МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД

«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА КІБЕРНЕТИКИ І ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

Вибрані розділи багатокритеріальної оптимізації:

методичні рекомендації до виконання контрольних та лабораторних робіт

для студентів математичного факультету

Ужгород-2015

Вибрані розділи багатокритеріальної оптимізації: методичні рекомендації до виконання контрольних та лабораторних робіт для студентів математичного факультету / Розробник: Н.Е. Кондрук – Ужгород: УжНУ, 2015. – 56 с.

Рекомендовано до друку кафедрою кібернетики і прикладної математики ДВНЗ "Ужгородський національний університет", протокол №10 від 12 червня 2015 року.

Рекомендовано до друку методичною комісією математичного факультету ДВНЗ "Ужгородський національний університет", протокол №7 від 31 серпня 2015 року.

Рекомендовано до друку вченою радою математичного факультету ДВНЗ "Ужгородський національний університет", протокол №11 від 19, 26 червня 2015 року.

Розробник:

Кондрук Н.Е., к.т.н., доцент кафедри кібернетики і прикладної математики (ДВНЗ "Ужгородський національний університет").

Рецензенти:

Брила А. Ю., к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри системного аналізу та теорії оптимізації (ДВНЗ "Ужгородський національний університет");

Ніколенко В.В., к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри кібернетики і прикладної математики (ДВНЗ "Ужгородський національний університет").

ЗМІСТ

ВСТУП

Процеси прийняття рішень лежать в основі будь-якої цілеспрямованої діяльності. Математичні та інформаційні моделі стали широко застосовуватись для опису та аналізу складних технічних, соціальних, економічних, медичних та інших систем.

Тому все більше уваги приділяється задачі багатоцільової (векторної, багатокритеріальної) оптимізації. Це пов’язане з тим, що при дослідженні складних систем і об’єктів використання математичних моделей, що призводять до постановок задач лише скалярної оптимізації, не є адекватним. Реальні потреби практики проектування, створення і експлуатації складних систем потребують врахування і узгодження кількох (багатьох) різних цілей.

Дана методична розробка містить описання сукупності методів, які з використанням ЕОМ дозволяють ефективно приймати рішення в багатокритеріальних задачах та розрахована на студентів, які навчаються за напрямами: математика, прикладна математика, комп'ютерні науки, економіка; фахівців, які цікавляться подібними питаннями. Зокрема, наведений теоретичний та практичний матеріал є складовими робочої програми дисципліни «СИСТЕМИ І МЕТОДИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ», яка читається для студентів 4-го курсу напряму підготовки 6.040301 – Прикладна математика» та дисциплін спеціалізації – «ОБРОБКА ІНФОРМАЦІЇ В ЗАДАЧАХ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ» (4-й курс, напрям підготовки 6.040201 – Математика), «НЕЧІТКІ ЗАДАЧІ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ» (1-й курс магістратури, спеціальність 8.04020101 – Математика).

I. Моделі та методи багатокритеріальної оптимізації

1.1. Математична модель задачі багатокритеріальної оптимізації

В теорії *багатокритеріальної (векторної) оптимізації* (БО) розв'язуються задачі прийняття рішень одночасно за декількома критеріями. Задача БО ставиться в такий спосіб:

потрібно знайти числа $x_1, x_2,..., x_n$, що задовольняють системі обмежень

$$g_i(x_1, x_2,..., x_n) \le b_i, \; i = 1,2,\dots,m, \tag{1.1}$$

для яких функції

$$z_k = f_k(x_1, x_2,..., x_n), \; k = 1,2,\dots,K, \tag{1.2}$$

досягають максимального(мінімального) значення.

Множина точок $X = (x_1, x_2,..., x_n)$, що задовольняють системі (1.1), утворює множину *допустимих розв'язків чи допустиму область* $D \subset R^n$. Елементи множини D називаються *допустимими розв'язками* або *альтернативами*, а числові функції f_k, $k = 1,2,\dots,K$ – *цільовими функціями*, або *критеріями ефективності*, заданими на множині *D*. У формулюванні задачі (1.1)-(1.2) є K цільових функцій. Ці функції відображають множину $D \subset R^n$ в множину $F \subset R^K$, яка називається *множиною досяжності*.

У векторній формі математичну модель МБО (1.1)-(1.2) можна записати в такий спосіб:

$$\vec{f}(X) = (f_1(X),..., f_K(X)) \to \max \text{ при } X \in D. \tag{1.3}$$

де $\vec{f}(X)$ – вектор-функція аргументу $X \in D$.

Вперше проблема МБО виникла в італійського економіста В.Парето в 1904 р. при математичному дослідженні товарного обміну. Надалі інтерес до проблеми МБО підсилився у зв'язку з розробкою й використанням обчислювальної техніки, і вже пізніше стало зрозуміло, що багатокритеріальні задачі виникають також і в техніці, наприклад, при проектуванні складних технічних систем.

На відміну від задач оптимізації з одним критерієм у МБО є невизначеність цілей. Дійсно, існування розв'язку, що максимізує одночасно декілька цільових функцій, є рідкісним винятком, тому з математичної точки зору задачі МБО є некоректними, тобто якщо один з критеріїв f_k, $k \in K$, досяг свого оптимуму, то поліпшення за іншими компонентами векторного критерію неможливе. Наприклад, при знаходженні плану підприємства, що максимізує прибуток і мінімізує витрати очевидна неможливість досягнення обох цілей одночасно, тому що чим більші витрати, тим більше повинно бути продукції й тим більший прибуток. Критерії ефективності в цьому випадку називаються суперечливими.

Два критерії назвемо *суперечливими* відносно деякої множини допустимих альтернатив X, якщо покращення оцінки по одному з критеріїв на множині X супроводжується її погіршенню за іншим.

Два критерії назвемо *сильно зв'язаними* відносно деякої множини допустимих альтернатив X, якщо їх оцінки є близькими на різних альтернативах множини X, або якщо покращення оцінки за одним критерієм на множині X приводить до її покращення за іншим критерієм.

Прикладами суперечливості критеріїв в задачі планування виробництва є максимізація критерію якості продукції та мінімізація собівартості виготовлення продукції або мінімізація затрат на виробництво та максимізація прибутку; в багатокритеріальній задачі управління динамічним процесом вирощування рослинної біомаси в умовах регульованих параметрами середовища (теплиці, парники, оранжереї і т.п.) суперечливість критеріїв полягає у намаганні виростити біомасу максимального об'єму, що в свою чергу приводить до втрати якісних показників (пониження цукровості, ріст вмісту нітратів та ін.). Прикладами ж сильно зв'язаних критеріїв в задачі планування виробництва можуть служити критерії мінімізації собівартості продукції та мінімізації енергозатрат виробництва.

Через це в теорії МБО поняття оптимальності має різні тлумачення, і тому сама теорія містить три основних напрямки:

1. Розробка концепції оптимальності.

2. Доказ існування розв'язку, оптимального у декому змісті.

3. Розробка методів знаходження оптимальних розв'язків.

1.2. Оптимальність за Парето

Якщо функції $f_1, f_2,..., f_K$ досягають максимуму в одній і тій же точці $X^* \in D$, то говорять, що задача (1.3) є тривіальною і має *ідеальний розв'язок*.

