УДК 517.9

І. І. Король (Ужгородський нац. ун-т)

ІСНУВАННЯ ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ДВОВИМІРНИХ АВТОНОМНИХ ІМПУЛЬСНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ СИСТЕМ

In this paper the problems of existence of periodic solutions of linear two-dimensional impulsive autonomous systems are under investigation. The possible periods of discontinuous cycles were found and the coefficient conditions for the existence of periodic solutions for such periods were obtained.

У даній роботі досліджуються питання існування періодичних розв'язків лінійних двовимірних імпульсних автономних систем. Знайдено можливі періоди розривних циклів, одержано коефіцієнтні умови існування періодичних розв'язків для таких періодів.

З'ясуємо питання існування розривних циклів двовимірної лінійної автономної імпульсної системи

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax + f \quad \langle a, x\rangle \neq 0, \\ \Delta x|_{\langle a,x\rangle=0} = Bx + g, \end{cases} \tag{1}$$

де $a, f, g \in \mathbb{R}^2$ – задані сталі вектори, $a = (a_1, a_2)$, $a_1, a_2 \neq 0$, A, B — задані сталі матриці.

Спочатку дослідимо поведінку розв'язків відповідної однорідної системи

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax, \quad \langle a, x\rangle \neq 0, \\ \Delta x|_{\langle a,x\rangle=0} = Bx, \end{cases} \tag{2}$$

Будемо вважати, що всі нетривіальні розв'язки автономної системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

перетинають пряму $\langle a, x\rangle = 0$ трансверсально, тобто виконується умова

$$\langle a, Ax\rangle \neq 0.$$

З цього випливає, що існують $x \in \mathbb{R}^2$ такі, що

$$\langle (A^\top - \lambda E)a, x\rangle \neq 0,$$

тобто вектор a не є власним вектором матриці A.

Щодо імпульсного збурення, то за умовою воно відбувається на прямій

$$l: \ x_2 = -\frac{a_1}{a_2}x_1. \tag{3}$$

Це означає, що потрапивши на цю пряму в момент $t = t^*$, $\langle a, x(t^*)\rangle = 0$, точка $x(t^*)$ в результаті імпульсної дії миттєво переводиться в точку $x(t^*) = (\mathbb{E} + B)x(t^*)$ цієї ж прямої. Отже, матриця B така, що

$$\langle a, Bx\rangle = 0 \tag{4}$$

при всіх x для яких виконується умова $\langle a, x\rangle = 0$. Звідси одержуємо систему

$$\begin{cases} x_2 = -\frac{a_1}{a_2}x_1, \\ a_1\left(b_{11}x_1 + b_{12}x_2\right) + a_2\left(b_{21}x_1 + b_{22}x_2\right) = 0, \end{cases}$$

з якої випливає, що

$$b_{22} = b_{11} - \frac{a_1}{a_2}b_{12} + \frac{a_2}{a_1}b_{21},$$

тобто матриця B має наступний вигляд:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{11} + \frac{a_2}{a_1}b_{21} - \frac{a_1}{a_2}b_{12} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

1. Існування розривних циклів однорідної системи Дослідимо питання існування періодичних розривних розв'язків системи (2) та їх відсутності в цієї системи. Міркуємо так: якщо система (2) має такий розв'язок, то його траєкторія повинна потрапляти на пряму (3). Нехай точка $x^{(0)}$,

$$\langle a, x^{(0)}\rangle = 0, \tag{6}$$

є породжуючою точкою такого розв'язку $x(t, x^{(0)})$. Тоді, вийшовши з прямої (3) при $t = 0$, через деякий час розв'язок $x(t, x^{(0)})$ знову повинен потрапити на неї, тобто система рівнянь

$$\begin{cases} \langle a, x^{(0)}\rangle = 0, \\ \left\langle a, e^{At}x^{(0)}\right\rangle = 0, \end{cases} \tag{7}$$

повинна мати розв'язок $(x^{(0)}, t^*)$, $t^* > 0$. Вона рівносильна системі

$$\begin{cases} \langle a, x^{(0)}\rangle = 0, \\ \left\langle \left(\left(e^{At}\right)^\top - e^{\lambda t}E\right)a, x^{(0)}\right\rangle = 0, \end{cases}$$

а тому будемо вимагати, щоб вектор a був власним вектором матриці $\left(e^{At^*}\right)^\top$, який відповідає деякому власному числу $e^{\lambda t^*}$.

Таким чином, стосовно системи (2) будемо припускати, що виконуються наступні умови:

A) дійсний вектор a не є власним вектором матриці A;

B) a є власним вектором матриці $\left(e^{At^*}\right)^\top$ при деякому $t^* > 0$;

C) a є власним вектором матриці $B^\top$ вигляду (5).

Позначимо через J дійсну жорданову форму матриці A, тоді

$$\det\left(\left(e^{At^*}\right)^\top - e^{\lambda t^*}E\right) = \det\left(\left(e^{Jt^*}\right)^\top - e^{\lambda t^*}E\right),$$

тобто власні значення матриць $\left(e^{At^*}\right)^\top$ і $\left(e^{Jt^*}\right)^\top$ співпадають.

