УДК 517.946

В. В. Маринець, О. Ю. Питьовка (Ужгородський національний університет, Мукачівський державний університет)

ПРО КРАЙОВУ ЗАДАЧУ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО - ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

A boundary-value problem for nonlinear functional differential equations explores using the built modification of two-sides method.

За допомогою побудованої модифікації двостороннього методу досліджується крайова задача для нелінійних диференціально - функціональних рівнянь.

У роботах $[1, 2]$ досліджуються крайові задачі для квазілінійних рівнянь другого порядку гіперболічного типу, коли область відшукання розв'язку розглядуваної задачі обмежена "вільними" кривими та характеристиками заданого диференціального рівняння [3].

Дана робота узагальнює і поширює одержані результати в $[1, 2]$ на випадок нелінійних диференціально - функціональних рівнянь гіперболічного типу.

Постановка задачі та основні позначення.

Розглянемо диференціально - функціональне рівняння вигляду

$$D^{(1.1)}u(x,y) = f(x,\ y,\ u(x,y),\ D^{(1.0)}u(x,y),\ D^{(0.1)}u(x,y),\ u(\tau_1(x,y),y),$$
$$u(x,\tau_2(x,y))) := f[u(x,y)],\quad f:\overline{B}\to\mathbb{R},\ \overline{B}\subset\mathbb{R}^7, \tag{1}$$

де $(x,y)\in D = D_1\cup D_2$, $D_1 = \{(x,y)\,|\,x\in(x_0,x_1],\ y\in(g(x),y_2]\}$, $D_2 = \{(x,y)|$ $x\in(x_1,x_2],\ y\in(y_1,y_2]\}$, $x_0<x_1<x_2$, $y_0<y_1<y_2$, $y=g(x)$ — "вільна" крива, $g'(x)>0$, $x\in[x_0,x_1]$, $g'(x_1)=0$, $y_i=g(x_i)$, $i=0,1$, $\Pi p_{xOy}\overline{B}=\overline{D}$, $\tau_1(x,y)=x-\tau(x,y)$, $\tau_2(x,y)=y-\theta(x,y)$, а $\tau(x,y)\ge 0$, $\theta(x,y)\ge 0$ — відомі функції з простору $C(\overline{D})$, які визначають початкові множини

$$\overline{E}_\tau = \left\{(\overline{x},y)\,|\,x-\tau(x,y)\le\overline{x}\le x_0,\ (x,y)\in\overline{D}\right\},$$

$$\overline{E}_{1,\theta} = \left\{(x,\overline{y})\,|\,y-\theta(x,y)\le\overline{y}\le g(x),\ (x,y)\in\overline{D}_1\right\},$$

$$\overline{E}_{2,\theta} = \left\{(x,\overline{y})\,|\,y-\theta(x,y)\le\overline{y}\le y_1,\ (x,y)\in\overline{D}_2\right\}.$$

Нехай

$$u(x,y)\,|_{\overline{E}_\tau} = \Psi(x,y),\quad u(x,y)\,|_{\overline{E}_{1,\theta}} = \Phi_1(x,y), \tag{2}$$

$$u(x,y)\,|_{\overline{E}_{2,\theta}} = \Phi_2(x,y), \tag{3}$$

де $\Psi(x,y)\in C^1(\overline{E}_\tau)$, $\Phi_s(x,y)\in C^1(\overline{E}_{s,\theta})$, $s=1,2$ — задані функції, причому виконуються умови

$$\Psi(x_0,y_0) = \Phi_1(x_0,y_0), \tag{4}$$

$$\Phi_1(x_1,y) = \Phi_2(x_1,y),\ (x_1,y)\in\overline{E}_{1,\theta}\cap\overline{E}_{2,\theta} \tag{5}$$

Позначимо

$$\Psi(x_1,y)=\psi(y),\ \Phi_1(x,g(x))=\varphi(x),\ x\in[x_0,x_1],\ y\in[y_0,y_2],$$

$$\Phi_2(x,y_1)=\omega(x),\ x\in[x_1,x_2].$$

Тоді із (5) випливає, що

$$\varphi(x_0)=\psi(y_0),\ \omega(x_1)=\varphi(x_1). \tag{6}$$

Постановка задачі: в просторі функцій $C^*(\overline{D}) := C^{(1.1)}(D)\cap C(\overline{D})$ знайти розв'язок диференціально–функціонального рівняння (1), який задовольняє умови (2) — (6).

Розв'язок задачі (1) — (6) $u(x,y)=u_s(x,y)$, $(x,y)\in\overline{D}_s$, $s=1,2$, де $u_1(x,y)$ — розв'язок задачі Дарбу (1), (2), (4) — (6) при $(x,y)\in\overline{D}_1$, а $u_2(x,y)$ — розв'язок задачі Гурса (1), (3), (5) і $u_2(x_1,y)=u_1(x_1,y)$, $(x,y)\in\overline{D}_2$.