Випадки існування ідеального розв'язку в багатокритеріальній задачі вкрай рідкі. Тому основна проблема при розгляді задачі (1.3) – формалізація *принципу оптимальності*, тобто визначення того, у якому змісті «оптимальний» розв'язок кращий за інших. У випадку відсутності «ідеального розв'язку» у задачі (1.3) *шукається компромісний.*

Для альтернативи $X \in D$ вектор зі значень цільових функцій $(f_1(X), f_2(X),..., f_K(X))$ є *векторною оцінкою* альтернативи X . Векторна оцінка альтернативи містить повну інформацію про цінність (корисність) цієї альтернативи для особи, що приймає рішення (ОПР). Порівняння будь-яких двох розв'язків замінюється порівнянням їх векторних оцінок.

Нехай $X_1, X_2 \in D$. Якщо для всіх критеріїв $f_1, f_2,..., f_K$ мають місце нерівності $f_k(X_2) \ge f_k(X_1)$, $k = 1,2,...,K$, причому хоча б одна нерівність строга, то говорять, що розв'язок X_2 *переважніший* розв'язку X_1. Умову переваги прийнято зазначати у вигляді $X_2 \succ X_1$.

Визначення (оптимальність за Парето). У задачі МБО точка $X_0 \in D$ називається оптимальною за Парето, якщо не існує іншої точки $X \in D$, яка була б переважніша, ніж X_0.

Точки, оптимальні за Парето, утворюють множину точок, оптимальних за Парето (множину непокращувальних розв'язків або ефективних точок) $D_p \subset D$.

Оптимальні розв'язки багатокритеріальної задачі варто шукати тільки серед елементів множини альтернатив D_p. У цій області жоден критерій не може бути покращений без погіршення хоча б одного з інших. Важливою властивістю множини Парето D_p є можливість «вибраковувати» із множини альтернатив D свідомо невдалі (що поступаються іншим альтернативам за всіма критеріями). Розв'язання багатокритеріальної задачі повинно починатися з виділення множини D_p. При відсутності додаткової інформації про систему переваг ОПР повина вибрати розв'язок саме із множини Парето D_p.

У векторній оптимізації крім множини Парето в загальному випадку немає загальних правил, за якими альтернативі X_2 віддається більша перевага в порівнянні з іншою альтернативою X_1.

Часто розв'язання багатокритеріальної задачі складається з побудови множини Парето-оптимальних точок і подальшому виборі однієї з них на основі «здорового глузду» або за допомогою якого-небудь іншого критерію.

У всіх випадках задача багатокритеріальної оптимізації деяким чином зводиться до задачі з одним критерієм (однокритеріальної). Існує багато способів побудови такого кінцевого критерію (суперкритерію), однак жодному з них не можна заздалегідь віддати найбільшу перевагу. Для кожної задачі цей вибір повинен робитися індивідуально ОПР.

Зауважимо, що цільові функції відображають множину точок, оптимальних за Парето $D_p \subset D \subset R^n$ в множину $F_p \subset F \subset R^K$, що називається *множиною Парето*.

1.3. Побудова множини Парето для двох критеріїв

Приклад 1.1. Нехай математична модель задачі МБО із двома критеріями має вигляд:

$$z_1 = 2x_1 + x_2 \to \max,$$

$$z_2 = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

при обмеженнях:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 100 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}.$$

Потрібно визначити множину точок, оптимальних за Парето.

Допустима область D являє собою чверть кола радіусу 10 із центром в початку координат, розташовану в 1-му квадранті (рис. 1.1).

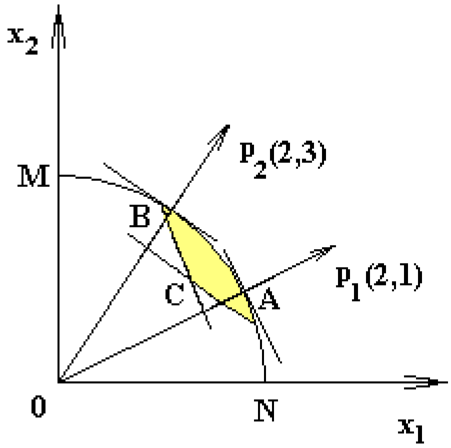


Рис. 1.1. Множина Парето-оптимальних точок

Знайдемо точки, оптимальні за критеріями z_1 і z_2 окремо. Для цього побудуємо вектори, що мають напрямки векторів $p_1(2;1)$ й $p_2(2;3)$, і перпендикулярно їм – лінії рівня. За лініями рівня визначаються оптимальні точки A і B, розміщені на колі.

Перевіримо довільну точку $C \in D$ *на Парето-оптимальність*. Через неї проведемо лінії рівня цільових функцій і розглянемо конус, утворений перетином напівплощин, обмежених цими лініями і лежачих в напрямку збільшення відповідних цільових функцій (*конус домінування для альтернативи* C). На рис. 1.1 цей конус зафарбований. Очевидно, що точку C можна поліпшити за обома критеріями, і тому вона не є ефективною. Множина ефективних точок D_p (точок, оптимальних за Парето) розташована на дузі кола AB. Таким чином, ефективні точки лежать тільки між точками оптимуму, отриманими при розв'язанні багатокритеріальної задачі окремо за кожним із критеріїв.

Знайдемо координати точки A. Нормальний вектор кола має координати $\bar{n}_1 = (2x_1; 2x_2)$, а лінії рівня 1-ої цільової функції – $\bar{n}_2 = (2;1)$. З умови колінеарності векторів слідує пропорційність координат: $\frac{2x_1}{2} = \frac{2x_2}{1}$. Таким чином, координати точки A задовольняють системі рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 = 100 \end{cases}.$$

Розв’язавши систему отримаємо точку $A\left(4\sqrt{5};\ 2\sqrt{5}\right)$. Аналогічно знайдемо, що точка B має координати $B\left(\frac{20}{\sqrt{13}};\ \frac{30}{\sqrt{13}}\right)$.

Приклад 1.2. Для задачі, сформульованої в прикладі 1.1, визначити множину допустимих розв’язків і множину Парето.

Розглянемо, що відбувається в просторі критеріїв при відображенні альтернатив вектором цільових функцій.

Складемо табл. 1.1, з характерних точок допустимої області і відповідних їм образів в просторі критеріїв.

Таблиця 1.1

Точка в області D	x_1	x_2	Образ точки в множині F	$z_1 = 2x_1 + x_2$	$z_2 = 2x_1 + 3x_2$
O	0	0	O'	0	0
M	0	10	M'	10	30
N	10	0	N'	20	20
A	$4\sqrt{5} \approx 8{,}9$	$2\sqrt{5} \approx 4{,}5$	A'	$10\sqrt{5} \approx 22{,}4$	$14\sqrt{5} \approx 31{,}3$
B	$\frac{20}{\sqrt{13}} \approx 5{,}5$	$\frac{30}{\sqrt{13}} \approx 8{,}3$	B'	$\frac{70}{\sqrt{13}} \approx 19{,}4$	$\frac{130}{\sqrt{13}} \approx 36{,}1$

Для двох заданих критеріїв на рис. 1.2 представлено множину досяжності $F \subset R^2$ і множину Парето $F_p \subset F$, що є образом множини D_p, оптимальних за Парето точок. Ці множини отримані на основі даних табл. 1.1.

