots < y_m, |z_{ij}| = a_{ij} \leq M$ і $a_{11} \cdot a_{1m} \cdot a_{n1} \cdot a_{nm} \neq 0$. В просторі xyz побудуємо точки зображення $P_{ij}(x_i, y_j, -\ln a_{ij})$ $(i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, m)$ і з кожної точки P_{ij} проведемо півпряму в додатному напрямі осі Oz, перпендикулярно до площини xy. Множину точок цих півпрямих позначимо через S, а її опуклу оболонку – через $C\,(S)$. Для кожної точки $(x, y) \in R$, де $R = \{(x, y) \mid x_1 \leq x \leq x_n,\ y_1 \leq y \leq y_m\}$, визначимо точку $B\,(x, y, \kappa\,(x, y))$, де

$$\kappa\,(x, y) = \inf_{(x,y,z) \in C(S)} z\,.$$

Множина точок $B\,(x, y, \kappa\,(x, y))\,, \quad (x, y) \in R$, утворює багатогранну поверхню, яка обмежує $C\,(S)$ знизу. Ця поверхня називається некласичною діаграмою Ньютона функції $z = f(x, y)$ на R, а її рівняння $z = \kappa\,(x, y)\,, \quad (x, y) \in R$. Функція

$$M_f\,(x, y) = \exp\left(-\kappa\,(x, y)\right), \quad (x, y) \in R,$$

називається некласичною мажорантою Ньютона функції $z = f(x, y)$ на R.

В [2] знайдено явний вигляд $M_f\,(x, y)$ для функції $z = f(x, y)$, заданої своїми значеннями у вершинах трикутника Δ з вершинами $(a_1, b_1)\,, (a_2, b_2)\,, (a_3, b_3)\,.$ Якщо $f\,(a_1, b_1) = A, \quad f\,(a_2, b_2) = B, \quad f\,(a_3, b_3) = C$, то

$$M_f\left(x,y\right)=\left(\left|A\right|^{h_{32}(x,y)}\left|B\right|^{h_{13}(x,y)}\left|C\right|^{h_{21}(x,y)}\right)^{\frac{1}{h_{13}(a_2,b_2)}}, \qquad (1)$$

де

$$h_{ij}\left(x,y\right)=\begin{vmatrix} x-a_i & y-b_i \\ a_j-a_i & b_j-b_i \end{vmatrix},\left(i,j=1,2,3;\ i\neq j\right).$$

Використовуючи формулу (1), оцінимо точність наближення функції $z=f(x,y)$ некласичною мажорантою Ньютона.

Розв'язування задачі. Нехай областю, в якій треба наблизити неперервну функцію $f(x,y)$, є прямокутник

$$D=\left\{(x,y)\left|a\leq x\leq b,\ c\leq y\leq d\right.\right\}.$$

Розіб'ємо область D на прямокутники прямими $x = x_i\left(i=1,2,\ldots,p\right)$ і $y = y_j\left(j=1,2,\ldots,q\right)$, де $x_{i+1}=x_i+h_1$, $y_{j+1}=y_j+h_2$, $h_1=(b-a)/p$, $h_2=(d-c)/q$. Кожен прямокутник діагоналлю розіб'ємо на два трикутники: верхній і нижній. Якщо прямокутник утворено перетином прямих $x=x_{i-1}$, $x=x_i$ і $y=y_{j-1}, y=y_j$, то вершинами нижнього трикутника будуть точки $\left(x_{i-1},y_{j-1}\right),\left(x_{i-1},y_j\right),\left(x_i,y_{j-1}\right)$, а верхнього $\left(x_{i-1},y_j\right)$, $\left(x_i,y_j\right)$, $\left(x_i,y_{j-1}\right)$. Нижній трикутник позначимо через D_{ij}^-, а верхній – D_{ij}^+.

Теорема 1. *Якщо виконуються умови*

$$1\leq f\left(x,y\right)\leq M,\quad \forall\left(x,y\right)\in D,$$

$$\left|f\left(x_1,y_1\right)-f\left(x_2,y_2\right)\right|\leq L\left(\left|x_1-x_2\right|+\left|y_1-y_2\right|\right),\quad \forall\left(x_1,y_1\right),\left(x_2,y_2\right)\in D, \qquad (2)$$

то точність наближення функції $f(x,y)$ мажорантою Ньютона $M_f\left(x,y\right)$ визначається нерівністю

$$\left|f\left(x,y\right)-M_f\left(x,y\right)\right|\leq 2hL\left(1+M\right),$$

де $h=\max\left(h_1,h_2\right)$.