Надалі будемо вважати, що $f[u(x,y)]\in C(\overline{B})$ і має кусково–неперервну частинну похідну першого порядку по $D^{(1.0)}u(x,y)$ в області $\overline{B}$ $\big(f[u(x,y)]\in C_{D^{(1.0)}u(x,y)}(\overline{B})\big)$, а

$$\varphi'(x_1)=\omega(x_1). \tag{7}$$

Тоді задачу (1) — (7) можна подати в еквівалентній інтегральній формі

$$u_1(x,y)=\begin{cases}\Psi(x,y),\ (x,y)\in\overline{E}_\tau;\ \Phi_1(x,y),\ (x,y)\in\overline{E}_{1,\theta},\\ \psi(y)-\psi(g(x))+\varphi(x)+T_1f[u_1(\xi,\eta)],\ (x,y)\in\overline{D}_1,\end{cases}$$

$$T_1f[u_1(\xi,\eta)] := \int_{x_0}^{x}\int_{g(x)}^{y} f[u_1(\xi,\eta)]d\eta d\xi,\ (x,y)\in\overline{D}_1,$$

$$u_2(x,y)=\begin{cases}\Phi_2(x,y),\ (x,y)\in\overline{E}_{2,\theta};\ \Psi(x,y),\ (x,y)\in\overline{E}_\tau,\ y\in[y_1,y_2],\\ \omega(x)-\varphi(x_1)+u_1(x_1,y)+T_2f[u_2(\xi,\eta)],\ (x,y)\in\overline{D}_2,\end{cases} \tag{8}$$

$$T_2f[u_2(\xi,\eta)] := \int_{x_1}^{x}\int_{y_1}^{y} f[u_2(\xi,\eta)]d\eta d\xi,\ (x,y)\in\overline{D}_2.$$

Згідно постановки задачі (1) — (7) $u_1(x_1,y)=u_2(x_1,y)$ і $D^{(0.1)}u_1(x_1,y)=D^{(0.1)}u_2(x_1,y)$ при $y\in[y_1,y_2]$, а оскільки $(x_1-\tau(x_1,y),y)\in\overline{D}_1$, тобто $u_2(\tau_1(x_1,y),y)=u_1(\tau_1(x_1,y),y)$, то, враховуючи (7), на підставі теореми Лагранжа в області $\overline{B}$ маємо

$$D^{(1.0)}\left[u_1(x,y)-u_2(x,y)\right]\big|_{x=x_1}=\int_{y_1}^{y}\frac{\partial\widetilde{f}\,[u(x_1,\eta)]}{\partial D^{(1.0)}u(x_1,\eta)}D^{(1.0)}\left[u_1(x,\eta)-u_2(x,\eta)\right]_{x=x_1}d\eta,$$

звідки $D^{(1.0)}u_1(x_1,y)\equiv D^{(1.0)}u_2(x_1,y)$, $y\in[y_1,y_2]$.

Отже, справедлива наступна

Лема 1. *Якщо $f[u(x,y)]\in C_{D^{(1.0)}u(x,y)}(\overline{B})$ і розв'язок задачі (1) — (7) існує, то він належить простору $C^*(\overline{D})$.*

Зауважимо, якщо ввести нову невідому функцію

$$U(x,y)=\begin{cases}u(x,y)-\Phi(x,y),\ \ (x,y)\in\overline{E}_\theta,\\ u(x,y)-\Psi(x,y),\ \ (x,y)\in\overline{E}_\tau,\\ u(x,y),\ \ (x,y)\in\overline{D},\end{cases}$$

$\Phi(x,y) = \Phi_s(x,y)$, $(x,y) \in \overline{E}_{s,\theta}$, $s = 1,2$, $\overline{E}_\theta = \overline{E}_{1,\theta} \cup \overline{E}_{2,\theta}$, то задача (1) — (7) зводиться до аналогічної задачі з однорідними крайовими умовами. Тому, не зменшуючи загальності майбутніх міркувань, будемо вважати, що

$$\Psi(x,y)\mid_{\overline{E}_\tau} = \Phi(x,y)\mid_{\overline{E}_\theta} = 0.$$

Нехай права частина рівняння (1) не залежить від $D^{(1.0)}u(x,y)$ і $f[u(x,y)] \in C_1(\overline{B})$, де
$C_1(\overline{B})$ — простір функцій, які задовольняють наступні умови:

1) $f[u(x,y)] \in C(\overline{B})$,

2) в просторі вектор–функцій $C(\overline{B}_1)$, $\overline{B}_1 \subset \mathbb{R}^{10}$, $\Pi p_{xOy}\overline{B}_1 = \overline{D}$, існує така вектор–функція $H[u(x,y),v(x,y)] := H(x,y,\, u(x,y),\, D^{(0.1)}u(x,y),$ $u(\tau_1(x,y),y),\, u(x,\tau_2(x,y));\, v(x,y),\, D^{(0.1)}v(x,y),\, v(\tau_1(x,y),y),\, v(x,\tau_2(x,y)))$, що $H[u(x,y);\, u(x,y)] \equiv f[u(x,y)]$ і для довільних з простору $C^*(\overline{D})$ двох пар функцій $u_s(x,y)$, $v_s(x,y) \in \overline{B}_1$, $s = 1,2$, які задовольняють умови $D^{(0.i)}u_s(x,y) \le D^{(0.i)}v_s(x,y)$, $i = 0,1$, $s = 1,2$, $(x,y) \in \overline{D}$, в області $\overline{B}_1$ виконується нерівність [4]

$$H[u_1(x,y);v_2(x,y)] \le H[v_1(x,y);u_2(x,y)],\ (x,y) \in \overline{D}, \tag{9}$$

3) функція $H[u(x,y);v(x,y)]$ в області $\overline{B}_1$ задовольняє умову Ліпшіца, тобто, для всяких $u_s(x,y)$, $v_s(x,y) \in C^*(\overline{D})$, які належать $\overline{B}_1$, виконується нерівність

$$|H[u_1(x,y);v_1(x,y)] - H[u_2(x,y);v_2(x,y)]| \le\ L(|u_1(x,y) - u_2(x,y)| +$$

$$+|v_1(x,y) - v_2(x,y)| + \left|D^{(0.1)}(u_1(x,y) - u_2(x,y))\right| +$$

$$+\left|D^{(0.1)}(v_1(x,y) - v_2(x,y))\right| + |u_1(\tau_1(x,y),y) - u_2(\tau_1(x,y),y)| +$$

$$+|v_1(\tau_1(x,y),y) - v_2(\tau_1(x,y),y)| + |u_1(x,\tau_2(x,y)) - u_2(x,\tau_2(x,y))| +$$

$$+|v_1(x,\tau_2(x,y)) - v_2(x,\tau_2(x,y))|),$$

де L — стала Ліпшіца.