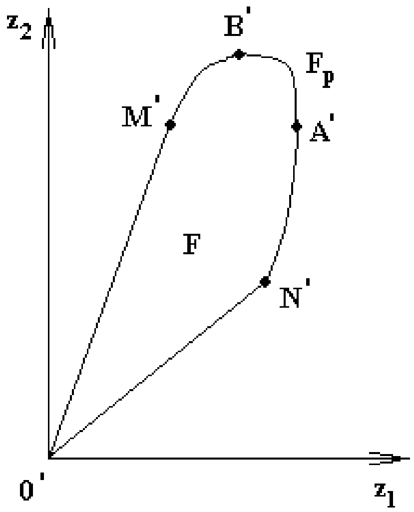


Рис. 1.2. Множина досяжності та множина Парето

Множина F_p на рис. 1.2 являє собою дугу $A'B'$. Для двох критеріїв ця множина утворює «північно-східну» границю множини досяжності.

Таким чином, розв'язком задачі МБО є множина точок, оптимальних за Парето D_p. Остаточний вибір одного розвязку завжди залишається за ОПР.

1.4. Проблематика та класифікація методів розв'язання задач багатокритеріальної оптимізації

При розв'язанні задач МБО доводиться вирішувати специфічні питання, пов'язані з невизначеністю цілей і несумістністю критеріїв.

Основні проблеми, що виникають при розробці методів МБО.

1. Проблема нормалізації критеріїв, тобто їх приведення до єдиного (безрозмірному) масштабу виміру.

2. Проблема вибору принципу оптимальності, тобто встановлення, у якому сенсі оптимальний розв'язок кращий всіх інших розв'язків.

3. Проблема визначення пріоритетів критеріїв, що виникає в тих випадках, коли з фізичного змісту ясно, що деякі критерії мають пріоритет над іншими.

4. Проблема обчислення оптимуму задачі МБО. Мова йде про те, як використати методи лінійної, нелінійної, дискретної оптимізації для обчислення оптимуму задач із певною специфікою.

При розв'язанні багатокритеріальної задачі часто виникає необхідність *нормалізації (нормування)* критеріїв $f_k(X)$, тобто приведення всіх критеріїв до єдиного масштабу та безрозмірного виду. Надалі будемо вважати, що всі критерії невід'ємні, тобто $f_k(X) \geq 0$ для всіх $X \in D$.

Найбільш часто використовується заміна критеріїв їх безрозмірними відносними величинами: $\lambda_k(X) = \dfrac{f_k(X)}{f_k^{\ *}}$, де $f_k^* = \max\limits_{X \in D} f_k(X)$. Нормалізовані критерії мають дві важливі властивості: по-перше, вони є безрозмірними величинами, і, по-друге, вони задовольняють нерівності $0 \leq \lambda_k(X) \leq 1$ для кожного $X \in D$. Ці властивості дозволяють порівнювати критерії між собою.

Основні методи, що застосовуються при розв'язанні задач МБО, представлені на рис. 1.3.

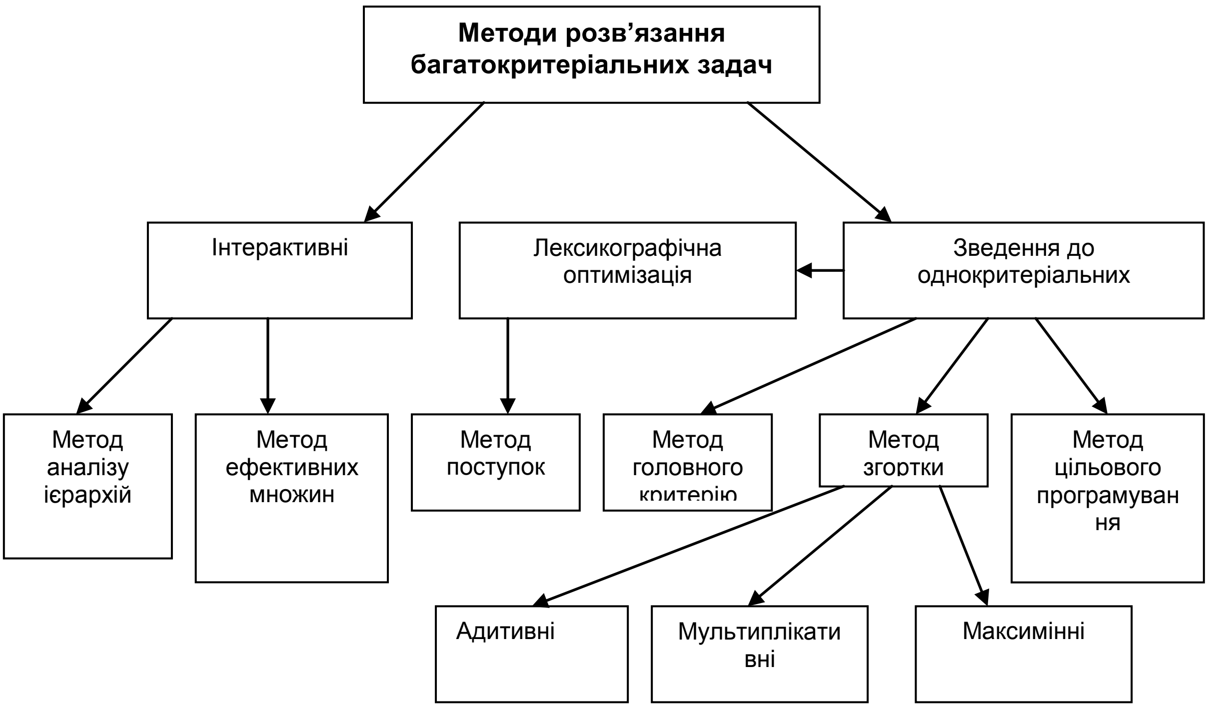


Рис. 1.3. Класифікація методів розв'язання багатокритеріальних задач

1.5. Методи, засновані на згортанні критеріїв

Замість K часткових критеріїв $f_1, f_2, ..., f_K$ розглядається один скалярний критерій, отриманий шляхом комбінації часткових критеріїв. Розрізняють адитивну і мультиплікативну згортку критеріїв.

1.5.1. Метод адитивної згортки критеріїв

Нехай критерії порівнянні, наприклад, нормовані й визначений вектор вагових коефіцієнтів критеріїв $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_K)$, що характеризують важливість відповідного критерію. Тобто $\alpha_i \geq \alpha_j$, якщо критерій f_i має пріоритет над критерієм f_j. При цьому

$$\sum_{k=1}^{K} \alpha_k = 1, \ \alpha_k \geq 0 .$$

Для *адитивного* методу будується нова цільова функція

$$f(X) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k f_k(X)$$

і розв'язується задача оптимізації скалярного критерію

$$z = f(X) \to \max \ \text{за умови} \ X \in D .$$

Основною перевагою адитивної згортки є те, що з нею пов'язані «класичні», достатні і необхідні, умови оптимальності за Парето. Але, водночас, при цьому часто отриманий розв'язок є нестійким, тобто малим приростам вагових коефіцієнтів відповідають великі прирости цільових функцій.

