УДК 519.21

Г. І. Сливка-Тилищак (Ужгородський нац. ун-т)

УМОВИ ІСНУВАННЯ УЗАГАЛЬНЕНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ПРО КОЛИВАННЯ КРУГЛОЇ МЕМБРАНИ З ВИПАДКОВИМИ ПОЧАТКОВИМИ УМОВАМИ

The boundary-value problem of the mathematic physics of round membrane's vibration where the initial conditions are jointly $SSub_{\varphi}(\Omega)$ random fields is analyzed in the work. Conditions of existence with probability one generalized solution of hyperbolic equations type partial differential equation of mathematical physics with random strongly $Sub_{\varphi}(\Omega)$ initial conditions are found in the multidimensional case.

У роботі розглядається крайова задача математичної фізики про коливання круглої мембрани, коли початкові умови є сумісно $SSub_{\varphi}(\Omega)$ випадкові поля. Знайдено умови існування з імовірністю одиниця узагальненого розв'язку гіперболічного рівняння в частинних похідних математичної фізики з строго $Sub_{\varphi}(\Omega)$ випадковими початковими умовами.

В роботі розглядається крайова задача математичної фізики для гіперболічного рівняння в частинних похідних з випадковими початковими умовами, а саме задача про коливання круглої мембрани коли початкові умови є строго $Sub_{\varphi}(\Omega)$ випадкові поля. Для такої задачі знайдено умови існування з ймовірністю одиниця узагальненого розв'язку. Досліджені достатні умови для існування узагальненого розв'язку такої задачі в частковому випадку.

Подібні задачі для рівнянь гіперболічного типу математичної фізики коли початкові умови є сумісно строго розглядались в [1–4]. В монографіях [5] і [6] можна знайти посилання на інші роботи, які проводились в цьому напрямку.

1. Рівняння коливання круглої мембрани з сумісно строго $Sub_{\varphi}(\Omega)$ випадковими початковими умовами. Розглянемо задачу про вільні коливання круглої однорідної мембрани радіуса R, якщо в початковий момент часу положення та швидкість її точок є деякі випадкові поля, а край мембрани нерухомо закріплений [7]. Дана задача приводить до розв'язування наступної крайової задачі:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0,$$

$$u\,|_{t=0}=\xi\,(x,y)\,,\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\eta\,(x,y)\,,$$

$$u|_{x^2+y^2=R^2}=0.$$

Взявши центр мембрани за початок координат і перейшовши в рівнянні коливання мембрани до полярних координат, отримаємо задачу: в області $B=\{(t,\rho,\varphi):\ 0\le t\le T,\ 0\le\rho\le R,\ 0\le\varphi\le 2\pi\}$ знайти розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{\partial^2 u\,(t,\rho,\varphi)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u\,(t,\rho,\varphi)}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u\,(t,\rho,\varphi)}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u\,(t,\rho,\varphi)}{\partial \varphi^2}, \tag{1}$$

що задовольняє початкові умови

$$u\,(0,\rho,\varphi)=\xi(\rho,\varphi),\ \frac{\partial u\,(0,\rho,\varphi)}{\partial t}=\eta(\rho,\varphi), \tag{2}$$

$$0 \le \rho \le R,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,$$

крайову умову

$$u\left(t, R, \varphi\right) = 0,\ 0 \le t \le T. \tag{3}$$

Початкові умови $(\xi(\rho, \varphi),\ \rho \in [0, R],\ \varphi \in [0, 2\pi])$ і $(\eta(\rho, \varphi),\ \rho \in [0, R],\ \varphi \in [0, 2\pi])$ є сумісно $SSub_\varphi(\Omega)$ випадкові поля [5].