Якщо матриця A має комплексно спряжені власні значення $\lambda = \alpha \pm i\beta$, тоді дійсні власні значення матриці e^{Jt^*} визначаються з рівняння

$$\begin{vmatrix} e^{\alpha t^*}\cos\beta t^* - \lambda & e^{\alpha t^*}\sin\beta t^* \\ -e^{\alpha t^*}\sin\beta t^* & e^{\alpha t^*}\cos\beta t^* - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

тобто

$$\left(\lambda - e^{\alpha t^*}\cos\beta t^*\right)^2 + e^{2\alpha t^*}\sin\beta t^* = 0.$$

Це рівняння має дійсні розв'язки тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{cases} \lambda = e^{\alpha t^*}\cos\beta t^*, \\ \sin\beta t^* = 0. \end{cases}$$

Враховуючи, що $t^* > 0$ є моментом першого потрапляння на пряму (3), розв'язками цієї системи є

$$\begin{cases} \lambda_2 = e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}, \\ t^* = \frac{\pi}{\beta}, \end{cases} \qquad \cup \qquad \begin{cases} \lambda_2 = e^{\frac{2\alpha\pi}{\beta}}, \\ t^* = \frac{2\pi}{\beta}. \end{cases} \tag{8}$$

Таким чином, дійсними власними значеннями матриці e^{Jt^*} є $e^{\lambda t^*}$, якщо λ є дійсним власним значенням матриці A, або ж дійсні власні значення вигляду (8), які відповідають парі комплексно спряжених чисел $\lambda = \alpha \pm i\beta$ матриці A. Матриці $A^\top$ і $\left(e^{At}\right)^\top$ мають однакові дійсні матриці перетворення подібності, стовпцями яких є дійсні власні вектори матриці A, а тому якщо її власні значення є дійсними, то власні вектори матриці $A^\top$ є і власними векторами матриці $\left(e^{At^*}\right)^\top$. Оскільки з умови трансверсальності випливає, що a не є власним вектором матриці A, то a не є і власним вектором матриці $\left(e^{At^*}\right)^\top$. Це означає, що $t^* > 0$ може бути розв'язком системи (7) тільки у випадку, що відповідає комплексним власним числам матриці A, тобто систему (7) можемо записати наступним чином:

$$\begin{cases} \langle a, x^{(0)}\rangle = 0, \\ \left\langle a, -e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}} x^{(0)}\right\rangle = 0, \end{cases} \qquad \cup \qquad \begin{cases} \langle a, x^{(0)}\rangle = 0, \\ \left\langle a, -e^{\frac{2\alpha\pi}{\beta}} x^{(0)}\right\rangle = 0. \end{cases}$$

З цього випливає, що система (2) може мати періодичні розв'язки тільки з періодом кратним $T_1 = \frac{\pi}{\beta}$, тобто коли матриця A має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \beta \neq 0. \tag{9}$$

Розглянемо можливість існування в системі (2) розривних циклів періоду $T_1 = \frac{\pi}{\beta}$. Такі рухи відбуваються наступним чином: точка $x^{(0)}$ прямої l в результаті імпульсного збурення переходить у точку $x^{(1)} = (E+B)x^{(0)}$ тієї ж прямої, а потім через час T_1 повертається в початкове положення (мал. 1). Це означає, що виконується система рівнянь

$$\begin{cases} \langle a, x^{(0)}\rangle = 0, \\ -e^{\alpha\frac{\pi}{\beta}}(E+B)x^{(0)} = x^{(0)}. \end{cases} \tag{10}$$

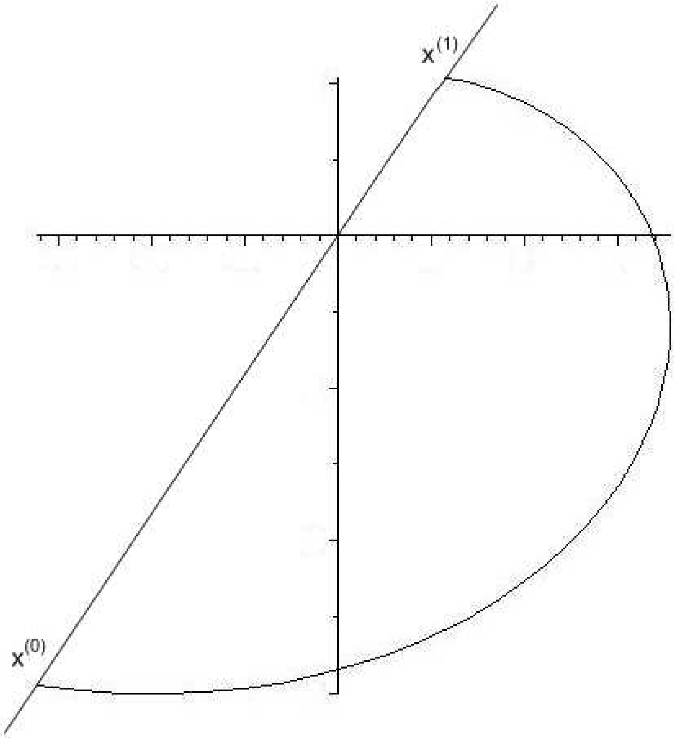

Рис. 1. T_1-періодичний розривний цикл.

Розглянемо друге рівняння цієї системи, яке запишемо у вигляді

$$(E-F)x^{(0)}=0, \tag{11}$$

де

$$F=-e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}(E+B)=\begin{pmatrix} -e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}(1+b_{11}) & -e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}b_{12} \\ -e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}b_{21} & -e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}\left(1+b_{11}-\frac{a_1}{a_2}b_{12}+\frac{a_2}{a_1}b_{21}\right) \end{pmatrix}.$$

Оскільки

$$\det(E-F)=-\left(1+e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}\left(1+b_{11}+\frac{a_2}{a_1}b_{21}\right)\right)\left(e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}\left(\frac{a_1}{a_2}b_{12}-b_{11}-1\right)-1\right),$$

то рівняння (11) може мати нетривіальні розв'язки у двох випадках: якщо

$$e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}\left(1+b_{11}-\frac{a_1}{a_2}b_{12}\right)=-1, \tag{12}$$

або

$$e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}\left(1+b_{11}+\frac{a_2}{a_1}b_{21}\right)=-1. \tag{13}$$

Якщо виконується умова (12), то розв'язок $x^{(0)}=(-a_2,a_1)$ рівняння (11) задовольняє також і рівняння $\langle a,x^{(0)}\rangle=0$. Якщо ж має місце умова (13), то розв'язком рівняння (11) є $x^{(0)}=(a_1b_{12},a_2b_{21})$, але при цьому перше рівняння системи (10) не виконується.