Приклад 1.3. Розглянемо задачу МБО із двома критеріями

$$z_1 = x_1 \to \max$$

$$z_2 = x_2 \to \max$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}.$$

Розв'яжемо задачу оптимізації за кожним критерієм окремо. Використовуючи графічний метод (рис. 1.4а), одержимо оптимальний розв'язок за першим критерієм $X_1^* = (2;0)$ й оптимальний розв'язок за другим критерієм $X_2^* = (0;1)$.

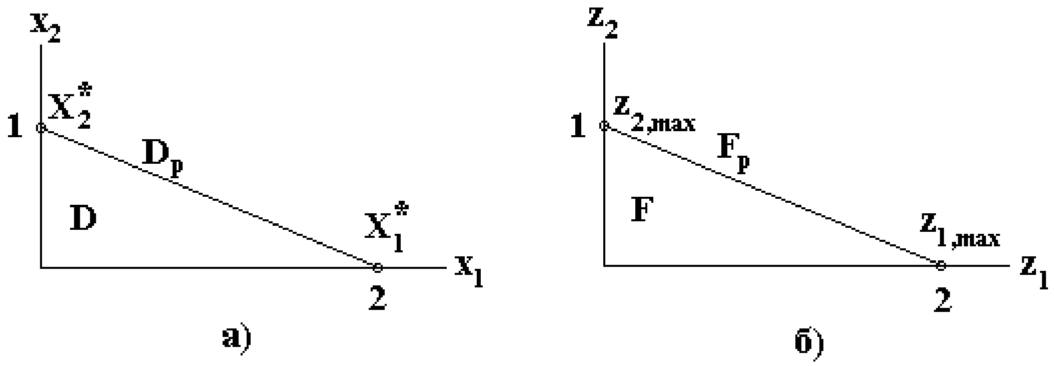


Рис. 1.4. Графічна інтерпретація розв'язання задачі оптимізації за двома локальними критеріями

На рис. 1.4б зображена множина досяжності F і зазначені значення $z_{1,\max} = 2$ й $z_{2,\max} = 1$. Виконаємо згортку критеріїв:

$$z = \alpha_1 f_1(X) + \alpha_2 f_2(X) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \to \max ,$$

де $\alpha_1 + \alpha_2 = 1,\ \alpha_1 \ge 0,\ \alpha_2 \ge 0$.

Цільова функція є лінійною, тому залежно від α_1 та α_2 оптимальними будуть кутові точки допустимої області X_1^*, або X_2^*, або всі точки відрізку $X_1^* X_2^*$. Якщо, $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$, то отримаємо оптимальний розв'язок $X^* = X_1^* = (2;0)$.

1.5.2. Метод мультиплікативної та мінімаксної згортки критеріїв

Для *мультиплікативного* методу підхід до розв'язання аналогічний, тільки цільова функція має вигляд

$$f(X) = \prod_{k=1}^{K} f_k^{\alpha_k}(X), \text{ причому } \sum_{k=1}^{K} \alpha_k = 1,\ \alpha_k \ge 0 .$$

Логічним поясненням мультиплікативного методу є уявлення про ваги критеріїв, як про ймовірності досягнення деяких показників якості.

Крім того, досить часто використовують мінімаксну згортку та згортку мінімальної оптимальності відповідно:

$$F^0 = \max_{k \in [1,K]} f_k(X) \to \min ,$$

$$F^0 = \sum_{k=1}^{K} f_k(X) \to \min .$$

Основний і дуже істотний недолік методів згортання критеріїв полягає в суб'єктивності вибору коефіцієнтів α_k .

1.6. Метод задоволених вимог (головного критерію)

Визначається основний (головний) серед критеріїв. Наприклад, $f_1(X)$. Всі інші цільові функції переводяться в розряд обмежень за наведеним нижче правилом.

Відповідно до вимог ОПР на всі критерії накладаються певні обмеження, яким вони повинні задовольняти. Уводиться система контрольних показників (мінімально допустимих рівнів) $\tilde{f}_k$, щодо яких за всіма критеріями повинні бути досягнуті значення, не менші заданих величин $\tilde{f}_k$:

$$f_k(X) \ge \tilde{f}_k , \ k = 1,2,\ldots,K .$$

Після вибору основного критерію та встановлення нижніх границь для інших критеріїв розв'язується задача однокритериальної оптимізації:

$$f_1(X) \to \max$$

при умовах

$$\begin{cases} f_k(X) \ge \tilde{f}_k , \ k = 1,2,\ldots,K \\ X \in D \end{cases} .$$

Цей спосіб найбільш уживаний в інженерній практиці.

Зауважимо, що розв'язок, отриманий даним методом може і не бути ефективним.

Приклад 1.4. Методом головного критерію розв'язати задачу із прикладу 1.3.

Призначимо значення контрольних показників: $\tilde{f}_1 = 0{,}4$, $\tilde{f}_2 = 0{,}4$, і нехай перший критерій обраний у якості основного. Тоді отримаємо однокритеріальну задачу:

$$z_1 = x_1 \to \max$$

при умовах

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 2 \\ x_2 \ge 0{,}4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}.$$

З рис. 1.4а очевидно, що оптимальним розв'язком є точка $X^* = (1{,}2;\ 0{,}4)$, $z_{\max} = 1{,}2$.

1.7. Метод послідовних поступок

Критерії нумеруються в порядку спадання важливості. Нехай критерії вже $f_1, f_2, ..., f_K$ записані в порядку зменшення їх важливості [1].

1-й крок. Вирішується однокритеріальна задача за 1-м критерієм:

$$z_1^* = \max_{X \in D} f_1(X).$$

2-й крок. Призначається розумна з інженерної точки зору поступка Δz_1, складається й вирішується нова задача оптимізації за 2-м критерієм:

$$z_2^* = \max_{\substack{X \in D \\ f_1(X) \ge z_1^* - \Delta z_1}} f_2(X).$$

3-й крок. Призначається поступка для 2-го критерію Δz_2, складається й вирішується задача оптимізації за 3-м критерієм:

$$z_3^* = \max_{\substack{X \in D \\ f_1(X) \ge z_1^* - \Delta z_1 \\ f_2(X) \ge z_2^* - \Delta z_2}} f_3(X).$$

Процес призначення поступок за кожним критерієм і розв'язок однокритеріальних задач триває до останнього K – го кроку.

K*-й крок.* Призначається поступка для $K-1$ – го критерію Δz_{K-1}, складається й вирішується задача оптимізації за останнім K – вим критерієм:

$$z_K^* = \max_{\substack{X \in D \\ f_1(X) \ge z_1^* - \Delta z_1 \\ f_2(X) \ge z_2^* - \Delta z_2 \\ \dots \\ f_{K-1}(X) \ge z_{K-1}^* - \Delta z_{K-1}}} f_K(X).$$

Основний недолік методів, що використають обмеження критеріїв, полягає в суб'єктивності вибору контрольних показників та в суб'єктивності вибору поступок. При використанні методу послідовних поступок варто пам'ятати, що поступки можуть бути непорівнянні між собою, тому треба попередньо організувати нормалізацію критеріїв. Крім того, в загальному випадку вже з 2-го кроку розв'язок може бути не оптимальним за Парето.