Очевидно, якщо $f[u(x,y)] \in C(\overline{B})$ і має обмежені частинні похідні першого порядку по всім своїм аргументам, розпочинаючи з третього, то завжди $f[u(x,y)] \in C_1(\overline{B})$.

Встановимо достатні умови існування та єдиності розв'язку задачі (1) — (7) в просторі функцій $C^*(\overline{D})$.

Нехай $z_{p,s}(x,y)$, $v_{p,s}(x,y) \in C^*(\overline{D})$ належать області $\overline{B}_1$, $p \in \mathbb{N}$.

Введемо позначення:

$$F_s^p(x,y) := H[z_{p,s}(x,y); v_{p,s}(x,y)],\ F_{p,s}(x,y) := H[v_{p,s}(x,y); z_{p,s}(x,y)],$$

$$\alpha_{p,s}(x,y) := z_{p,s}(x,y) - z_{p,s-1}(x_1,y) - T_s F_s^p(\xi,\eta),$$

$$\beta_{p,s}(x,y) := v_{p,s}(x,y) - v_{p,s-1}(x_1,y) - T_s F_{p,s}(\xi,\eta), \qquad (10)$$

$$w_{p,s}(x,y) := z_{p,s}(x,y) - v_{p,s}(x,y),\ (x,y) \in \overline{D}_s,\ s=1,2,$$

$$z_{p,0}(x_1,y) = v_{p,0}(x_1,y) = 0,\ \text{для всяких}\ p \in \mathbb{N},\ y \in [y_0,y_2].$$

Монотонний двосторонній метод наближеного інтегрування задачі (1) — (7)

Побудуємо послідовності функцій $\{z_{p,s}(x,y)\}$ та $\{v_{p,s}(x,y)\}$ згідно формул

$$z_{p+1,s}(x,y) = \begin{cases} 0,\ (x,y) \in \overline{E}_{s,\theta} \cup \overline{E}_\tau, \\ z_{p+1,s-1}(x_1,y) + T_s F_s^p(\xi,\eta),\ (x,y) \in \overline{D}_s,\ s=1,2, \end{cases}$$

$$v_{p+1,s}(x,y) = \begin{cases} 0,\ (x,y) \in \overline{E}_{s,\theta} \cup \overline{E}_\tau, \\ v_{p+1,s-1}(x_1,y) + T_s F_{p,s}(\xi,\eta),\ (x,y) \in \overline{D}_s,\ s=1,2, \end{cases} \qquad (11)$$

де за нульове наближення $z_{0,s}(x,y),\ v_{0,s}(x,y) \in \overline{B}_1$ вибираємо довільні функції з простору $C^*(\overline{D}_s)$, $s=1,2$, які задовольняють умови (2), (3) і

$$D^{(0.i)} w_{0,s}(x,y) \ge 0,\ \ D^{(0.i)} \alpha_{0,s}(x,y) \ge 0,\ \ D^{(0.i)} \beta_{0,s}(x,y) \le 0, \quad (x,y) \in \overline{D}_s,\ s=1,2,\ i=0,1. \qquad (12)$$

Надалі такі функції називатимемо функціями порівняння задачі (1) — (7).

Очевидно $z_{p,s}(x,y) = v_{p,s}(x,y) = 0$ при $(x,y) \in \overline{E}_\tau \cup \overline{E}_\theta$ для всіх $p \in \mathbb{N}$, а якщо $z_{0,1}(x,y) = M(x-x_0)(y-g(x))$, $v_{0,1}(x,y) = m(x-x_0)(y-g(x))$, $z_{0,2}(x,y) = z_{0,1}(x_1,y) + M(x-x_1)(y-y_1)$, $v_{0,2}(x,y) = v_{0,1}(x_1,y) + m(x-x_1)(y-y_1)$, $(x,y) \in \overline{D}_s$, $s=1,2$, $M = \sup\limits_{\overline{B}_1} H[u(x,y); v(x,y)]$, $m = \inf\limits_{\overline{B}_1} H[u(x,y); v(x,y)]$, належать області $\overline{B}_1$, то їх можна взяти за функції порівняння [5].

Із (10), (11) маємо:

$$z_{p,s}(x,y) - z_{p+1,s}(x,y) = \alpha_{p,s}(x,y) + z_{p,s-1}(x_1,y) - z_{p+1,s-1}(x_1,y),$$

$$v_{p,s}(x,y) - v_{p+1,s}(x,y) = \beta_{p,s}(x,y) + v_{p,s-1}(x_1,y) - v_{p+1,s-1}(x_1,y), \qquad (13)$$

$$w_{p+1,s}(x,y) = w_{p+1,s-1}(x_1,y) + T_s(F_s^p(\xi,\eta) - F_{p,s}(\xi,\eta)),$$

$$(x,y) \in \overline{D}_s,\ s=1,2. \qquad (14)$$

$$\alpha_{p+1,s}(x,y) = T_s(F_s^p(\xi,\eta) - F_s^{p+1}(\xi,\eta)),$$

$$\beta_{p+1,s}(x,y) = T_s(F_{p,s}(\xi,\eta) - F_{p+1,s}(\xi,\eta)), \qquad (15)$$

$$(x,y) \in \overline{D}_s,\ s=1,2.$$

Враховуючи умови (9), (12) із (13) — (15) методом математичної індукції переконуємось у справедливості нерівностей

$$D^{(0.i)}v_{p,s}(x,y) \le D^{(0.i)}v_{p+1,s}(x,y) \le D^{(0.i)}z_{p+1,s}(x,y) \le D^{(0.i)}z_{p,s}(x,y)$$
$$\alpha_{p,s}(x,y) \ge 0,\ \beta_{p,s}(x,y) \le 0,\ (x,y) \in \overline{D}_s,\ s = 1,2,\ i = 0,1, \tag{16}$$

для всяких $p \in \mathbb{N}$, тобто, якщо існують в області $\overline{B}_1$ функції порівняння задачі (1) — (7), тоді і функції $z_{p,s}(x,y)$, $v_{p,s}(x,y)$, побудовані згідно (11), також належать $\overline{B}_1$.