Розглянемо $T_2 = \frac{2\pi}{\beta}$-періодичні рухи системи (2), які не є T_1-періодичними (мал. 2). Вони відбуваються за наступною траєкторією: точка $x^{(0)}$ прямої l в результаті імпульсного збурення переводиться у точку $x^{(1)} = (E+B)x^{(0)}$; далі по фазовій кривій вона проходить за час $T_1 = \frac{\pi}{\beta}$ у точку $x^{(2)} = e^{AT_1}x^{(1)}$ прямої l, з якої миттєво переводиться в точку $x^{(3)} = (E+B)x^{(2)}$; далі знову за час $T_1 = \frac{\pi}{\beta}$ в точку $x^{(0)}$, в якій траєкторія замикається. Підсумовуючи вище описаний рух, можемо записати:

$$x^{(0)} = e^{AT_1}x^{(3)} = e^{AT_1}(E+B)x^{(2)} = e^{AT_1}(E+B)e^{AT_1}x^{(1)} = \left(e^{AT_1}(E+B)\right)^2 x^{(0)}.$$

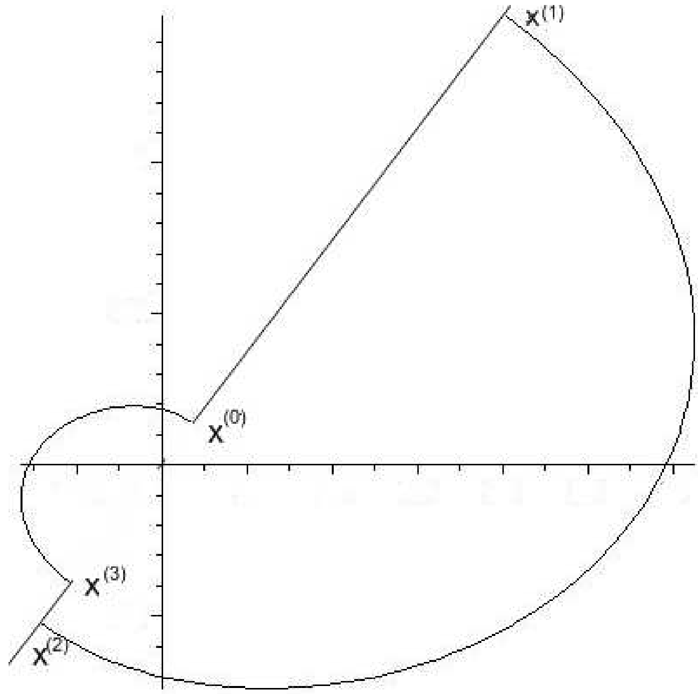

Рис. 2. Траєкторія розв'язку з найменшим періодом T_2.

Таким чином, замкнена розривна T_2-періодична траєкторія проходить через точку $x^{(0)}$, яка є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} \langle a, x^{(0)} \rangle = 0, \\ (E - F^2)\, x^{(0)} = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Система (2) може мати T_2-періодичні розривні цикли відмінні від T_1-періодичних, якщо

$$\begin{cases} \det(E-F) \neq 0, \\ \det(E+F) = 0, \end{cases}$$

і при цьому перевірка показує, що система (14) має розв'язки тільки у випадку коли виконується співвідношення

$$e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}} \left(1 + b_{11} - \frac{a_1}{a_2} b_{12}\right) = 1. \tag{15}$$

Нарешті, дослідимо питання існування розривних циклів однорідної системи (2) з періодами відмінними від T_1 і T_2. Аналогічно до того, як це було зроблено вище, можемо переконатися, що замкнена траєкторія, системи (1), (18), яка проходить через точку $x^{(0)} \neq (0,0)$, має період $T_m = \frac{\pi m}{\beta}$ тоді і тільки тоді, коли $x^{(0)}$ є розв'язком системи

$$\begin{cases} \langle a, x^{(0)} \rangle = 0, \\ (E - F^m)x^{(0)} = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Розглянемо питання існування розв'язків другого рівняння системи (16):

$$(E - F^m)x^{(0)} = 0. \tag{17}$$

За індукцією одержуємо рівності

$$E - F^{2l+1} = (E - F)(E + F + F^2 + \cdots + F^{2l}),$$
$$E - F^{2l+2} = (E - F^2)(E + F + F^2 + \cdots + F^{2l})$$

Для існування відмінних від T_1- і T_2-періодичних розривних циклів необхідно існування нетривіальних розв'язків рівняння

$$(E + F + F^2 + \cdot + F^{2l})x_0 = 0.$$

Позначимо через J жорданову нормальну форму матриці F, а через S — матрицю переходу до жорданового базису, тоді

$$det\left(\sum_{j=0}^{k} F^j\right) = \det S^{-1} \det\left(\sum_{j=0}^{k} J^j\right) \det S = det\left(\sum_{j=0}^{k} J^j\right),$$

Нехай власні значення матриці F дійсні. Якщо $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ то

$$J^j = \begin{pmatrix} \lambda_1^j & 0 \\ 0 & \lambda_2^j \end{pmatrix}, \quad \det\left(\sum_{j=0}^{k} J^j\right) = \det\left(\sum_{j=0}^{k} \lambda_1^j\right)\left(\sum_{j=0}^{k} \lambda_2^j\right).$$

Якщо $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ то

$$J^j = \begin{pmatrix} \lambda^j & j\lambda^{j-1} \\ 0 & \lambda^j \end{pmatrix}, \quad \det\left(\sum_{j=0}^{k} J^j\right) = \det\left(\sum_{j=0}^{k} \lambda^{2j}\right).$$

Якщо $\lambda \in \mathbb{R}$, то $\sum\limits_{j=0}^{k} \lambda^j \neq 0$, отже

$$det\left(\sum_{j=0}^{2l} F^j\right) \neq 0, \quad \det\left(\sum_{j=0}^{2l} F^{2j}\right) \neq 0,$$

а це означає, що однорідна імпульсна система не може бути в цьому випадку розривних циклів відмінних від T_1- і T_2-періодичних.