Приклад 1.6. [1] Методом послідовних поступок розв'язати наступну трьохкритеріальну задачу:

$$\begin{aligned} &2x_1 + x_2 \to \max, \\ &x_1 + 2x_2 \to \max, \\ &-x_1 - x_2 \to \max, \\ &x_1 + x_2 \le 5, \\ &0 \le x_{1,2} \le 4. \end{aligned}$$

На рисунку 1.4 зображена множина альтернатив X; лінії рівнів першого й другого критеріїв, відповідно (1), (2), (3); x', x'', x''' – найкращі, відповідно за першим, другим і третім критеріями задачі, альтернативи. Будемо вважати, що критерії вже впорядковані за спаданням їх важливості і знайдемо максимум першого критерію на множині альтернатив:

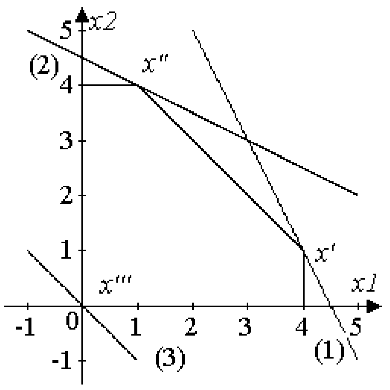


Рис. 1.4.

$$\begin{aligned} &2x_1 + x_2 \to \max, \\ &x_1 + x_2 \le 5, \\ &0 \le x_{1,2} \le 4. \end{aligned}$$

Отримаємо ефективну альтернативу $x' = (4,1)$, яка має оцінку $y^1 = (9, 6, -5)$. Припустимо, що отриманий результат не задовольняє ОПР. Тоді визначимо величину поступки Δf_1, на яку можна погодитися, щоб покращити значення інших критеріїв. Нехай $\Delta f_1 = 1$, "уточнена" множина альтернатив: $G_2 = \{x : x \in X, f_1(x) \ge y_1^1 - \Delta f_1 = 8\}$.

На другому кроці максимізуємо другий критерій на уточненій множині альтернатив:

$$\begin{aligned}&x_1 + 2x_2 \to \max,\\&x_1 + x_2 \le 5,\\&0 \le x_{1,2} \le 4,\\&2x_1 + x_2 \ge 8.\end{aligned}$$

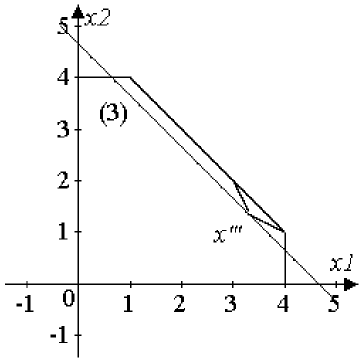


Рис. 1.5.

З рисунка 1.5 бачимо, що розв'язком задачі буде ефективна альтернатива $x''=(3,2)$, яка має оцінку $y^2=(8,7,-5)$. Припустимо, що отриманий результат також не задовольняє ОПР. Тоді визначимо величину поступки Δf_2, на яку можна погодитися, щоб покращити значення третього критерію. Нехай $\Delta f_2 = 1$ "уточнена" множина альтернатив: $G_3 = \{x : x \in G_2, f_2(x) \ge y_2^2 - \Delta f_2 = 6\}$.

Тепер (крок 3) на цій множині максимізуємо третій критерій:

$$\begin{aligned}&-x_1 - x_2 \to \max,\\&x_1 + x_2 \le 5,\\&0 \le x_{1,2} \le 4,\\&2x_1 + x_2 \ge 8,\\&x_1 + 2x_2 \ge 6.\end{aligned}$$

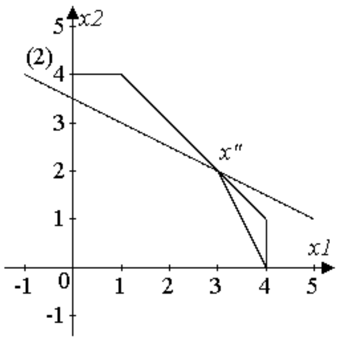


Рис. 1.6.

Звідси (це можна побачити на Рис. 1.6) знаходимо ефективну альтернативу $x^3 = \left(\frac{10}{3}; \frac{4}{3}\right)$, яка має оцінку $y^3 = \left(8, 6, -4\tfrac{2}{3}\right)$.

Якщо ОПР не влаштовують отримані результати, вона повертається на відповідний крок, де була зроблена (на думку ОПР) невірна поступка. В іншому випадку процедура закінчується.

1.8. Методи цільового програмування (ідеальної точки)

Назва цієї групи методів зав'язана з тим, що ОПР задає певні цілі $\bar{f}_1, \bar{f}_2, ..., \bar{f}_K$ для кожного критерію. Ці методи не використовують допоміжну інформацію від ОПР про перевагу на множині критеріїв. Це може відбуватися, коли в ОПР ця інформація відсутня або, при наявності, її не можна застосувати з деяких причин. В цьому випадку робиться припущення про наявність, так званого, "оптимального" розв'язку задачі багатокритеріальної оптимізації, який може бути знайдено шляхом перетворення багатокритеріальної задачі у відповідну скаляризовану (однокритеріальну) задачу.

Задача МБО в цьому випадку перетвориться в задачу мінімізації суми відхилень із деяким заказником p:

$$z=\left(\sum_{k=1}^{K} w_k \left| f_k(X)-\bar{f}_k \right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \to \min, \text{ при } X\in D, \tag{1.10}$$

де w_k – деякі вагові коефіцієнти, що характеризують важливість того або іншого критерію.

Задачу (1.10) можна конкретизувати залежно від значень параметра p та заданих цілей. Зокрема, при $p=2$ і $w_k=1$ одержимо задачу мінімізації суми квадратів відхилень:

$$z=\sqrt{\sum_{k=1}^{K} \left| f_k(X)-f_k^* \right|^2} \to \min \text{ при } X\in D,$$

у якій мінімізується евклідова відстань від множини досяжності F до «абсолютного максимуму» (ідеальної точки) $f^*=\left(f_1^*, f_2^*,..., f_l^*\right)$ в просторі критеріїв. Тут $f_k^*=\max\limits_{X\in D} f_k(X)$. Тобто, правило вибору компромісу R у цьому методі полягає у знаходженні альтернативи, яка має оцінку, що є найближчою до ідеальної точки в деякій метриці.

Ускладнення, обумовлені несумірністю величин $\left|f_k(X)-f_k^*\right|$, можна перебороти за допомогою нормалізації критеріїв, розглядаючи наступну задачу оптимізації:

$$z=\sqrt{\sum_{k=1}^{K}\left(\frac{\left|f_k(X)-f_k^*\right|}{f_k^*}\right)^2} \to \min \text{ при } X\in D. \tag{1.11}$$

Приклад 1.7. Методом цільового програмування розв’язати задачу МБО із прикладу 1.3.

В умовах прикладу 1.3 маємо $f_1^* = 2$, $f_2^* = 1$, тому задача (1.11) прийме вигляд:

$$z = \sqrt{\frac{(x_1 - 2)^2}{4} + \frac{(x_2 - 1)^2}{1}} \to \min,$$

при умовах

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}.$$

При постійному значенні z лінії рівня цільової функції $\frac{(x_1 - 2)^2}{(2z)^2} + \frac{(x_2 - 1)^2}{z^2} = 1$ являтимуть собою еліпси із центром у точці $M(2; 1)$ та півосями $a = 2z$ й $b = z$. Необхідно знайти мінімальне значення z, для якого відповідний еліпс буде мати спільні точки з областю D. На рис. 1.7 показано графічний розв’язок даної задачі.