Доведення. На кожному нижньому трикутнику D_{ij}^- $\left(i=1,2,\ldots p; j=1,2,\ldots,q\right)$, використовуючи формулу (1), наблизимо функцію $f(x,y)$ некласичною мажорантою Ньютона.

$$M_{f,i,j}^-\left(x,y\right)=\left(f\left(x_{i-1},y_{j-1}\right)^{h_{32}(x,y)}f\left(x_{i-1},y_j\right)^{h_{13}(x,y)}f\left(x_i,y_{j-1}\right)^{h_{21}(x,y)}\right)^{\frac{1}{h_{13}\left(x_{i-1},y_j\right)}},\text{ де}$$

$$h_{32}\left(x,y\right)=\begin{vmatrix} x-x_i & y-y_{j-1} \\ x_{i-1}-x_i & y_j-y_{j-1} \end{vmatrix}=h_1\left(y-y_{j-1}\right)+h_2\left(x-x_i\right),$$

$$h_{13}\left(x,y\right)=\begin{vmatrix} x-x_{i-1} & y-y_{j-1} \\ x_i-x_{i-1} & y_{j-1}-y_{j-1} \end{vmatrix}=-h_1\left(y-y_{j-1}\right),$$

$$h_{21}\left(x,y\right)=\begin{vmatrix} x-x_{i-1} & y-y_j \\ x_{i-1}-x_{i-1} & y_{j-1}-y_j \end{vmatrix}=-h_2\left(x-x_{i-1}\right),$$

$$h_{13}\left(x_{i-1},y_j\right)=\begin{vmatrix} x_{i-1}-x_{i-1} & y_j-y_{j-1} \\ x_i-x_{i-1} & y_{j-1}-y_{j-1} \end{vmatrix}=-h_1h_2.$$

Отже,

$$M^{-}_{f,i,j}(x,y) = f(x_{i-1},y_{j-1})^{\frac{x_i-x}{h_1}} f(x_{i-1},y_{j-1})^{\frac{y_{j-1}-y}{h_2}} f(x_{i-1},y_j)^{\frac{y-y_{j-1}}{h_2}} f(x_i,y_{j-1})^{\frac{x-x_{i-1}}{h_1}}.$$

Розглянемо похибку

$$z^{-}_{ij}(x,y) = f(x,y) - M^{-}_{f,i,j}(x,y), \quad (x,y) \in D^{-}_{ij}.$$

Тоді

$$\left|z^{-}_{ij}(x,y)\right| \le |f(x,y) - f(x,y_{j-1})| + |f(x,y_{j-1}) - f(x_{i-1},y_{j-1})| +$$

$$+\Big|f(x_{i-1},y_{j-1}) -$$
$$- f(x_{i-1},y_{j-1})^{\frac{x_i-x}{h_1}} f(x_{i-1},y_{j-1})^{\frac{y_{j-1}-y}{h_2}} f(x_{i-1},y_j)^{\frac{y-y_{j-1}}{h_2}} f(x_i,y_{j-1})^{\frac{x-x_{i-1}}{h_1}}\Big|.$$

Оскільки

$$\Big|f(x_{i-1},y_{j-1}) -$$
$$- f(x_{i-1},y_{j-1})^{\frac{x_i-x}{h_1}} f(x_{i-1},y_{j-1})^{\frac{y_{j-1}-y}{h_2}} f(x_{i-1},y_j)^{\frac{y-y_{j-1}}{h_2}} f(x_i,y_{j-1})^{\frac{x-x_{i-1}}{h_1}}\Big| =$$

$$= f(x_{i-1},y_{j-1})^{\frac{x_i-x}{h_1}} \Big| f(x_{i-1},y_{j-1})^{\frac{x-x_{i-1}}{h_1}} -$$

$$- f(x_{i-1},y_{j-1})^{\frac{y_{j-1}-y}{h_2}} f(x_{i-1},y_j)^{\frac{y-y_{j-1}}{h_2}} f(x_i,y_{j-1})^{\frac{x-x_{i-1}}{h_1}}\Big| =$$