Нехай $\lambda = \alpha_F + i\beta_F$, $i^2 = -1$ є власним значенням матриці F. Оскільки $\det(E - F^m) = \det(E - J^m)$, то рівняння (17) може мати нетривіальні розв'язки тоді і тільки тоді, коли $\lambda^m = 1$. Розв'язками такого рівняння є

$$\lambda_l = \cos\frac{2\pi l}{m} + i\sin\frac{2\pi l}{m}, \quad l = 0, 1, \cdot, m-1.$$

Отже, якщо існують $m \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}$, $l \in [1, m-1]$ такі, що

$$\begin{cases} \alpha_F = \cos\frac{2\pi l}{m}, \\ \beta_F = \sin\frac{2\pi l}{m}, \end{cases}$$

рівняння (17) має нетривіальні розв'язки.

Узагальнюючи наведені вище міркування одержуємо наступне твердження щодо існування періодичних розривних циклів однорідної системи (2), (5).

Теорема 1. *1) Система* (2), (5) *має періодичні розривні цикли тоді і тільки тоді, коли матриця A має вигляд* (9)*;*

2) Система (2), (5), (9) *має $T_1 = \frac{\pi}{\beta}$-періодичні розривні цикли тоді і тільки тоді, коли виконується умова* (12)*. При цьому всі точки прямої $x_2 = -\frac{a_1}{a_2}x_1$ є їх породжуючими точками.*

3) Система (2), (5), (9) *має $T_2 = \frac{2\pi}{\beta}$-періодичні розривні цикли, відмінні від T_1-періодичних тоді і тільки тоді, коли виконується умова* (15)*. При цьому всі точки прямої $x_2 = -\frac{a_1}{a_2}x_1$ є їх породжуючими точками.*

4) Якщо власні значення матриці F дійсні, то лінійна однорідна автономна імпульсна система (2), (5), (9) *не має розривних циклів відмінних від T_1- і T_2-періодичних.*

5) Якщо $\lambda = \alpha_F + i\beta_F$ є комплексним власним значенням матриці F, то для існування розривних циклів періоду $T_m = \frac{\pi m}{\beta_F}$ системи (2), (5), (9) *необхідно, щоб*

$$\frac{m}{2\pi}\arccos\alpha_F = \frac{m}{2\pi}\arcsin\beta_F = k,$$

де $k \in \mathbb{N}$, і достатньо, щоб нетривіальний розв'язок рівняння (17) *задовольняв умову $\langle a, x^{(x_0)}\rangle = 0$.*

Лінійні неоднорідні імпульсні системи Дослідимо питання існування періодичних рухів неоднорідної системи (1), де

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{11} + \frac{a_2}{a_1}b_{21} - \frac{a_1}{a_2}b_{12} \end{pmatrix}, \quad \langle a, f\rangle = \langle a, g\rangle = 0. \quad (18)$$

Спочатку розглянемо T_1-періодичні рухи системи (1), (18). Вони відбуваються наступним чином: точка $x^{(0)}$ прямої l в результаті імпульсного збурення переходить у точку $x^{(1)} = (E+B)x^{(0)} + g$, яка рухається далі за законом

$$x(t) = e^{At}x^{(1)} + \int\limits_0^t e^{A(t-s)}ds \cdot f,$$

і за час T_1 повертається в точку $x^{(2)} = x(T_1) = x^{(0)}$. Отже,

$$x^{(2)} = e^{AT_1}x^{(1)} + e^{AT_1}\int\limits_0^{T_1} e^{-As}ds\cdot f = -e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}x^{(1)} - \left(e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}+1\right)A^{-1}f =$$
$$= -e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}\left((E+B)x^{(0)}+g\right) - \left(e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}+1\right)A^{-1}f =$$
$$= Fx^{(0)} - \left(e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}g + \left(e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}+1\right)A^{-1}f\right).$$

Таким чином, точка $x^{(0)}$ є породжуючою точкою T_1-періодичного розривного циклу тоді і тільки тоді, коли $x^{(0)}$ є розв'язком системи

$$\begin{cases} \langle a, x^{(0)}\rangle = 0, \\ (E-F)x^{(0)} = r, \end{cases} \tag{19}$$

де

$$r = -\left(e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}g + \left(e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}+1\right)A^{-1}f\right).$$

З умови $\langle a, f\rangle = \langle a, g\rangle = 0$ випливає, що

$$f = k_f\begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1\end{pmatrix}, \qquad g = k_g\begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1\end{pmatrix},$$

де k_f, k_g — дійсні сталі, а тому

$$r = -\begin{pmatrix} e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}a_2k_g + \frac{\left(e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}+1\right)(a_2\alpha+a_1\beta)k_f}{\alpha^2+\beta^2} \\ -e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}a_1k_g + \frac{\left(e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}+1\right)(a_2\beta-a_1\alpha)k_f}{\alpha^2+\beta^2}\end{pmatrix} = -\overline{r}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2\end{pmatrix} - \widehat{r}\begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1\end{pmatrix},$$

де

$$\overline{r} = \frac{\left(e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}+1\right)\beta k_f}{\alpha^2+\beta^2}, \qquad \widehat{r} = e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}k_g + \frac{\left(e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}+1\right)\alpha k_f}{\alpha^2+\beta^2}.$$

Дослідимо питання сумісності системи (19). При цьому, в залежності від співвідношень між параметрами системи (1), можливі декілька варіантів.