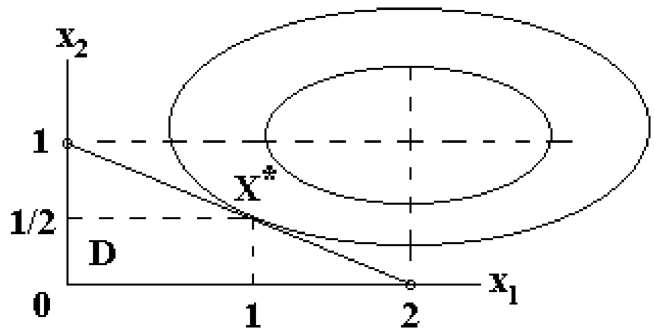


Рис. 1.7.

Оптимальною є точка $X^* = (1; 1/2)$.

Приклад 1.8. [1] Методом ідеальної точки розв'язати наступну задачу:

$$\begin{aligned} &3x_1 + x_2 \to \max, \\ &x_1 + 2x_2 \to \max, \\ &x_1 + x_2 \le 5, \\ &0 \le x_{1,2} \le 4. \end{aligned}$$

Визначимо ідеальну точку: $a = (a_1, a_2): a_i = \max_{y \in Y} y_i = \quad = \max_{x \in X} f_i(x),\ i = 1,2.$ На рисунку 1.8 зображена множина альтернатив X;

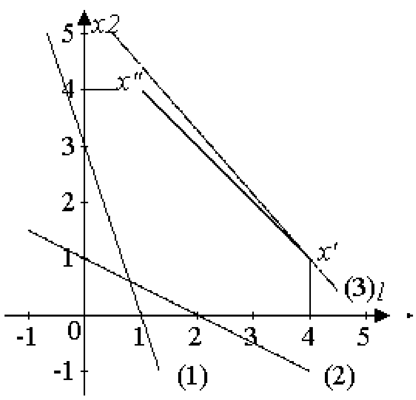


Рис. 1.8.

лінії рівнів першого й другого критеріїв, відповідно (1), (2); $x' = (4,1)$, $x'' = (1,4)$ – найкращі відповідно за першим й другим критерієм задачі альтернативи, $a_1 = 13$, $a_2 = 9$ (максимуми 1-го та 2-го критеріїв). Таким чином, $a = (13,9).$ Розглянемо випадки що пов'язані з вибором різних метрик.

Випадок 1. При $s = 1$ скаляризована задача має вигляд:

$$\max_{x \in X} \sum_{i=1}^{m} \frac{f_i(x)}{a_i - f_i^{\min}}.$$

З врахуванням того, що мінімальні значення критеріїв задачі дорівнюють нулю, отримаємо наступну задачу лінійного програмування:

$$\begin{aligned} &8x_1 + 7x_2 \to \max, \\ &x_1 + x_2 \le 5, \\ &0 \le x_{1,2} \le 4. \end{aligned}$$

З Рис. 1.8 неважко бачити, що оптимальним розв'язком скаляризованої задачі (на Рис. 1.8 зображена лінія рівня (3) цільової функції скаляризованої задачі) буде точка $x' = (4,1)$, яка і вважається шуканою ефективною альтернативою вихідної задачі.

1.9. Методи гарантованого результату

Розглядаються методи, які дають найкращий результат навіть для самого найменшого із критеріїв, тобто, компромісний розв’язок отримується шляхом розв’язання наступної задачі оптимізації:

$$z = \min_{k=1,2,\ldots,K} f_k(X) \to \max \text{ при } X \in D.$$

З врахуванням нормалізації критеріїв методи гарантованого результату утворюють найбільш перспективний напрямок у розвязанні задач МБО.

Для нормалізованих критеріїв $\lambda_k(X) = \dfrac{f_k(X)}{f_k^*}$, де $f_k^* = \max_{X \in D} f_k(X)$, максимінна задача формулюється у вигляді:

$$z = \min_{k=1,2,\ldots,K} \lambda_k(X) \to \max \text{ при } X \in D. \qquad (1.12)$$

Зупинимося на розгляді двох випадків, коли критерії рівнозначні та нерівнозначні (із заданим пріоритетом).

Рівнозначні критерії

Задача (1.12) еквівалентна задачі

$$z = \lambda \to \max \tag{1.13}$$

при умовах

$$\begin{cases} \lambda \le \lambda_k(X), \; k = 1,2,\ldots,K \\ X \in D \end{cases}. \tag{1.14}$$

Задача (1.13)-(1.14) називається λ-задачею. Вона має лінійну цільову функцію та $m + K$ обмежень. Якщо всі функції f_k й g_i лінійні, то λ-задача відноситься до лінійного програмування. У цьому випадку доведено, що оптимальний розв'язок X^* λ-задачі оптимальний за Парето.

Приклад 1.9. Потрібно вирішити задачу із прикладу 1.3 методом гарантованого результату з рівнозначними критеріями. Складемо λ-задачу:

$$z = \lambda \to \max$$

при умовах

$$\begin{cases} \lambda \le \dfrac{x_1}{2} \\ \lambda \le x_2 \\ x_1 + 2x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0, \; x_2 \ge 0, \; \lambda \ge 0 \end{cases}.$$

Оптимальний розв'язок цієї задачі є $X^* = \left(1; \, ^1\!/_2\right)$, $\lambda^* = {}^1\!/_2$.

Критерії із заданим пріоритетом

Розглянемо тільки два критерії $f_1(X)$ та $f_2(X)$, і нехай $\lambda_1(X)$ й $\lambda_2(X)$ – відповідні нормалізовані критерії. Розіб'ємо допустиму область на дві частини $D = D_1 \cup D_2$ так, що в області D_1 виконувалась нерівність $\lambda_1(X) > \lambda_2(X)$, тобто перший критерій мав пріоритет над другим, а в області D_2 виконувалась нерівність $\lambda_1(X) \le \lambda_2(X)$, тобто другий критерій мав пріоритет над першим.

Для числової характеристики пріоритету вводиться коефіцієнт зв'язку $p(X)$: $\lambda_1(X) = p(X)\lambda_2(X)$, що показує, у скільки разів відносна оцінка $\lambda_1(X)$ більша $\lambda_2(X)$. Якщо X^* – оптимальна точка для рівнозначних критеріїв, то $p(X^*) = 1$.

Якщо X_1^* – точка оптимуму за 1-м критерієм, де $\lambda_1(X_1^*)=1$, $\lambda_2(X_1^*)<1$, тобто $X_1^* \in D_1$, і значить $p(X_1^*)>1$. Аналогічно, якщо X_2^* – точка оптимуму за 2-м критерієм, де $\lambda_1(X_2^*)<1$, $\lambda_2(X_2^*)=1$, то значить $p(X_2^*)<1$.

Нехай перший критерій має пріоритет над другим. Тоді коефіцієнт $p(X)$ необхідно задати в інтервалі $(1; p(X_1^*))$, а далі скласти й розв’язати λ-задачу, включивши в систему обмежень рівність $\lambda_1(X)=p(X)\lambda_2(X)$. В результаті одержимо точку X^*, що буде належати множині D_1, де 1-ий критерій має пріоритет над 2-им.