$$= f(x_{i-1},y_{j-1})^{\frac{x_i-x}{h_1}} \Big| f(x_{i-1},y_{j-1})^{\frac{x-x_{i-1}}{h_1}} - f(x_i,y_{j-1})^{\frac{x-x_{i-1}}{h_1}} + f(x_i,y_{j-1})^{\frac{x-x_{i-1}}{h_1}} -$$

$$- f(x_{i-1},y_{j-1})^{\frac{y_{j-1}-y}{h_2}} f(x_{i-1},y_j)^{\frac{y-y_{j-1}}{h_2}} f(x_i,y_{j-1})^{\frac{x-x_{i-1}}{h_1}}\Big| \le$$

$$\le f(x_{i-1},y_{j-1})^{\frac{x_i-x}{h_1}} \left| f(x_{i-1},y_{j-1})^{\frac{x-x_{i-1}}{h_1}} - f(x_i,y_{j-1})^{\frac{x-x_{i-1}}{h_1}} \right| +$$

$$+ f(x_{i-1},y_{j-1})^{\frac{x_i-x}{h_1}} f(x_i,y_{j-1})^{\frac{x-x_{i-1}}{h_1}} \left| 1 - f(x_{i-1},y_{j-1})^{\frac{y_{j-1}-y}{h_2}} f(x_{i-1},y_j)^{\frac{y-y_{j-1}}{h_2}} \right| =$$

$$= f(x_{i-1},y_{j-1})^{\frac{x_i-x}{h_1}} \left| f(x_{i-1},y_{j-1})^{\frac{x-x_{i-1}}{h_1}} - f(x_i,y_{j-1})^{\frac{x-x_{i-1}}{h_1}} \right| +$$

$$+ f(x_{i-1},y_{j-1})^{\frac{x_i-x}{h_1}} f(x_i,y_{j-1})^{\frac{x-x_{i-1}}{h_1}} f(x_{i-1},y_{j-1})^{\frac{y_{j-1}-y}{h_2}} \Big| f(x_{i-1},y_{j-1})^{\frac{y-y_{j-1}}{h_2}} -$$

$$\left. - f\left(x_{i-1}, y_j\right)^{\frac{y-y_{j-1}}{h_2}} \right|$$

і

$$\left|f\left(x, y\right) - f\left(x, y_{j-1}\right)\right| \leq L\left|y - y_{j-1}\right|,$$

$$\left|f\left(x, y_{j-1}\right) - f\left(x_{i-1}, y_{j-1}\right)\right| \leq L\left|x - x_{i-1}\right|,$$

$$\left|f\left(x_{i-1}, y_{j-1}\right)^{\frac{x-x_{i-1}}{h_1}} - f\left(x_i, y_{j-1}\right)^{\frac{x-x_{i-1}}{h_1}}\right| \leq \left|f\left(x_{i-1}, y_{j-1}\right) - f\left(x_i, y_{j-1}\right)\right| \leq L\left|x_{i-1} - x_i\right|,$$

$$\left|f\left(x_{i-1}, y_{j-1}\right)^{\frac{y-y_{j-1}}{h_2}} - f\left(x_{i-1}, y_j\right)^{\frac{y-y_{j-1}}{h_2}}\right| \leq \left|f\left(x_{i-1}, y_{j-1}\right) - f\left(x_{i-1}, y_j\right)\right| \leq L\left|y_{j-1} - y_j\right|,$$

то врахувавши умови (2), одержимо

$$\left|z_{ij}^{-}\left(x, y\right)\right| \leq Lh_2 + Lh_1 + MLh_1 + M^{\frac{x_i - x}{h_1} + \frac{x - x_{i-1}}{h_1}} Lh_2 =$$
$$= L\left(h_1 + h_2 + Mh_1 + Mh_2\right) = L\left(h_1 + h_2\right)\left(1 + M\right).$$

Аналогічно для похибки

$$z_{ij}^{+}\left(x, y\right) = f\left(x, y\right) - M_{f,i,j}^{+}\left(x, y\right), \quad \left(x, y\right) \in D_{ij}^{+},$$

у верхньому елементарному трикутнику одержуємо оцінку

$$\left|z_{ij}^{+}\left(x, y\right)\right| \leq L\left(h_1 + h_2\right)\left(1 + M\right),$$