1. Якщо $\det(E-F) \neq 0$, тоді друге рівняння системи (19) має єдиний розв'язок

$$x^{(0)} = -(E-F)^{-1}r.$$

При цьому

$$\langle a, x^{(0)}\rangle = -\langle a, (E-F)^{-1}r\rangle = \frac{(a_1^2+a_2^2)\left(e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}+1\right)\beta k_f}{(\alpha^2+\beta^2)\left(1+e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}\left(1+b_{11}+\frac{a_2}{a_1}b_{21}\right)\right)},$$

Отже, система (19) сумісна тоді і тільки тоді, коли $k_f = 0$, тобто $f = 0$, і при цьому лінійна неоднорідна система (1) має єдиний розривний T_1-періодичний цикл, породжуючою точкою якого є

$$x^{(0)} = \frac{e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}}{1 + e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}\left(1 + b_{11} - \frac{a_1}{a_2}b_{12}\right)}\, g. \tag{20}$$

2. Нехай виконуються співвідношення

$$e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}\left(1 + b_{11} - \frac{a_1}{a_2}b_{12}\right) = -1, \qquad e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}\left(1 + b_{11} + \frac{a_2}{a_1}b_{21}\right) \neq -1, \tag{21}$$

тобто $\det(E - F) = 0$, $a_1^2 b_{12} + a_2^2 b_{21} \neq 0$, і відповідна однорідна система (2) має однопараметричну сім'ю T_1-періодичних розривних циклів. Виражаючи з (21) значення b_{11} і підставляючи в матрицю F одержимо, що

$$F = F_1 = \begin{pmatrix} 1 - e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}\frac{a_1}{a_2}b_{12} & -e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}b_{12} \\ -e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}b_{21} & 1 - e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}\frac{a_2}{a_1}b_{21} \end{pmatrix}, \quad E - F_1 = \begin{pmatrix} e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}\frac{a_1}{a_2}b_{12} & e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}b_{12} \\ e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}b_{21} & e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}\frac{a_2}{a_1}b_{21} \end{pmatrix},$$

а ортопроектори до матриць $(E - F_1)$ і $(E - F_1)^\top$ мають відповідно вигляд

$$P_{(E-F_1)} = \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix}, \qquad P_{(E-F_1)^\top} = \begin{pmatrix} a_2 b_{21} \\ -a_1 b_{12} \end{pmatrix}.$$

Для сумісності системи $(E - F_1)x^{(0)} = r$ необхідно і достатньо виконання рівності

$$P_{(E-F_1)^\top} \cdot r = 0,$$

і при цьому розв'язок має вигляд

$$\begin{aligned} x^{(0)} &= P_{(E-F_1)} \cdot c + (E - F_1)^+ r = \\ &= \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix} c - \frac{a_1 a_2}{e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}(a_1^2 + a_2^2)(a_1^2 b_{12}^2 + a_2^2 b_{21}^2)}\Big((a_1^2 b_{12} + a_2^2 b_{21})\overline{r} + a_1 a_2 (b_{12} - b_{21})\widehat{r}\Big)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{22}$$

де $(E - F_1)^+$ — єдина матриця псевдообернена за Муром-Пенроузом [2, 3] до матриці $(E - F_1)$. Точка $x^{(0)}$ є породжуючою для розривного циклу, якщо виконується умова (6). Підставляючи (22) у (6) одержимо, що

$$\langle a, x^{(0)} \rangle = \frac{a_1 a_2}{e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}(a_1^2 b_{12}^2 + a_2^2 b_{21}^2)}\Big((a_1^2 b_{12} + a_2^2 b_{21})\overline{r} + a_1 a_2 (b_{12} - b_{21})\widehat{r}\Big).$$

Таким чином, якщо виконується умова (12) то система (19) сумісна тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{cases} a_1 a_2 (b_{21} - b_{12})\overline{r} + (a_1^2 b_{12} + a_2^2 b_{21})\widehat{r} = 0, \\ (a_1^2 b_{12} + a_2^2 b_{21})\overline{r} + a_1 a_2 (b_{12} - b_{21})\widehat{r} = 0. \end{cases} \tag{23}$$

З (21) випливає, що $b_{12}, b_{21} \neq 0$, а отже, розглядаючи (23) як лінійну однорідну алгебраїчну систему відносно $\overline{r}$ і $\widehat{r}$, бачимо, що вона не має нетривіальних розв'язків. Таким чином, у разі виконання умови (21) лінійна неоднорідна система (1) не має розривних T_1-періодичних циклів.

3. Розглянемо випадок, коли виконується умова (13), але не виконується умова (12):

$$e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}\left(1+b_{11}-\frac{a_1}{a_2}b_{12}\right)\neq -1, \qquad e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}\left(1+b_{11}+\frac{a_2}{a_1}b_{21}\right)=-1, \tag{24}$$

тобто $\det(E-F)=0$, але розв'язки системи $(E-F)x^{(0)}=0$ не ортогональні вектору a, а отже лінійна однорідна імпульсна система (2) не має розривних циклів періоду T_1.

Підставляючи значення b_{11} з (13), одержимо, що

$$F=F_2=\begin{pmatrix} 1+e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}\frac{a_2}{a_1}b_{21} & -e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}b_{12} \\ -e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}b_{21} & 1+e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}\frac{a_1}{a_2}b_{12}\end{pmatrix}, \quad E-F_2=\begin{pmatrix} -e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}\frac{a_2}{a_1}b_{21} & e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}b_{12} \\ e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}b_{21} & -e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}\frac{a_1}{a_2}b_{12}\end{pmatrix},$$

а ортопроекторами є відповідно

$$P_{(E-F_2)}=\begin{pmatrix} a_1b_{12} \\ a_2b_{21}\end{pmatrix}, \qquad P_{(E-F_2)^\top}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2\end{pmatrix}.$$