Як і в детермінованому випадку розв'язок шукається у вигляді

$$u(t, \rho, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\hat{a}_{nk}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t + \hat{b}_{nk}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\right)J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\cos n\varphi +$$

$$+ \quad \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\check{a}_{nk}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t + \check{b}_{nk}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\right)J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\sin n\varphi, \tag{4}$$

де

$$\hat{a}_{nk} = \frac{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{R}\xi(\rho, \varphi)\rho J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\cos n\varphi d\rho d\varphi}{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{R}\rho J_n^2\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\cos^2 n\varphi d\rho d\varphi},\ n = 0, 1, 2\ldots;$$

$$\check{a}_{nk} = \frac{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{R}\xi(\rho, \varphi)\rho J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\sin n\varphi d\rho d\varphi}{\pi\int\limits_0^{R}\rho J_n^2\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)d\rho},\ n = 0, 1, 2\ldots;$$

$$\hat{b}_{nk} = \frac{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{R}\eta(\rho, \varphi)\rho J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\cos n\varphi d\rho d\varphi}{\sqrt{\lambda_{nk}}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{R}\rho J_n^2\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\cos^2 n\varphi d\rho d\varphi},\ n = 0, 1, 2\ldots;$$

$$\check{b}_{nk} = \frac{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{R}\eta(\rho, \varphi)\rho J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\sin n\varphi d\rho d\varphi}{\sqrt{\lambda_{nk}}R\pi\int\limits_0^{R}\rho J_n^2\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)d\rho},\ n = 0, 1, 2\ldots;$$

$\sqrt{\lambda_{nk}} = \frac{\nu_{nk}}{R}$, ν_{nk} — власні значення крайової задачі

$$z''(\rho) + \frac{1}{\rho}z'(\rho) + (\lambda - \mu^2(\rho^2))z(\rho) = 0,$$

$$z(R) = 0,\ |z(0)| < \infty,$$

які визначаються асимптотичними рівностями (див. [8])

$$\nu_{nk} \cong k\pi + \left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}. \tag{5}$$

Власним значенням відповідають власні функції

$$z_k(\rho) = CJ_n\left(\frac{\nu_k}{R}\rho\right),\ k = 1, 2, 3, \ldots,$$

C — деяка стала , $J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)$ — функції Бесселя першого роду n-го порядку. Нехай $D=[0,R]\times[0,2\pi]\times[0,T]$, а $C(D)$ — простір неперервних на D функцій, який є сепарабельним банаховим простором.

Означення 1. *Узагальненим розв'язком задачі (1)–(3) в області D називається ряд, що зображується у вигляді (4) і який для всіх $\rho\in[0,R]$, $\varphi\in[0,2\pi]$, $t\in[0,T]$ збігається рівномірно за ймовірністю.*

Нехай

$$S_{nk}^{(0_1)}(t,\rho,\varphi)=\sum_{k=1}^{k_1}\sum_{n=0}^{n_1}\left(\hat{a}_{nk}\cos\sqrt{\lambda_{n_1k_1}}t+\hat{b}_{n_1k_1}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\right)J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\cos n\varphi,$$

$$S_{nk}^{(0_2)}(t,\rho,\varphi)=\sum_{k=1}^{k_1}\sum_{n=0}^{n_1}\left(\check{a}_{nk}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t+\check{b}_{nk}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\right)J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\sin n\varphi.$$

Теорема 1. *Нехай випадкові поля $\xi(\rho,\varphi)$, $\eta(\rho,\varphi)$ є сумісно строго $Sub_\varphi(\Omega)$. Для того, щоб з ймовірністю одиниця існував узагальнений розв'язок задачі* (1)–(3) *в області D, що зображений у вигляді рівномірно збіжного за ймовірністю ряду* (4) *достатньо, щоб виконувались умови:*

1) для всіх $\rho\in[0,R]$, $\varphi\in[0,\pi]$, $t\in[0,T]$ збігалися ряди

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\Big(E\hat{a}_{nk}\hat{a}_{ml}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\cos\sqrt{\lambda_{ml}}t+E\hat{b}_{nk}\hat{b}_{ml}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\sin\sqrt{\lambda_{ml}}t+$$
$$+2E\hat{a}_{nk}\hat{b}_{ml}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\sin\sqrt{\lambda_{ml}}t\Big)\times J_n(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho)J_m(\sqrt{\lambda_{ml}}\rho)\cos n\varphi\cos m\varphi,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sqrt{\lambda_{nk}}\sqrt{\lambda_{ml}}\Big(E\check{a}_{nk}\check{a}_{ml}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\sin\sqrt{\lambda_{ml}}t+$$
$$+E\check{b}_{nk}\check{b}_{ml}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\cos\sqrt{\lambda_{ml}}t-2E\check{a}_{nk}\check{b}_{ml}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\cos\sqrt{\lambda_{ml}}t\Big)\times$$
$$\times J_n(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho)J_m(\sqrt{\lambda_{ml}}\rho)\sin n\varphi\sin m\varphi,$$