Покажемо, що побудовані згідно закону (11), (12) послідовності функцій $\left\{D^{(0.i)}z_{p,s}(x,y)\right\}$, $\left\{D^{(0.i)}v_{p,s}(x,y)\right\}$ збігаються в області $\overline{D}_s$, $s = 1,2$ рівномірно при $p \to \infty$ до однієї і тієї ж границі. В силу нерівностей (16), для цього достатньо показати, що $\lim\limits_{p\to\infty} D^{(0.i)}w_{p,s}(x,y) = 0$, $s = 1,2$, $i = 0,1$.

Нехай

$$q = \sup\left\{1, \max_{\overline{D}}(x - x_0 + y - y_0)\right\},$$
$$d_0 = \sup_{s,i}\left\{\max_{\overline{D}_s}\left|D^{(0.i)}w_{0,s}(x,y)\right|, \max_{\overline{D}_s}\left|w_{0,s}(\tau_1(x,y),y)\right|, \max_{\overline{D}_s}\left|w_{0,s}(x,\tau_2(x,y))\right|\right\}.$$

Тоді із (14) методом математичної індукції легко переконатись у справедливості оцінок

$$\sup_{s,i}\max_{\overline{D}_s}\left|D^{(0.i)}w_{p,s}(x,y)\right| \le \frac{[8Lq(x - x_0 + y - y_0)]^p}{p!}\,d_0 \tag{17}$$

а отже, $\lim\limits_{p\to\infty} D^{(0.i)}z_{p,s}(x,y) = \lim\limits_{p\to\infty} D^{(0.i)}v_{p,s}(x,y) = D^{(0.i)}u_s(x,y)$, $(x,y) \in \overline{D}_s$, $s = 1,2$, $i = 0,1$.

Перейшовши у формулах (11) до границі, коли $p \to \infty$, переконуємось, що граничні функції $u_s(x,y)$ є розв'язками відповідних інтегральних рівнянь (8) при $(x,y) \in \overline{D}_s$, $s = 1,2$. Методом від супротивного легко переконатись, що якщо задачі (1) — (7) в просторі функцій $C^*(\overline{D})$ має розв'язок при $f[u(x,y)] \in C_1(\overline{B})$, то цей розв'язок єдиний [6].

Теорема 1. *Нехай права частина рівняння (1) $f[u(x,y)] \in C_1(\overline{B})$ і в області $\overline{B}_1$ існують функції порівняння задачі (1) — (7).*

Тоді послідовності функцій $\left\{D^{(0.i)}z_{p,s}(x,y)\right\}$, $\left\{D^{(0.i)}v_{p,s}(x,y)\right\}$, $i = 0,1$, побудовані згідно формул (11):

а) збігаються рівномірно до единого в просторі $C^*(\overline{D})$ розв'язку задачі (1) — (7),

б) мають місце оцінки (17) при $(x,y) \in \overline{D}_s$, $s = 1,2$,

в) в області $\overline{B}_1$ виконуються нерівності:

$$D^{(0.i)}v_{p,s}(x,y) \le D^{(0.i)}v_{p+1,s}(x,y) \le D^{(0.i)}u_s(x,y) \le$$
$$\le D^{(0.i)}z_{p+1,s}(x,y) \le D^{(0.i)}z_{p,s}(x,y),\ i = 0,1,\ s = 1,2,\ (x,y) \in \overline{D}_s, \tag{18}$$

для всякого $p \in \mathbb{N}$, де $u_s(x,y)$ — единий розв'язок відповідного інтегрального рівняння (8).

Доведення. Доведемо справедливість нерівностей (18). З цією метою припустимо, що в деякій точці $(x,y) \in \overline{D}_s$ для деякого номера p, наприклад, $u_s(x,y) > z_{p,s}(x,y)$. Тоді в силу (16) для всякого $k \in \mathbb{N}$ в розглядуваній точці $(x,y) \in \overline{D}_s$

$$u_{p,s}(x,y) > z_{p,s}(x,y) \geq z_{p+k,s}(x,y),$$

а отже в даній точці послідовність функцій $\{z_{p+k,s}(x,y)\}$ при $k \to \infty$ не збігається до розв'язку $u_s(x,y)$, що протирічить доведеному. Аналогічно доводяться всі інші нерівності (18).

Наслідок 1. *Нехай* $f[u(x,y)] \in C_1(\overline{B})$, *причому* $f[u(x,y)] \equiv H[u(x,y);0]$, *а* $f(x,y,0,...,0) \leq (\geq)0$, $(x,y) \in \overline{D}$.