де

$$M_{f,i,j}^{+}\left(x, y\right) = \left(f\left(x_{i-1}, y_j\right)^{h_{32}(x,y)} f\left(x_i, y_j\right)^{h_{13}(x,y)} f\left(x_i, y_{j-1}\right)^{h_{21}(x,y)}\right)^{\frac{1}{h_{13}\left(x_i, y_j\right)}},$$

$$h_{32}\left(x, y\right) = h_2\left(x - x_i\right), \quad h_{13}\left(x, y\right) = -h_2\left(x - x_{i-1}\right) - h_1\left(y - y_j\right),$$

$$h_{21}\left(x, y\right) = h_1\left(y - y_j\right), \quad h_{13}\left(x_i, y_j\right) = -h_1 h_2.$$

Справді,

$$M_{f,i,j}^{+}\left(x, y\right) = f\left(x_{i-1}, y_j\right)^{\frac{x_i - x}{h_1}} f\left(x_i, y_j\right)^{\frac{x - x_{i-1}}{h_1}} f\left(x_i, y_j\right)^{\frac{y - y_j}{h_2}} f\left(x_i, y_{j-1}\right)^{\frac{y_j - y}{h_2}}.$$

Тому

$$\left|z_{ij}^{+}\left(x, y\right)\right| \leq \left|f\left(x, y\right) - f\left(x, y_{j-1}\right)\right| + \left|f\left(x, y_{j-1}\right) - f\left(x_i, y_{j-1}\right)\right| +$$

$$+ \left|f\left(x_i, y_{j-1}\right) - f\left(x_{i-1}, y_j\right)^{\frac{x_i - x}{h_1}} f\left(x_i, y_j\right)^{\frac{x - x_{i-1}}{h_1}} f\left(x_i, y_j\right)^{\frac{y - y_j}{h_2}} f\left(x_i, y_{j-1}\right)^{\frac{y_j - y}{h_2}}\right|.$$

Оскільки

$$\left| f(x_i, y_{j-1}) - f(x_{i-1}, y_j)^{\frac{x_i - x}{h_1}} f(x_i, y_j)^{\frac{x - x_{i-1}}{h_1}} f(x_i, y_j)^{\frac{y - y_j}{h_2}} f(x_i, y_{j-1})^{\frac{y_j - y}{h_2}} \right| =$$

$$= f(x_i, y_{j-1})^{\frac{y_j - y}{h_2}} \left| f(x_i, y_{j-1})^{\frac{y - y_{j-1}}{h_2}} - f(x_{i-1}, y_j)^{\frac{x_i - x}{h_1}} f(x_i, y_j)^{\frac{x - x_{i-1}}{h_1}} f(x_i, y_j)^{\frac{y - y_j}{h_2}} \right| =$$

$$= f(x_i, y_{j-1})^{\frac{y_j - y}{h_2}} \left| f(x_i, y_{j-1})^{\frac{y - y_{j-1}}{h_2}} - f(x_i, y_j)^{\frac{y - y_{j-1}}{h_2}} + f(x_i, y_j)^{\frac{y - y_{j-1}}{h_2}} - \right.$$

$$\left. - f(x_{i-1}, y_j)^{\frac{x_i - x}{h_1}} f(x_i, y_j)^{\frac{x - x_{i-1}}{h_1}} f(x_i, y_j)^{\frac{y - y_j}{h_2}} \right| \leq$$

$$\leq f(x_i, y_{j-1})^{\frac{y_j - y}{h_2}} \left| f(x_i, y_{j-1})^{\frac{y - y_{j-1}}{h_2}} - f(x_i, y_j)^{\frac{y - y_{j-1}}{h_2}} \right| +$$

$$+ f(x_i, y_{j-1})^{\frac{y_j - y}{h_2}} f(x_i, y_j)^{\frac{y - y_j}{h_2}} \left| f(x_i, y_j) - f(x_{i-1}, y_j)^{\frac{x_i - x}{h_1}} f(x_i, y_j)^{\frac{x - x_{i-1}}{h_1}} \right| =$$

$$= f(x_i, y_{j-1})^{\frac{y_j - y}{h_2}} \left| f(x_i, y_{j-1})^{\frac{y - y_{j-1}}{h_2}} - f(x_i, y_j)^{\frac{y - y_{j-1}}{h_2}} \right| +$$

$$+ f(x_i, y_{j-1})^{\frac{y_j - y}{h_2}} f(x_i, y_j)^{\frac{y - y_j}{h_2}} f(x_i, y_j)^{\frac{x - x_{i-1}}{h_1}} \left| f(x_i, y_j)^{\frac{x_i - x}{h_1}} - f(x_{i-1}, y_j)^{\frac{x_i - x}{h_1}} \right|$$