2) для $n\geq 1$, $l=1,2$, $i=1,2$,

$$\sup_{\substack{|\rho-\rho_1|\leq h\\|\varphi-\varphi_1|\leq h\\|t-t_1|\leq h}}\left(E\left|S_{nk}^{(i)}(t,\rho,\varphi)-S_{nk}^{(i)}(t_1,\rho_1,\varphi_1)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq\sigma_l(h),$$

де $\sigma_l(h)$ — неперервні монотонно зростаючі функції, такі що $\sigma_l(h)\to 0$ при $h\to 0$ і виконується умова

$$\int\limits_{0+}\Psi\left(\ln\frac{1}{\sigma_l^{(-1)}(\varepsilon)}\right)d\varepsilon<\infty,$$

де $\Psi(u)=\frac{u}{\varphi^{(-1)}(u)}$, $\sigma_l^{(-1)}(\varepsilon)$ — обернена до функції $\sigma_l(\varepsilon)$.

Доведення. Умова 1) забезпечує збіжність в середньому квадратичному ряду (4). З умови теореми 1.8 роботи [6] випливає, що ряд (4) збігається за ймовірністю в області D.

2. Умови існування узагальненого розв'язку з ймовірністю одиниця рівняння коливання круглої мембрани у частковому випадку.

Теорема 2. *Нехай випадкові поля* $(\xi(\rho,\varphi),\ \rho\in[0,R],\ \varphi\in[0,2\pi])$, $(\eta(\rho,\varphi),\ \rho\in[0,R],\ \varphi\in[0,2\pi])$ *є сумісно строго* $Sub_\varphi(\Omega)$.

$$B(\rho,\varphi,\bar\rho,\bar\varphi)=B(\rho,\varphi,\bar\rho,\bar\varphi)=E\xi(\rho,\varphi)\xi(\bar\rho,\bar\varphi),$$

$$R(\rho,\varphi,\bar\rho,\bar\varphi)=R(\rho,\varphi,\bar\rho,\bar\varphi)=E\eta(\rho,\varphi)\eta(\bar\rho,\bar\varphi).$$

Для того щоб з ймовірністю одиниця існував узагальнений розв'язок задачі (1)–(3) *в області* D, *що зображується у вигляді рівномірно збіжного за ймовірністю ряду* (4), *достатньо, щоб виконувались умови:*

1) *для достатньо малих* h *виконувались нерівності:*

$$\sup_{\substack{|\rho-\bar\rho|\le h\\|\varphi-\bar\varphi|\le h}}\left(B(\rho,\varphi,\rho,\varphi)-B(\bar\rho,\bar\varphi,\bar\rho,\bar\varphi)-2B(\rho,\varphi,\bar\rho,\bar\varphi)\right)^{\frac12}\le\frac{C}{|\ln h|^\delta},$$

$$\sup_{\substack{|\rho-\bar\rho|\le h\\|\varphi-\bar\varphi|\le h}}\left(R(\rho,\varphi,\rho,\varphi)-R(\bar\rho,\bar\varphi,\bar\rho,\bar\varphi)-2R_(\rho,\varphi,\bar\rho,\bar\varphi)\right)^{\frac12}\le\frac{C_1}{|\ln h|^\delta},$$

де $\delta>1-\frac1p$; , $C>0$, $C_{z_1}>0$;

2) *збігалися наступні ряди*

$$\sum_{k=1}^\infty\sum_{n=0}^\infty\sum_{l=1}^\infty\sum_{m=0}^\infty\left[|E\hat a_{nk}\hat a_{ml}|+|E\hat b_{nk}\hat b_{lm}|+2|E\hat a_{nk}\hat b_{ml}|\right]<\infty,$$

$$\sum_{k=1}^\infty\sum_{n=0}^\infty\sum_{l=1}^\infty\sum_{m=0}^\infty\left[|E\check a_{nk}\check a_{ml}|+|E\check b_{nk}\check b_{lm}|+2|E\check a_{nk}\check b_{ml}|\right]<\infty;$$