Умовою сумісності системи

$$(E-F_2)x^{(0)}=r \tag{25}$$

є умова

$$P_{(E-F_2)^\top}\cdot r=0,$$

Безпосередня перевірка показує, що вона виконується якщо $\overline{r}=0$, тобто коли $f=0$. У цьому випадку

$$r=-\begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1\end{pmatrix}e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}k_g,$$

і розв'язки системи (25) утворюють однопараметричну сім'ю:

$$x^{(0)}=P_{(E-F_2)}\cdot c+(E-F_2)^{+}r. \tag{26}$$

Для того, щоб $x^{(0)}$ вигляду (26) була породжуючою точкою розривного циклу потрібно щоб виконувалася умова (6), тобто

$$\langle a, P_{(E-F_2)}\rangle c+\langle a,(E-F_2)^{+}r\rangle=0.$$

Оскільки з (24) випливає, що $a_1^2b_{12}+a_2^2b_{21}\neq 0$, то остання рівність завжди має єдиний розв'язок

$$c=\frac{a_1^2a_2^2(b_{12}-b_{21})k_g}{(a_1^2b_{12}+a_2^2b_{21})(a_1^2b_{12}^2+a_2^2b_{21}^2)}.$$

Підставляючи його в (26) знайдемо породжуючу точку єдиного розривного T_1-періодичного розривного циклу:

$$x^{(0)}=\frac{a_1a_2k_g}{a_1^2b_{12}^2+a_2^2b_{21}^2}\left(\frac{a_1a_2(b_{12}-b_{21})}{a_1^2b_{12}+a_2^2b_{21}}\begin{pmatrix} a_1b_{12} \\ a_2b_{21}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_2b_{21} \\ -a_1b_{12}\end{pmatrix}\right). \tag{27}$$

4. Розглянемо випадок, коли виконуються одночасно і умова (12), і умова (13). З цього випливає, що $a_1^2 b_{12} + a_2^2 b_{21} = 0$ і

$$F = F_3 = \begin{pmatrix} 1 - e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}} \frac{a_1}{a_2} b_{12} & -e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}} b_{12} \\ e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}} \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 b_{12} & 1 + e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}} \frac{a_1}{a_2} b_{12} \end{pmatrix}, \quad E - F_3 = \begin{pmatrix} e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}} \frac{a_1}{a_2} b_{12} & e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}} b_{12} \\ -e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}} \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 b_{12} & -e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}} \frac{a_1}{a_2} b_{12} \end{pmatrix}.$$

Якщо при цьому $b_{12} = b_{21} = 0$, то $(E - F_3)$ є нуль-матрицею і (25) не має розв'язків при $r \neq 0$.

Якщо $b_{12}, b_{21} \neq 0$, то

$$P_{(E-F_3)} = \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix}, \qquad P_{(E-F_3)^\top} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

Підставляючи $F = F_3$ в систему (19) одержуємо, що система (19) несумісна при довільних $r \neq 0$. Таким чином, при одночасному виконанні умов (12) і (13) неоднорідна автономна імпульсна система (1) не має T_1-періодичних розривних циклів.

Узагальнюючи наведені вище міркування, можемо сформулювати наступне твердження.

Теорема 2. *1) Якщо* $\det(E - F) \neq 0$ *і* $f = 0$, *тоді* $\forall g$, $\langle a, g\rangle = 0$ *лінійна неоднорідна система* (1), (18) *має єдиний розривний* T_1*-періодичний цикл, породжуючою точкою якого є* (20).

2) Якщо виконується умова (24), *тоді* $\forall f, g$, $\langle a, f\rangle = \langle a, g\rangle = 0$ *лінійна неоднорідна система* (1), (18) *має єдиний розривний* T_1*-періодичний цикл, породжуючою точкою якого є точка* $x^{(0)}$ *вигляду* (27).

3) У всіх інших випадках неоднорідна автономна імпульсна система (1) *не має* T_1*-періодичних розривних циклів ні при яких* f, g, $\langle a, f\rangle = \langle a, g\rangle = 0$.

Розглянемо тепер періодичні рухи з найменшим періодом T_2 системи (1), (18), які зображено на мал. 2. При цьому маємо:

$$x^{(0)} = e^{A(T_2 - T_1)} x^{(3)} + \int\limits_{T_1}^{T_2} e^{A(T_2 - s)} ds \cdot f = -e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}} x^{(3)} - \left(e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}} + 1\right) A^{-1} f =$$
$$= -e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}} \left((E + B) x^{(2)} + c\right) - \left(e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}} + 1\right) A^{-1} f =$$
$$= F x^{(2)} - \left(e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}} c + \left(e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}} + 1\right) A^{-1} f\right) =$$
$$= F\left(F x^{(0)} - \left(e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}} c + \left(e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}} + 1\right) A^{-1} f\right)\right) - \left(e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}} c + \left(e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}} + 1\right) A^{-1} f\right) =$$
$$= F^2 x^{(0)} - (E + F)\left(e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}} c + \left(e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}} + 1\right) A^{-1} f\right) = x^{(0)}.$$

Отже, $x^{(0)}$ задовольняє рівняння

$$(E - F^2) x^{(0)} = (E + F) r. \tag{28}$$

Точка $x^{(0)}$ є породжуючою точкою T_2-періодичного розривного циклу тоді і тільки тоді, коли виконується система рівнянь

$$\begin{cases} \langle a, x^{(0)} \rangle = 0, \\ (E+F)\Big((E-F)x^{(0)} - r\Big) = 0. \end{cases} \tag{29}$$

Якщо $\det(E+F) \neq 0$, тобто відповідна однорідна система (2) не має T_2-періодичних розривних циклів, то з (28) одержуємо рівняння (19), тобто справедливе наступне твердження.