Доведено, що для опуклих задач МБО точка X^*, що є розв’язком λ-задачі, єдина й оптимальна за Парето.

Приклад 1.10. Потрібно розв’язати задачу із прикладу 1.3 методом гарантованого результату з нерівнозначними критеріями за умови, що 1-ий критерій має пріоритет над 2-им.

Так як $X_1^*=(2;0)$, де $\lambda_1(X_1^*)=1$, $\lambda_2(X_1^*)=0$, отже, $p(X_1^*)=\frac{1}{0}=\infty$. В інтервалі $(1;\ \infty)$ задамо коефіцієнт зв'язку $p(X)=2$. Тоді $\lambda_1(X)=2\lambda_2(X)$, або $\frac{x_1}{2}=2x_2$. Складемо λ-задачу:

$$z=\lambda \to \max$$

при умовах

$$\begin{cases} \lambda \le \frac{x_1}{2} \\ \lambda \le x_2 \\ \frac{x_1}{2}=2x_2 \\ x_1+2x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ \lambda \ge 0 \end{cases}.$$

У результаті розв’язання задачі одержимо оптимальну точку:

$$X^*=\left(4/3;\,1/3\right),\ \lambda^*=1/3.$$

Недолік розглянутого методу полягає в суб'єктивності задання коефіцієнта зв'язку $p(X)$.

Розв’язок задачі МБО методом гарантованого результату, як правило, проходить наступні етапи.

- Розробка математичної моделі системи на основі заданих цілей та обмежень; при цьому часто використовується думка експертів.
- Попередній аналіз системи окремо за кожним частковим критерієм; використовують методи й програмні засоби однокритеріальної оптимізації.
- Нормалізація критеріїв.
- Розв’язок задачі МБО при рівнозначних критеріях.
- Визначення пріоритетів критеріїв і розв’язок задачі МБО із призначеними пріоритетами.

1.10. Метод послідовного вводу обмежень

Характерною особливістю цієї діалогової процедури є послідовне (на кожному кроці) введення обмежень на альтернативи, які мають незадовільні, з точки зору ОПР, значення критеріїв [1].

k -й крок (*k*=1,2,…). Обчислюються оптимальні значення кожного критерію окремо на "уточненій" множині альтернатив:

$$f_i^{*(k)} = \max_{x \in G_k} f_i(x),\ i = \overline{1,m};\ G_1 \equiv X;$$

і формується вектор "ідеальної" оцінки на уточненій множині альтернатив: $f^{*(k)} = (f_1^{*(k)},...,f_m^{*(k)})$. Далі визначається вагові коефіцієнти критеріїв $\alpha_1^{(k)},...,\alpha_m^{(k)}$ наступним способом. Складається матриця $\sigma^{(k)} = (\sigma_{ij}^{(k)})_{i,j=\overline{1,m}}$ переваг ОПР на множині критеріїв, кожна пара симетричних елементів якої $(\sigma_{ij}^{(k)},\sigma_{ji}^{(k)})$ характеризує відносну важливість i -го критерію у порівнянні з j -м. Значення кожної пари елементів цієї матриці вибирається так: (8,1) – при подавляючій перевазі i -го критерію над j -м; (4,1) – при значній перевазі; (2,1) – при "звичайній" перевазі; (1,1) – при рівноцінності критеріїв. Тепер розраховуються вагові коефіцієнти критеріїв за наступною формулою: $\alpha_i^{(k)} = (\sum_{s=1}^{m}\sigma_{is})/(\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{m}\sigma_{rs}),\ i = \overline{1,m}.$ У результаті розв'язку задачі: $\max_{x \in G_k} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^{(k)} f_i(x),$ визначається альтернатива x^k та її оцінка $y^k = (f_1(x^k),..., f_m(x^k))$.

ОПР аналізує отриману альтернативу та оцінку y^k шляхом її співставлення з "ідеальною" оцінкою $f^{*(k)}$. Якщо оцінка y^k задовольняє ОПР, то процедура закінчується, а альтернатива x^k приймається за розв'язок вихідної задачі. Інакше, вказується номер $s \in \{1,..., m\}$ критерію, значення якого найменш, на думку ОПР, його задовольняє; визначається, до якого рівня ξ_s потрібно покращити значення цього критерію, формується нова "уточнена" множина альтернатив $G_{k+1} = \{x \in G_k \mid f_s(x) \geq \xi_s\}$ і здійснюється перехід на наступний крок.

Приклад 1.11. [1] Методом послідовного вводу обмежень розв'язати наступну двохкритеріальну задачу:

$$2x_1 + x_2 \to \max, \quad x_1 + 2x_2 \to \max,$$
$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 4, \; x_{1,2} \geq 0.$$

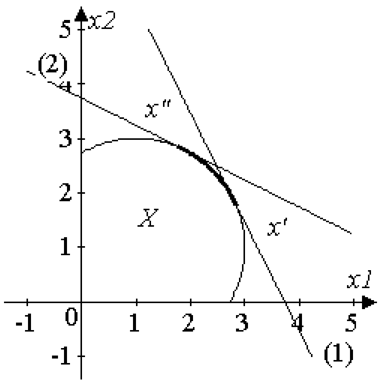


Рис. 1.9.

На рисунку 1.9 зображена множина альтернатив X; лінії рівнів першого й другого критеріїв, відповідно (1) і (2); $x' = (4\sqrt{5}/5 + 1, 2\sqrt{5}/5 + 1)$, $x'' = (2\sqrt{5}/5 + 1, 4\sqrt{5}/5 + 1)$ – найкращі, відповідно за першим і другим критерієм задачі, альтернативи.

Крок 1. Обчислюємо оптимальні значення кожного критерію окремо на всій множині альтернатив і отримуємо вектор "ідеальної" оцінки $f^{*(1)} \approx (7.5, 7.5)$. Нехай перший критерій значно переважає другий. Тоді матриця переваг критеріїв буде мати такий вигляд: $\sigma^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Обчислюємо вагові коефіцієнти критеріїв $\alpha_1^{(1)} = \frac{4+1}{4+1+1+1} = \frac{5}{7}$, $\alpha_2^{(1)} = \frac{1+1}{7} = \frac{2}{7}$. Із задачі:

$$\frac{5}{7}(2x_1 + x_2) + \frac{2}{7}(x_1 + 2x_2) = \frac{3}{7}(4x_1 + 3x_2) \to \max,$$
$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 4, \; x_{1,2} \geq 0,$$

визначимо ефективну альтернативу $x^1 = (13/5, 11/5)$ та її оцінку $y^1 = (7.4, \; 7)$. Нехай ми вирішили, що в результаті порівняння отриманої оцінки і "ідеальної" оцінки

$f^{*(1)} \approx (7.5, 7.5)$ другий критерій приймає неприпустимо мале значення. Встановимо мінімальний рівень цього критерію $\xi_2 = 7.2$, отримаємо "уточнену" множину альтернатив $G_2 = \{x \in G_1 \equiv X | x_1 + 2x_2 \ge 7.2\}$.

Крок 2. На рисунку 1.10 зображено множину G_2.