3) *для довільних* $\delta>1-\frac1p$ *і* $|h|<1$ *виконувалися наступні умови*

$$\sum_{k=1}^\infty\sum_{n=0}^\infty(n+k)^2\left[\left(E(\hat a_{nk})^2\right)^{\frac12}+\left(E(\hat b_{nk})^2\right)^{\frac12}\right]\times\left(2\left(\ln(k+n)\right)^\delta+(\ln n)^\delta\right)<\infty,$$

$$\sum_{k=1}^\infty\sum_{n=0}^\infty(n+k)^2\left[\left(E(\check a_{nk})^2\right)^{\frac12}+\left(E(\check b_{nk})^2\right)^{\frac12}\right]\times\left(2\left(\ln(k+n)\right)^\delta+(\ln n)^\delta\right)<\infty.$$

Доведення. Умови 1, 2 даної теореми забезпечують виконання умови 1 теореми 1. Доведемо, що із виконання умови 3 даної теореми випливає виконання умови 2 тієї ж теореми.

$$\left|J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\right|=\tfrac1\pi\left|\int_0^\pi\cos\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\sin\theta-n\theta\right)d\theta\right|\le$$
$$\le\tfrac1\pi\int_0^\pi\left|\cos\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\sin\theta-n\theta\right)\right|d\theta\le\tfrac1\pi\int_0^\pi d\theta\le1.$$

Розглянемо

$$\left(E\left|S_{nk}^{(0_1)}(t,\rho,\varphi)-S_{nk}^{(0_1)}(t,\rho_1,\varphi_1)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}=$$
$$=\left(E\left|\sum_{k=1}^{k_1}\sum_{n=0}^{n_1}\left(\hat{a}_{nk}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t+\hat{b}_{nk}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\right)J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\cos n\varphi-\right.\right.$$
$$-\sum_{k=1}^{k_1}\sum_{n=0}^{n_1}\left(\hat{a}_{nk}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t_1+\hat{b}_{nk}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t_1\right)J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1\right)\cos n\varphi_1\ )^{\frac{1}{2}}\le$$
$$\le\sum_{k=1}^{k_1}\sum_{n=0}^{n_1}\left(E\left(\hat{a}_{nk}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left|\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\left(J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\right)\cos n\varphi-\right.$$
$$\left.-\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t_1\left(J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1\right)\right)\cos n\varphi_1\right|+$$
$$+\sum_{k=1}^{k_1}\sum_{n=0}^{n_1}\left(E\left(\hat{b}_{nk}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left|\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\left(J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\right)\cos n\varphi-\right.$$
$$\left.-\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t_1\left(J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1\right)\right)\cos n\varphi_1\right|.$$

Використовуючи інтегральне представлення функції Бесселя першого роду цілого порядку [9]

$$J_n\left(z\right)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\left(z\sin\theta-n\theta\right)d\theta,\ n=0,1,2,\dots$$

можна зробити оцінки

$$\left|\cos\sqrt{\lambda_{nk}}tJ_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\cos n\varphi-\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t_1J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1\right)\cos n\varphi_1\right|=$$
$$=\left|\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\left(\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\sin\theta-n\theta\right)\right)\cos n\varphi-\right.$$
$$\left.-\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t_1\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\left(\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1\right)\sin\theta-n\theta\right)\right)\cos n\varphi_1\right|=$$
$$=\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\cos\left(\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\sin\theta-n\theta\right)\cos n\varphi\ -\right.\right.$$
$$\left.\left.-\ \cos\sqrt{\lambda_{nk}}t_1\cos\left(\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1\right)\sin\theta-n\theta\right)\cos n\varphi_1\right]d\theta\right|\le$$
$$\le\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\cos\left(\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\sin\theta-n\theta\right)\cos n\varphi-\right.$$
$$\left.-\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t_1\cos\left(\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1\right)\sin\theta-n\theta\right)\cos n\varphi_1\right|d\theta\le$$
$$\le\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\left|\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t-\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t_1\right|+\left|\cos\left(\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\sin\theta-n\theta\right)\ -\right.\right.$$
$$\left.\left.-\ \cos\left(\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1\right)\sin\theta-n\theta\right)\right|+\left|\cos n\varphi_1-\cos n\varphi_1\right|\right]d\theta\le$$
$$\le\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\left|\sin\frac{\sqrt{\lambda_{nk}}(t-t_1)}{2}\right|+\left|\sin\frac{\sqrt{\lambda_{nk}}(\rho-\rho_1)\sin\theta}{2}\right|+\left|\sin\frac{n(\varphi-\varphi_1)}{2}\right|\right]d\theta.$$