Тоді в області $\overline{B}$ *розв'язок задачі (1) — (7) з однорідними крайовими умовами задовольняє нерівності*

$$D^{(0.i)}u(x,y) \leq (\geq)0,\ i=0,1,\ (x,y) \in \overline{D}.$$

Розглянемо поряд із рівнянням (1) рівняння вигляду

$$D^{(1.1)}z(x,y) = f_1(x,y,z(x,y),$$
$$D^{(0.1)}z(x,y), z(\tau_1(x,y),y), z(x,\tau_2(x,y)) \equiv f_1[z(x,y)],\ f_1 : \overline{B} \to \mathbb{R}. \tag{19}$$

Надалі будемо вважати, що праві частини рівнянь (1), (19) задовольняють наступні умови:

1) $f[u(x,y)] \in C_1(\overline{B})$,

2) функція $f_1[z(x,y)] \in C(\overline{B})$ і в області $\overline{B}$ має невід'ємні обмежені частинні похідні першого порядку по всім своїм аргументам, розпочинаючи з третього,

3) для всякої з простору $C^*(\overline{D})$ функції $v(x,y) \in \overline{B}$

$$f_1[v(x,y)] \geq (\leq) f[v(x,y)]. \tag{20}$$

Теорема 2. *Нехай праві частини рівняння (1), (19)* $f[u(x,y)]$ *та* $f_1[z(x,y)]$ *задовольняють умови 1)-3) і в області* $\overline{B}$ *існують функції порівняння задач (1) — (7); (19), (2) — (7).*

Тоді для розв'язків цих задач в області $\overline{D}$ *виконуються нерівності*

$$D^{(0.i)}u(x,y) \geq (\leq) D^{(0.i)}z(x,y),\ i=0,1. \tag{21}$$

Доведення. Згідно теореми 1 розв'язки задач (1) — (7) та (19), (2) — (7) в просторі функцій $C^*(\overline{D})$ існують і вони єдині, а отже, позначивши $W(x,y) = z(x,y) - u(x,y)$ і використавши теорему Лагранжа про скінчені прирости, матимемо

$$D^{(1.1)}W(x,y) = b_1(x,y)W(x,y) + b_2(x,y)D^{(0.1)}W(x,y) + b_3(x,y)W(\tau_1(x,y),y)+$$
$$+b_4(x,y)W(x,\tau_2(x,y)) + f_1[u(x,y)] - f[u(x,y)], \tag{22}$$

де $b_k(x,y)$, $k=\overline{1,4}$ — частинні похідні першого порядку від функції $f_1[z(x,y)]$ відповідно по $z(x,y)$, $D^{(0.1)}z(x,y)$, $z(\tau_1(x,y),y)$, $z(x,\tau_2(x,y))$ при деяких їх фіксованих значеннях, що належать $\overline{B}$, $(x,y)\in\overline{D}$.

Поскільки $b_k(x,y)\geq 0$, $k=\overline{1,4}$, а функція $W(x,y)$ задовольняє однорідні умови (2) — (6), то приймаючи до уваги нерівності (20), на підставі наслідку 1, розв'язок рівняння (22), який задовольняє однорідні умови (2) — (6), та його похідна $D^{(0.1)}W(x,y)$ будуть невід'ємні (недодатні) при $(x,y)\in\overline{D}$, тобто справедливі нерівності (21).

Альтернуючий двосторонній метод

Позначимо через

$$\alpha^*_{p,s}(x,y):=z_{p,s}(x,y)-z_{p+1,s-1}(x_1,y)-T_sF_{p,s}(\xi,\eta),$$

$$\beta^*_{p,s}(x,y):=v_{p,s}(x,y)-v_{p+1,s-1}(x_1,y)-T_sF^p_s(\xi,\eta), \tag{23}$$

$$(x,y)\in\overline{D}_s,\ s=1,2,\ p=0,1,2,...,z_{p,0}(x_1,y)=v_{p,0}(x_1,y)=0,\ \text{для всіх } p,$$

і побудуємо послідовності функцій $\{z_{p,s}(x,y)\}$ та $\{v_{p,s}(x,y)\}$ згідно формул [3]

$$z_{p+1,s}(x,y)=z_{p+1,s-1}(x_1,y)+T_sF_{p,s}(\xi,\eta),$$

$$\begin{gathered}v_{p+1,s}(x,y)=v_{p+1,s-1}(x_1,y)+T_sF^p_s(\xi,\eta),\\(x,y)\in\overline{D}_s,\ s=1,2,\end{gathered} \tag{24}$$

$$z_{p,s}(x,y)=v_{p,s}(x,y)=0 \text{ при } (x,y)\in\overline{E}_\tau\cup\overline{E}_\theta,\ p=0,1,2,...,$$

де за нульове наближення вибираємо довільні з простору $C^*(\overline{D}_s)$ функції $z_{0,s}(x,y)$ та $v_{0,s}(x,y)\in\overline{B}_1$, $s=1,2$, які задовольняють умови

$$\begin{gathered}D^{(0.i)}W_{0,s}(x,y)\geq 0,\ \ D^{(0.i)}\alpha^*_{0,s}(x,y)\geq 0,\ \ D^{(0,i)}\beta^*_{0,s}(x,y)\leq 0,\\(x,y)\in\overline{D}_s,\ s=1,2.\end{gathered} \tag{25}$$

Лема 2. *Якщо $f[u(x,y)]\in C_1(\overline{B})$, то множина функцій нульового наближення $z_{0,s}(x,y)$ та $v_{0,s}(x,y)\in C^*(\overline{D}_s)$, які задовольняють умови (25), не порожня.*

Доведення. Нехай $\omega(x,y)\in C^*(\overline{D})$ — довільна в області $\overline{B}$ функція, а

$$z_s(x,y)=z_{s-1}(x_1,y)+T_sf[\omega(\xi,\eta)],\ (x,y)\in\overline{D}_s,\ s=1,2,\ z_0(x_1,y)\equiv 0.$$

Очевидно, $z_1(x_1,y)=z_2(x_1,y)$. Вважаючи, що визначені таким чином функції $z_s(x,y)\in\overline{B}$,
$s=1,2$, позначимо

$$\rho_s(x,y):=z_s(x,y)-z_{s-1}(x_1,y)-T_sf[z_s(\xi,\eta)],$$

$$D^{(0.1)}\rho_s(x,y):=\delta_s(x,y),\ (x,y)\in\overline{D}_s,\ s=1,2.$$

Із попередніх рівностей випливає, що $\rho_1(x_0,y)=\rho_1(x,g(x))=0$, $\rho_2(x_1,y)=\rho_2(x,y_1)=0$.