Лема 1. *Якщо* $\det(E+F) \neq 0$*, то система* (1)*,* (18) *не має* T_2*-періодичних розривних циклів, відмінних від* T_1*-періодичних.*

Таким чином, для того, щоб система (2) мала T_2-періодичні розривні цикли, які відмінні від T_1-періодичних, необхідно, щоб матриця $(E+F)$ була виродженою. Розглянемо спочатку випадки, коли

$$\begin{cases} \det(E+F) = 0, \\ \det(E-F) \neq 0. \end{cases} \tag{30}$$

При цьому друге рівняння системи (29) має розв'язки тоді і тільки тоді, коли

$$(E-F)x^{(0)} - r = P_{(E+F)} \cdot c,$$

де c — довільна стала. Отже, якщо (30) виконується, то (29) еквівалентна умові

$$\langle a, (E-F)^{-1}\Big(P_{(E+F)} \cdot c + r\Big)\rangle = 0. \tag{31}$$

Якщо цю рівність можна розв'язати відносно сталої c, то система (1) має T_2-періодичні розривні цикли, породжуючими точками яких є

$$x^{(0)} = (E-F)^{-1}\Big(P_{(E+F)} \cdot c + r\Big). \tag{32}$$

Система (30) має місце коли хоча б одне власне значення матриці F рівне одиниці, і, одночасно, інше відмінне від -1. Розглянемо три можливі такі випадки.

1. Нехай коефіцієнти системи (1) задовольняють умову

$$\begin{cases} e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}\left(1 + b_{11} + \frac{a_2}{a_1}b_{21}\right) = 1, \\ e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}\left(1 + b_{11} - \frac{a_1}{a_2}b_{12}\right) \neq \pm 1. \end{cases} \tag{33}$$

У цьому випадку

$$F = F_4 = \begin{pmatrix} e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}\frac{a_2}{a_1}b_{21} - 1 & -e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}b_{12} \\ -e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}b_{21} & e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}\frac{a_1}{a_2}b_{12} - 1 \end{pmatrix}, \quad P_{(E+F_4)} = \begin{pmatrix} a_1 b_{12} \\ a_2 b_{21} \end{pmatrix},$$

$$(E-F_4)^{-1} = \frac{a_1 a_2}{4a_1 a_2 - 2e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}(a_1^2 b_{12} + a_2^2 b_{21})}\begin{pmatrix} 2 - e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}\frac{a_1}{a_2}b_{12} & -e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}b_{12} \\ -e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}b_{21} & 2 - e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}\frac{a_2}{a_1}b_{21} \end{pmatrix}.$$

Підставляючи в (31) одержуємо рівняння

$$(a_1^2 b_{12} + a_2^2 b_{21})c = (a_1^2 + a_2^2)\overline{r}.$$

З (33) випливає, що $(a_1^2 b_{12} + a_2^2 b_{21}) \neq 0$, а отже остання рівність має єдиний розв'язок, підставляючи який в (32) одержуємо породжуючу точку єдиного T_2-періодичного розривного циклу системи (1):

$$x^{(0)} = (E - F_4)^{-1}\left(\left(\left(\begin{pmatrix} a_1 b_{12} \\ a_2 b_{21} \end{pmatrix} \frac{a_1^2 + a_2^2}{a)1^2 b_{12} + a_2^2 b_{21}} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a2 \end{pmatrix}\right)\overline{r} - \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}\widehat{r}\right). \qquad (34)$$

2. Нехай виконуються співвідношення

$$\begin{cases} e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}\left(1 + b_{11} - \frac{a_1}{a_2} b_{12}\right) = 1, \\ e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}\left(1 + b_{11} + \frac{a_2}{a_1} b_{21}\right) \neq \pm 1. \end{cases} \qquad (35)$$

При цьому

$$F = F_5 = \begin{pmatrix} -e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}} \frac{a_1}{a_2} b_{12} - 1 & -e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}} b_{12} \\ -e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}} b_{21} & -e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}} \frac{a_2}{a_1} b_{21} - 1 \end{pmatrix}, \quad P_{(E+F_5)} = \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix},$$

$$(E - F_5)^{-1} = \frac{a_1 a_2}{4a_1 a_2 + 2e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}(a_1^2 b_{12} + a_2^2 b_{21})} \begin{pmatrix} 2 + e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}} \frac{a_2}{a_1} b_{21} & -e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}} b_{12} \\ -e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}} b_{21} & 2 + e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}} \frac{a_1}{a_2} b_{12} \end{pmatrix}.$$

При підстановці в (31) одержуємо, що

$$\frac{a_1 a_2 (a_1^2 + a_2^2)}{2a_1 a_2 + e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}(a_2^2 b_{21} + a_1^2 b_{12})}\,\overline{r} = 0.$$

Очевидно, що у цьому випадку рівність (31) сумісна тільки при $f = 0$ і при цьому має безліч розв'язків, а, відповідно, система (1) має однопараметричну сім'ю T_2-періодичних розривних циклів (мал.4).

3. Розглянемо випадок, коли

$$\begin{cases} e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}\left(1 + b_{11} - \frac{a_1}{a_2} b_{12}\right) = 1, \\ e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}\left(1 + b_{11} + \frac{a_2}{a_1} b_{21}\right) = 1. \end{cases} \qquad (36)$$

З (36) маємо, що $a_1^2 b_{12} + a_2^2 b_{21} = 0$ і

$$F = F_6 = \begin{pmatrix} -e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}} \frac{a_1}{a_2} b_{12} - 1 & -e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}} b_{12} \\ e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}} \frac{a_1^2}{a_2^2} b_{12} & e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}} \frac{a_1}{a_2} b_{12} - 1 \end{pmatrix}, \quad P_{(E+F_6)} = \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix},$$

$$(E - F_6)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{a_1}{4a_2} e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}} b_{12} & -\frac{1}{4} e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}} b_{12} \\ \frac{a_1^2}{4a_2^2} e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}} b_{12} & \frac{1}{2} + \frac{a_1}{4a_2} e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}} b_{12} \end{pmatrix}.$$