Використаємо асимптотичне представлення значень λ_{nk} (5) і рівність $|\sin uv|\le$

$\leq \frac{\left(ln\left(|v|+e^{\delta}\right)\right)^{\delta}}{(|ln|u||)^{\delta}}$, $\delta > 0$, тоді

$$\left|\cos\sqrt{\lambda_{nk}}tJ_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\cos n\varphi-\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t_1J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1\right)\cos n\varphi_1\right|\leq$$
$$\leq \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left[\left|\frac{\left(\ln\left|\frac{\sqrt{\lambda_{nk}}}{2}\right|+e^{\delta}\right)^{\delta}}{|\ln|t-t_1||^{\delta}}\right|+\left|\frac{\left(\ln\left|\frac{\sqrt{\lambda_{nk}}}{2}\right|+e^{\delta}\right)^{\delta}}{|\ln|\rho-\rho_1||^{\delta}}\right|+\left|\frac{\left(\ln\left|\frac{n}{2}\right|+e^{\delta}\right)^{\delta}}{|\ln|\varphi-\varphi_1||^{\delta}}\right|\right]d\theta\leq$$
$$\leq 2\left(2\frac{\left(\ln\left(\left(\frac{k+n}{2}\right)\frac{\pi}{R}+e^{\delta}\right)\right)^{\delta}}{|\ln|h||^{\delta}}+\frac{\left(\ln\left(\frac{n}{2}+e^{\delta}\right)\right)}{|\ln|h||^{\delta}}\right)\leq$$
$$\leq\frac{2}{|\ln|h||^{\delta}}\left(\left(2\ln\left(\left(\frac{k+n}{2}\right)\frac{\pi}{R}+e^{\delta}\right)\right)^{\delta}+\left(\ln\left(\frac{n}{2}+e^{\delta}\right)\right)^{\delta}\right)\leq$$
$$\leq\frac{2}{|\ln|h||^{\delta}}\left(2\left(\ln(k+n)\right)^{\delta}+(\ln n)^{\delta}\right).$$

$$\left|\sin\sqrt{\lambda_{nk}}tJ_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\cos n\varphi-\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t_1J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1\right)\cos n\varphi_1\right|\leq$$
$$\leq\frac{2}{|\ln|h||^{\delta}}\left(2\left(\ln(k+n)\right)^{\delta}+(\ln n)^{\delta}\right).$$

Аналогічно можна знайти

$$\left(E\left|S_{nk}^{(0_2)}(t,\rho,\varphi)-S_{nk}^{(0_2)}(t,\rho_1,\varphi_1)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq$$
$$\leq\sum_{k=1}^{k_1}\sum_{n=0}^{n_1}\left(E\left(\hat{a}_{nk}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left|\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\left(J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\right)\cos n\varphi-\right.$$
$$\left.-\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t_1\left(J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1\right)\right)\cos n\varphi_1\right|+$$
$$+\sum_{k=1}^{k_1}\sum_{n=0}^{n_1}\left(E\left(\hat{b}_{nk}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left|\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\left(J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\right)\cos n\varphi-\right.$$
$$\left.-\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t_1\left(J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1\right)\right)\cos n\varphi_1\right|.$$

$$\left|\cos\sqrt{\lambda_{nk}}tJ_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\sin n\varphi-\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t_1J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1\right)\sin n\varphi_1\right|\leq$$
$$\leq\frac{2}{|\ln|h||^{\delta}}\left(2\left(\ln(k+n)\right)^{\delta}+(\ln n)^{\delta}\right).$$
$$\left|\sin\sqrt{\lambda_{nk}}tJ_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\sin n\varphi-\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t_1J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1\right)\sin n\varphi_1\right|\leq$$
$$\leq\frac{2}{|\ln|h||^{\delta}}\left(2\left(\ln(k+n)\right)^{\delta}+(\ln n)^{\delta}\right).$$