Покажемо, що функції

$$\begin{gathered} z_{0,1}(x,y) = z_1(x,y) + \int_{g(x)}^{y} |\delta_1(x,\eta)|\, d\eta, \\ v_{0,1}(x,y) = z_1(x,y) - \int_{g(x)}^{y} |\delta_1(x,\eta)|\, d\eta,\ (x,y) \in \overline{D}_1, \\ z_{0,2}(x,y) = z_2(x,y) + \int_{y_1}^{y} |\delta_2(x,\eta)|\, d\eta + \int_{y_1}^{y} |\delta_1(x_1,\eta)|\, d\eta, \\ v_{0,2}(x,y) = z_2(x,y) - \int_{y_1}^{y} |\delta_2(x,\eta)|\, d\eta - \int_{y_1}^{y} |\delta_1(x_1,\eta)|\, d\eta,\ (x,y) \in \overline{D}_2 \end{gathered} \tag{26}$$

при умові $z_{0,s}(x,y),\ v_{0,s}(x,y) \in \overline{B}_1$, $s = 1,2$, є функціями нульового наближення, які задовольняють умови (25). Дійсно, приймаючи до уваги умову (9), маємо

$$D^{(0.i)} W_{0,s}(x,y) = D^{(0.i)} W_{0,s-1}(x_1,y) + 2D^{(0.i)} \int_{y*}^{y} |\delta_s(x,\eta)|\, d\eta \geq 0,$$

$$\alpha^*_{0,s}(x,y) = \alpha^*_{0,s-1}(x_1,y) + \int_{y*}^{y} \left(|\delta_s(x,\eta)| + \delta_s(x,\eta)\right) d\eta +$$

$$+T_s \left(f[z_s(\xi,\eta)] - F_{0,s}(\xi,\eta)\right) \geq 0,$$

$$\beta^*_{0,s}(x,y) = \beta^*_{0,s-1}(x_1,y) + \int_{y*}^{y} \left(\delta_s(x,\eta) - |\delta_s(x,\eta)|\right) d\eta +$$

$$+T_s \left(f[z_s(\xi,\eta)] - F^0_s(\xi,\eta)\right) \leq 0,$$

$$D^{(0.i)} \alpha^*_{0,s}(x,y) \geq 0,\ \ D^{(0,i)} \beta^*_{0,s}(x,y) \leq 0,\ (x,y) \in \overline{D}_s,\ s = 1,2.$$

де

$$\alpha^*_{0,0}(x_1,y) = \beta^*_{0,0}(x_1,y) \equiv 0,\ \ y^* = \begin{cases} g(x),\ s = 1, \\ y_1,\ s = 2. \end{cases}$$

Отже, якщо $z_{0,s}(x,y) = v_{0,s}(x,y)$, $s = 1,2$, визначені згідно формул (26), належать області $\overline{B}_1$, то вони є функціями нульового наближення.

Із (23), (24) випливає справедливість рівностей

$$z_{p,s}(x,y) - z_{p+1,s}(x,y) = \alpha^*_{p,s}(x,y),\ v_{p,s}(x,y) - v_{p+1,s}(x,y) = \beta^*_{p,s}(x,y), \tag{27}$$

$$W_{p+1,s}(x,y) = W_{p+1,s-1}(x_1,y) + T_s(F_{p,s}(\xi,\eta) - F^p_s(\xi,\eta)), \tag{28}$$

$$\begin{gathered} \alpha^*_{p,s}(x,y) + \alpha^*_{p+1,s}(x,y) = z_{p,s-1}(x,y) - z_{p+2,s}(x,y), \\ \beta^*_{p,s}(x,y) + \beta^*_{p+1,s}(x,y) = v_{p,s-1}(x,y) - v_{p+2,s}(x,y), \end{gathered} \tag{29}$$

$$\begin{gathered} \alpha^*_{p+1,s}(x,y) = z_{p+1,s-1}(x_1,y) - z_{p+2,s-1}(x_1,y) + \\ +T_s(F_{p,s}(\xi,\eta) - F_{p+1,s}(\xi,\eta)), \\ \beta^*_{p+1,s}(x,y) = v_{p+1,s-1}(x_1,y) - v_{p+2,s-1}(x_1,y) + T_s(F^p_s(\xi,\eta) - F^{p+1}_s(\xi,\eta)), \\ (x,y) \in \overline{D}_s,\ s = 1,2,\ p = 0,1,2,.... \end{gathered} \tag{30}$$

Враховуючи (9), (25) із (27) та (28) при $p=0$ маємо

$$D^{(0.i)}(z_{0,s}(x,y)-z_{1,s}(x,y))\geq 0,\ D^{(0.i)}(v_{0,s}(x,y)-v_{1,s}(x,y))\leq 0,$$

$$D^{(0.i)}W_{1,s}(x,y)\leq 0,\ i=0,1,\ (x,y)\in\overline{D}_s,\ s=1,2.$$

Нехай при $(x,y)\in\overline{D}_s$, $s=1,2$, виконуються умови

$$D^{(0.i)}(z_{0,s}(x,y)-v_{1,s}(x,y))\geq 0,\ D^{(0.i)}(z_{1,s}(x,y)-v_{0,s}(x,y))\geq 0,\ i=0,1. \quad (31)$$

Тоді, враховуючи попередні нерівності і (25), одержимо

$$D^{(0.i)}v_{0,s}(x,y)\leq D^{(0.i)}z_{1,s}(x,y)\leq D^{(0.i)}(v_{1,s}(x,y)\leq D^{(0.i)}z_{0,s}(x,y),$$

$$i=0,1,\ (x,y)\in\overline{D}_s,\ s=1,2,$$

тобто, якщо нульове наближення належить області $\overline{B}_1$, то і $D^{(0.i)}z_{1,s}(x,y)$, $D^{(0.i)}(v_{1,s}(x,y)\in\overline{B}_1$, $s=1,2;\ i=0,1$.