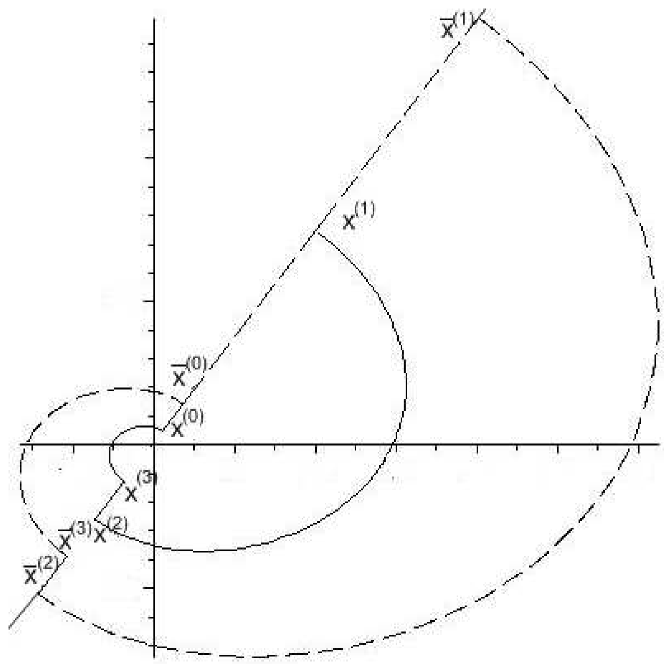

Рис. 3. Траєкторія розв'язку з найменшим періодом T_2.

Обчислення показують, що якщо $b_{12}, b_{21} \neq 0$, то

$$\langle a, x^{(0)} \rangle = -\frac{a_1^2 + a_2^2}{2}\overline{r},$$

тобто, як і в попередньому випадку, система (1) має T_2-періодичні розривні цикли тільки при $f = 0$ і при цьому всі точки прямої $x_2 = -\frac{a_1}{a_2}x_1$ є їх породжуючими точками.

Якщо виконуються умови (36) і $b_{12} = b_{21} = 0$, тоді $(E + F_6)$ є нуль-матрицею, $(E - F_6) = 2E$, і при підстановці в (31) одержуємо, що

$$\frac{1}{2}(a_1c_1 + a_2c_2) - \frac{a_1^2 + a_2^2}{2}\overline{r} = 0,$$

де c_1, c_2 — довільні сталі. Зрозуміло, що при довільних значеннях f і g, $\langle a, f \rangle = \langle a, g \rangle = 0$ рівність (31) має безліч розв'язків.

Нехай тепер і матриця $(E + F)$, і матриця $(E - F)$ є виродженими. Це можливо тоді, коли одне власне значення матриці F рівне 1, а інше — рівне -1. Розглянемо обидва такі можливі випадки.

4. Нехай виконуються умови

$$\begin{cases} e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}\left(1 + b_{11} + \frac{a_2}{a_1}b_{21}\right) = 1, \\ e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}\left(1 + b_{11} - \frac{a_1}{a_2}b_{12}\right) = -1. \end{cases} \tag{37}$$

Тоді $(E - F^2) = 0$ і з (28) випливає, що

$$\left(2a_1a_2 - (a_1^2 + a_2^2)e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}b_{12}\right)\overline{r} + 2a_2^2\widehat{r} = 0 \tag{38}$$

Якщо (38) виконується, то (28) виконується при довільному $x^{(0)}$, а в протилежному випадку (28) не сумісна.

5. Розглянемо останній можливий випадок — якщо мають місце співвідношення

$$\begin{cases} e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}\left(1+b_{11}-\frac{a_1}{a_2}b_{12}\right)=-1, \\ e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}\left(1+b_{11}+\frac{a_2}{a_1}b_{21}\right)=1. \end{cases} \tag{39}$$

Перевірка показує, що $(E-F^2)=0$, а права частина рівності (28) рівна нулю тільки якщо $\overline{r}=0$.

Підсумовуючи наведені вище міркування одержуємо наступне твердження.

Теорема 3. *1) Якщо виконуються умови* (33)*, тоді при довільних f, g, $\langle a,f\rangle=\langle a,g\rangle=0$ система* (1), (18) *має єдиний T_2-періодичний розривний цикл, а його породжуючою точкою є $x^{(0)}$ вигляду* (34)*.*

2) Всі точки прямої $x_2=-\frac{a_1}{a_2}x_1$ є породжуючими точками T_2-періодичних розривних циклів системи (1), (18)*, якщо виконається одна з наступних умов:*

2.1) Якщо справджуються співвідношення (35) *і $f=0$;*

2.2) Якщо мають місце співвідношення (36)*, і $f=0$;*

2.3) Якщо коефіцієнти системи (1) *задовольняють співвідношення* (37) *і*

$$\left(2a_1a_2-(a_1^2+a_2^2)e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}b_{12}\right)\frac{(e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}+1)\beta k_f}{\alpha^2+\beta^2}+2a_2^2\left(e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}k_g+\frac{(e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}+1)\alpha k_f}{\alpha^2+\beta^2}\right)=0;$$

2.4) Якщо виконуються співвідношення (39)*, $b_{12}\neq 0$, $b_{21}\neq 0$ і $f=0$;*

2.5) Якщо виконуються співвідношення (39) *і $b_{12}=b_{21}=0$;*

3) У всіх інших випадках система (1) *не має T_2-періодичних розривних циклів ні при яких f, g, $\langle a,f\rangle=\langle a,g\rangle=0$.*

1. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.– К.: Вища школа, 1987.–288с.
2. *Перестюк Н.А., Плотников В.А., Самойленко А.М., Скрипник Н.В.* Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью. — К.: Ин-т математики НАН Украины, 2007. – 428 с.
3. *Penrose R.* A Generalized Inverse for Matrices // Proc.Cambridge Philos.Soc., 1955. — **55**, 3. — P.406–413.

Одержано ..2010