Отже,

$$\left(E\left|S_{nk}^{(0_1)}(t,\rho,\varphi)-S_{nk}^{(0_1)}(t_1,\rho_1,\varphi_1)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq\frac{C_{0_1}}{|\ln|h||^{\delta}},$$

де

$$C_{0_1}=2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(E\hat{a}_{nk}^2)^{\frac{1}{2}}+(E\hat{b}_{nk}^2)^{\frac{1}{2}}\right]\times\left(2\left(\ln(k+n)\right)^{\delta}+(\ln n)^{\delta}\right).$$

$$\left(E\left|S_{nk}^{(0_2)}(t,\rho,\varphi)-S_{nk}^{(0_2)}(t_1,\rho_1,\varphi_1)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq\frac{C_{0_2}}{|\ln|h||^{\delta}},$$

де

$$C_{0_2}=2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(E\check{a}_{nk}^2)^{\frac{1}{2}}+(E\check{b}_{nk}^2)^{\frac{1}{2}}\right]\times\left(2\left(\ln(k+n)\right)^{\delta}+(\ln n)^{\delta}\right).$$

Отже, виконання умови 3 даної теореми забезпечує виконання умови теореми 1.

У роботі отримано умови існування з ймовірністю одиниця узагальненого розв'язку задачі про вільні коливання круглої мембрани, коли початкові умови є сумісно $SSub_{\varphi}(\Omega)$ випадкові поля. Отримані результати мають теоретичне та практичне застосування при вивченні рівнянь математичної фізики з випадковими початковими умовами. Вони можуть використовуватися при моделюванні розв'язку даного рівняння на комп'ютерах.

1. *Сливка-Тилищак Г. І., Вереш К. Й.* Умови існування узагальненого розв'язку задачі про коливання однорідної струни з випадковими початковими умовами // Вісник Київського університету. Серія фіз-мат. науки. – 2008. – Вип. №2. – С. 26-30.
2. *Slyvka-Tylyschak A. I.* Conditions of existence with probability one generalized solution of the boundary-value problems of hyperbolic equations with random initial conditions // Наук. вісник. Ужгородського університету. Серія математика і інформатика. – 2008. – Вип. 17. – С. 196–202.
3. *Сливка-Тилищак Г. І.* Достатні умови існування узагальненого розв'язку задачі про коливання прямокутного паралелепіпеда з випадковими факторами // Наук. вісник. Ужгородського університету. Серія математика і інформатика. – 2009. – Вип. 18. – С. 141–150.
4. *Сливка-Тилищак Г. І., Вереш К. Й.* Умови існування узагальненого розв'язку гіперболічного рівняння з випадковими початковими умовами з простору Орліча // Вісник Донецького національного університету. Серія А природничі науки. Частини 1–4. – 2009. – Вип. 1. – С. 87–91.
5. *Buldygin V. V., Kozachenko Yu. V.* Metric Characterization of Random Variables and Random processes, – American Mathematical Society, Providence, Rhode, 2000.
6. *Довгай Б. В., Козаченко Ю. В., Сливка-Тилищак Г. І.* Крайові задачі математичної фізики з випадковими факторами. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2008. – 175 с.
7. *Сливка Г. І.* Обґрунтування застосування методу Фур'є до задачі про коливання круглої мембрани з випадковими початковими умовами // Вісник Київ. ун-ту. Сер. фіз-мат. науки. – 2002. – Вип. 4. – С. 31-37.
8. *Положий Г. Н.* Уравнения математической физики. – М.: Высшая школа, 1964. – 559 с.
9. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1974. – 334 с.

Одержано ..2010