Із (30) та (27), (28), враховуючи останні нерівності і умову (9), при $p=0;1$ маємо

$$D^{(0.i)}\alpha^*_{1,s}(x,y)\leq 0,\ \ D^{(0,i)}\beta^*_{1,s}(x,y)\geq 0,\ \ D^{(0.i)}W_{2,s}(x,y)\geq 0,$$

$$D^{(0.i)}(z_{1,s}(x,y)-z_{2,s}(x,y))\leq 0,\ D^{(0.i)}(v_{1,s}(x,y)-v_{2,s}(x,y))\geq 0,$$

$$\text{для всіх } (x,y)\in\overline{D}_s,\ s=1,2.$$

Оскільки в силу умов (9), (31) при $(x,y)\in\overline{D}_s$, $s=1,2$,

$$\alpha^*_{0,s}(x,y)+\alpha^*_{1,s}(x,y)=z_{0,s}(x,y)-v_{1,s}(x,y)-v_{1,s-1}(x_1,y)-$$

$$-z_{2,s-1}(x_1,y)+T_s(F^0_s(\xi,\eta)-F_{1,s}(\xi,\eta))\geq 0,$$

$$\beta^*_{0,s}(x,y)+\beta^*_{1,s}(x,y)=v_{0,s}(x,y)-z_{1,s}(x,y)+z_{1,s-1}(x_1,y)-$$

$$-v_{2,s-1}(x_1,y)+T_s(F_{0,s}(\xi,\eta)-F^1_s(\xi,\eta))\leq 0,$$

$$D^{(0.i)}(\alpha^*_{0,s}(x,y)+\alpha^*_{1,s}(x,y))\geq 0,\ D^{(0.i)}(\beta^*_{0,s}(x,y)+\beta^*_{1,s}(x,y))\leq 0,$$

то із (29) при $p=0$ одержимо

$$D^{(0.i)}(z_{0,s}(x,y)-z_{2,s}(x,y))\geq 0,\ \ D^{(0.i)}(v_{0,s}(x,y)-v_{2,s}(x,y))\leq 0,$$

$$i=0,1,\ (x,y)\in\overline{D}_s,\ s=1,2.$$

Але

$$\begin{gathered}D^{(0.i)}(z_{p+1,s}(x,y)-v_{p+2,s}(x,y))=D^{(0.i)}(z_{p+1,s-1}(x_1,y)-v_{p+2,s-1}(x_1,y))+\\ +D^{(0.i)}T_s(F_{p,s}(\xi,\eta)-F^p_s(\xi,\eta)),\\ D^{(0.i)}(v_{p+1,s}(x,y)-z_{p+2,s}(x,y))=D^{(0,i)}(v_{p+1,s-1}(x_1,y)-z_{p+2,s-1}(x_1,y))+\\ +D^{(0.i)}T_s(F^p_s(\xi,\eta)-F_{p,s}(\xi,\eta)),(x,y)\in\overline{D}_s,\ i=0,1.\end{gathered} \quad (32)$$

для всяких $p = 0, 1, 2, ...$, а отже, враховуючи попередні нерівності із (32) при $p = 0$ та із (28) при $p = 1$ маємо,

$$D^{(0.i)}W_{2,s}(x, y) \geq 0,\ D^{(0.i)}(z_{1,s}(x, y) - v_{2,s}(x, y)) \leq 0,$$

$$D^{(0.i)}(v_{1,s}(x, y) - z_{2,s}(x, y)) \geq 0,\ i = 0, 1,$$

тобто в області $\overline{B}_1$ виконуються умови

$$D^{(0.i)}v_{0,s}(x, y) \leq D^{(0.i)}z_{1,s}(x, y) \leq D^{(0.i)}v_{2,s}(x, y) \leq D^{(0.i)}z_{2,s}(x, y) \leq$$

$$\leq D^{(0.i)}v_{1,s}(x, y) \leq D^{(0.i)}z_{0,s}(x, y),$$

$$D^{(0.i)}\alpha^*_{2,s}(x, y) \geq 0,\ \ D^{(0.i)}\beta^*_{2,s}(x, y) \leq 0,\ i = 0, 1,\ (x, y) \in \overline{D}_s,\ s = 1, 2.$$

Методом математичної індукції переконуємось, що при виконанні умов (31) послідовності функцій $\{z_{p,s}(x, y)\}$ та $\{v_{p,s}(x, y)\}$, побудовані згідно закону (24), (25), задовольняють в області $\overline{B}_1$ нерівності

$$\begin{gathered}D^{(0.i)}v_{2p,s}(x, y) \leq D^{(0.i)}z_{2p+1,s}(x, y) \leq D^{(0.i)}v_{2p+2,s}(x, y) \leq \\ D^{(0.i)}z_{2p+3,s}(x, y) \leq D^{(0.i)}v_{2p+3,s}(x, y) \leq D^{(0.i)}z_{2p+2,s}(x, y) \leq \\ \leq D^{(0.i)}v_{2p+1,s}(x, y) \leq D^{(0.i)}z_{2p,s}(x, y), \\ i = 0, 1,\ (x, y) \in \overline{D}_s,\ s = 1, 2, \text{для } p = 0, 1, 2, ...\end{gathered} \tag{33}$$