і

$$|f(x, y) - f(x, y_{j-1})| \leq L |y - y_{j-1}|,$$

$$|f(x, y_{j-1}) - f(x_i, y_{j-1})| \leq L |x - x_i|,$$

$$\left| f(x_i, y_j)^{\frac{x_i - x}{h_1}} - f(x_{i-1}, y_j)^{\frac{x_i - x}{h_1}} \right| \leq |f(x_i, y_j) - f(x_{i-1}, y_j)| \leq L |x_i - x_{i-1}|,$$

$$\left| f(x_i, y_{j-1})^{\frac{y - y_{j-1}}{h_2}} - f(x_i, y_j)^{\frac{y - y_{j-1}}{h_2}} \right| \leq |f(x_i, y_{j-1}) - f(x_i, y_j)| \leq L |y_{j-1} - y_j|,$$

то, врахувавши умови (2), одержимо

$$\left| z_{ij}^{+}(x, y) \right| \leq L h_2 + L h_1 + M L h_1 + M L h_2 =$$

$$= L(h_1 + h_2 + M h_1 + M h_2) = L(h_1 + h_2)(1 + M).$$

Позначимо

$$M_f\left(x,y\right)=\begin{cases} M^-_{f,i,j}, & (x,y)\in D^-_{ij}, \\ M^+_{f,i,j}, & (x,y)\in D^+_{ij}, \end{cases}$$

де $i=1,2,\ldots,p;\ j=1,2,\ldots,q$, наближення функції $f(x,y)$ у всьому прямокутнику D, а через

$$z\left(x,y\right)=\begin{cases} z^-_{ij}, & (x,y)\in D^-_{ij}, \\ z^+_{ij}, & (x,y)\in D^+_{ij}, \end{cases}$$

де $i=1,2,\ldots,p;\ j=1,2,\ldots,q$, його похибку. Тоді

$$\left|f\left(x,y\right)-M_f\left(x,y\right)\right|\le 2hL\left(1+M\right),$$

де $h=\max\left(h_1,h_2\right)$.

Висновки. В даній роботі розглянуто питання точності наближення функції двох дійсних змінних некласичною мажорантою Ньютона. Доведено теорему про точність наближення функції двох дійсних змінних некласичною мажорантою Ньютона.

1. *Цегелик Г. Г.* Апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій двох дійсних змінних, заданих таблично / Г.Г. Цегелик, Н.В.Федчишин // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. -1998. -Вип.50. С.209-211.
2. *Цегелик Г. Г.* До побудови апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій двох дійсних змінних, заданих таблично / Г.Г. Цегелик, Н.В.Федчишин // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. -1999. -Вип.52. С.111-116.
3. *Цегелик Г. Г.* Нова формула мажорантного типу для наближеного обчислення подвійних інтегралів / Г.Г. Цегелик, Н.В.Федчишин // Волинський матем. вісник. -2000. -Вип.7. С.159-164.
4. *Глебена М. І.*Чисельний метод відшукання екстремуму негладких функцій двох дійсних змінних. / М.І.Глебена, Г.Г.Цегелик // Наук. зб. "Прикладні проблеми механіки і математики". –2007. –Вип. 5.– С. 17–21.
5. *Цегелик Г. Г.* Чисельний метод мажорантного типу відшукання абсолютного екстремуму довільних негладких функцій двох дійсних змінних / Г.Г. Цегелик, М.І.Глебена // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. мат. та інформат. –2010. –Вип.16. –С.63–70.
6. *Глебена М. І.* Про точність деяких чисельних методів, одержаних внаслідок апроксимації функцій некласичною мажорантою Ньютона / М.І.Глебена, Г.Г.Цегелик // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2012.– Вип. 23 №.2 С. 31-34.

Одержано 17.04.2014