Як і у випадку ітераційного процесу (11), (12) легко показати, що і у даному випадку для всякого $p \in \mathbb{N}$ справедливі оцінки (17), а отже в силу нерівностей (33)

$$\lim_{p\to\infty} D^{(0.i)}z_{p,s}(x, y) = \lim_{p\to\infty} D^{(0.i)}v_{p,s}(x, y) = D^{(0.i)}u_s(x, y),$$

$$(x, y) \in \overline{D}_s,\ s = 1, 2,\ i = 0, 1,$$

де $u_s(x, y)$ — єдиний розв'язок відповідного інтегрального рівняння (8).

Теорема 3. *Нехай $f[u(x, y)] \in C_1(\overline{B})$ і в області $\overline{B}_1$ існують функцій нульового наближення, які задовольняють умови (25).*

Тоді послідовності функцій $\{z_{p,s}(x, y)\}$ та $\{v_{p,s}(x, y)\}$, побудовані згідно закону (24), при виконанні умов (31), збігаються рівномірно до єдиного в просторі $C^*(\overline{D})$ розв'язку задачі (1) — (7) і мають місце нерівності

$$\begin{gathered}D^{(0.i)}v_{2p,s}(x, y) \leq D^{(0.i)}z_{2p+1,s}(x, y) \leq D^{(0.i)}v_{2p+2,s}(x, y) \leq \\ \leq D^{(0.i)}z_{2p+3,s}(x, y) \leq D^{(0.i)}u_s(x, y) \leq D^{(0.i)}v_{2p+3,s}(x, y) \leq \\ \leq D^{(0.i)}z_{2p+2,s}(x, y) \leq D^{(0.i)}v_{2p+1,s}(x, y) \leq D^{(0.i)}z_{2p,s}(x, y), \\ i = 0, 1,\ (x, y) \in \overline{D}_s,\ s = 1, 2,\ p = 0, 1, 2, ...\end{gathered} \tag{34}$$

Наслідок 2. *Якщо $f[u(x,y)] \in C_1(\overline{B})$, то умови (25) є необхідними і достатніми для виконання нерівностей*

$$D^{(0.i)}v_{0,s}(x,y) \le D^{(0.i)}u_s(x,y) \le D^{(0.i)}z_{0,s}(x,y),$$
$$i=0,1,\ (x,y)\in \overline{D}_s,\ s=1,2,\ p=0,1,2,... \tag{35}$$

Достатність умов (25) для виконання нерівностей (35) випливає із теореми 3 (нерівності (34)).

Припустимо, що умови (35) в області $\overline{B}_1$ виконуються. Тоді

$$D^{(0.i)}\alpha^*_{0,s}(x,y) = D^{(0.i)}(z_{0,s}(x,y)-u_s(x,y)) - D^{(0.i)}(z_{1,s-1}(x_1,y)-$$
$$-u_{s-1}(x_1,y)) + D^{(0.i)}T_s(H[u_s(\xi,\eta);u_s(\xi,\eta)] - F_{0,s}(\xi,\eta)) \ge 0,$$
$$D^{(0.i)}\beta^*_{0,s}(x,y) = D^{(0.i)}(v_{0,s}(x,y)-u_s(x,y)) - D^{(0.i)}(v_{1,s-1}(x_1,y)- \tag{36}$$
$$-u_{s-1}(x_1,y)) + D^{(0.i)}T_s(H[u_s(\xi,\eta);u_s(\xi,\eta)] - F^s_0(\xi,\eta)) \le 0,$$
$$(z_{1,0}(x_1,y)-u_0(x_1,y) = v_{1,0}(x_1,y)-u_0(x_1,y)\equiv 0), (x,y)\in\overline{D}_s,\ s=1,2,$$

що і доводить справедливість наслідку 2.

Зауваження 1. *Якщо $f[u(x,y)] \in C_1(\overline{B})$ і $f[u(x,y)] \equiv H[0;u(x,y)]$, то для побудови двосторонніх наближень до розв'язку задачі (1) — (7) згідно формул (24) достатньо побудувати одну послідовність функцій $\{z_{p,s}(x,y)\}$, а отже в даному випадку кількість операцій при реалізації двостороннього методу (24), (31) зменшується у двічі.*

1. *Маринець В.В., Маринець Т.Й., Добриден А.В.* Про одну некласичну задачу теорії рівнянь гіперболічного типу // Праці Міжнародного симпозіуму "Питання оптимізації обчислень" — Кмїв: Інститут кібернетики ім.В.М.Глушкова НАНУ, 2009. — Т.2. — С.79—84.
2. *Маринець В.В.*Про одну крайову задачу для квазілінійного рівняння гіперболічного типу // Наук. вісник Ужгород.ун–ту. Сер. матем і інформ. — 2009. — Вип.18.— С.85—91.
3. *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика. — М.:Мир, 1969. - 448с.
4. *Курпель Н.С., Шувар Б.А.* Двусторонние операторные неравенства и их применения.— Киев:Наук.думка, 1980. — 268 с.
5. *Маринец В.В.* Деякі підходи до побудови наближеного розв'язку задачі Гурса для систем визначених квазілінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними з аргументом, що відхиляється // Укр.мат.журнал — 1995. —Т.47, №12. — С.1667—1675.
6. *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я.* Приближенное решение операторных уравнений. — М.: Наука, 1969. — 456 с.

Одержано .2010