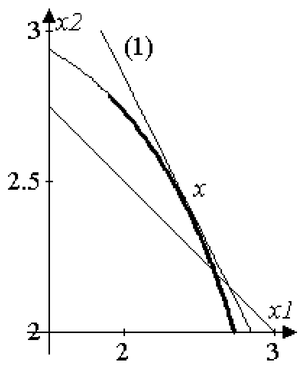


Рис. 1.10.

Обчислюємо оптимальні значення кожного критерію окремо на "уточненій" множині альтернатив і отримаємо вектор "ідеальної" оцінки $f^{*(2)} \approx (7.28, 7.5)$. Нехай тепер критерії рівноцінні для ОПР. Тоді матриця переваг критеріїв буде мати такий вигляд: $\sigma^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Обчислюємо вагові коефіцієнти критеріїв

$$\alpha_1^{(1)} = \frac{1+1}{1+1+1+1} = \frac{1}{2},\ \alpha_2^{(1)} = \frac{1+1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Розв'язавши задачу:

$$\frac{1}{2}(2x_1 + x_2) + \frac{1}{2}(x_1 + 2x_2) = \frac{3}{2}(x_1 + x_2) \to \max,$$
$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \le 4,\ x_1 + 2x_2 \ge 7.2, x_{1,2} \ge 0,$$

визначимо ефективну альтернативу $x^2 = (\sqrt{2}+1, \sqrt{2}+1)$ та її оцінку $y^1 = (2\sqrt{2}+2,\ 2\sqrt{2}+2) \approx (4.82,\ 4.82)$ (на Рис. 1.10 зображені: (1) – лінія рівня цільової функції задачі, x – розв'язок задачі). Якщо отримана ефективна альтернатива та її оцінка задовольняють ОПР, то процедура закінчується. У протилежному випадку – перехід на наступний крок.

В цьому методі можуть використовуватися й інші способи виявлення переваг $\alpha_1^{(k)},...,\alpha_m^{(k)}$ на множині критеріїв. Наприклад, нехай x^{il} – альтернатива, яка максимізує l – й критерій на множині $G_i; f_i^{*(k)}, f_i^{\min(k)}$ –відповідно найкраще та найгірше значення i – го критерію на цій множині. Далі, для $i = \overline{1,m}$, обчислюються величини : чи $\delta_i^{(k)} = \max\limits_{l=1,m} \dfrac{f_i^{*(k)} - f_i(x^{il})}{f_i^{*(k)} - f_i^{\min(k)}}$, чи $\delta_i^{(k)} = \dfrac{1}{m}\sum\limits_{l=1}^{m} \dfrac{f_i^{*(k)} - f_i(x^{il})}{f_i^{*(k)} - f_i^{\min(k)}}$, відповідно чи максимальне, чи середнє відносне відхилення від найкращого значення i – го критерію на альтернативах, що максимізують інші критерії. Вагові коефіцієнти критеріїв визначаються за формулою:

$$\alpha_i^{(k)} = \delta_i^{(k)} / (\sum_{j=1}^{m} \delta_j^{(k)}), i = \overline{1,m}.$$

Метод використовує два типи інформації від ОПР: інформацію про відносну важливість критеріїв та інформацію про діапазони значень критеріїв.

1.11. Метод бажаної точки

Особливістю цієї діалогової процедури є необхідність задання ОПР бажаних значень критеріїв для визначення переваги на множині критеріїв.

0 -крок. Розраховуються "найкращі" і "найгірші" значення критеріїв: $f_i^* = \max_{x \in X} f_i(x), h_i^* = \min_{x \in X} f_i(x),\ i = \overline{1,m}$, здійснюється монотонне перетворення критеріїв до нормованого безрозмірного вигляду:

$$w_i(x) = \frac{f_i^* - f_i(x)}{f_i^* - h_i^*},\ i = \overline{1,m}.$$

k -й крок (k=1,2,…). ОПР аналізує отриманий на попередньому кроці розв'язок та його оцінку у порівнянні з "найкращими" і "найгіршими" значеннями критеріїв і вказує бажані значення критеріїв $\xi_i^k \in [h_i^*, f_i^*],\ i = \overline{1,m}.$

Здійснюється перетворення бажаних значень цільових функцій до нормованого безрозмірного вигляду $w_i^k = \frac{f_i^* - \xi_i^k}{f_i^* - h_i^*},\ i = \overline{1,m}$.

Обчислюються вагові коефіцієнти критеріїв:

$$\rho_i^k = (\prod_{j=1, j\neq i}^{m} w_j^k) / (\sum_{j=1}^{m} \prod_{l=1, l\neq j}^{m} w_l^k),\ i = \overline{1,m}.$$

Ефективна альтернатива x^k знаходиться як розв'язок однокритеріальної задачі: $\max_{x \in X} \min_{i=\overline{1,m}} \rho_i^k w_i(x)$. Обчислюється оцінка $y^k = (f_1(x^k),..., f_m(x^k))$. Якщо отримані значення цільових функцій задовольняють ОПР, то процедура закінчується, у протилежному випадку – переходимо на наступний крок. Цей метод використовує тільки один тип інформації від ОПР про бажані значення критеріїв.

Приклад 1.12. [1] Розв'язати методом бажаної точки наступну задачу:

$$2x_1 + x_2 \to \max,$$
$$x_1 + 2x_2 \to \max,$$
$$x_1 + x_2 \le 5,$$
$$0 \le x_{1,2} \le 4.$$

На рисунку 1.11 зображена множина альтернатив X; лінії рівнів першого й другого критеріїв, відповідно (1), (2); $x' = (4,1),\ x'' = (1,4)$ – найкращі, відповідно за першим і другим критерієм задачі, альтернативи.

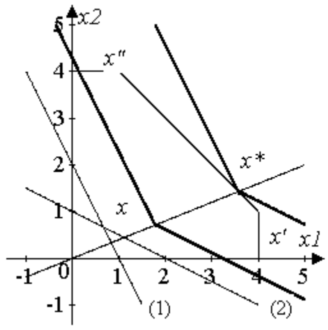


Рис. 1.11.

0 – крок. Обчислюємо "найкращі" і "найгірші" значення критеріїв: $f_1^* = 9,\ h_1^* = 0,\ f_2^* = 9, h_2^* = 0$ і здійснимо монотонне перетворення критеріїв до нормованого безрозмірного вигляду:

$$w_1(x) = \frac{9 - 2x_1 - x_2}{9 - 0},\ w_2(x) = \frac{9 - x_1 - 2x_2}{9 - 0}.$$

Крок 1. ОПР вказує бажані значення критеріїв $\xi_i^1 \in [0,9],\ i = \overline{1,2}.$ Нехай, наприклад, $\xi_1^1 = 3\,{}^6\!/_7,\ \xi_2^1 = 5\,{}^1\!/_7$. Здійснюємо перетворення бажаних значень цільових функцій до нормованого безрозмірного вигляду: $w_1^1 = \frac{9 - 3\,{}^6\!/_7}{9} = \frac{4}{7},\ w_2^1 = \frac{9 - 5\,{}^1\!/_7}{9} = \frac{3}{7}$.

Обчислюємо вагові коефіцієнти критеріїв:

$$\rho_1^1 = \frac{{}^3\!/_7}{{}^3\!/_7 + {}^4\!/_7} = \frac{3}{7},\ \rho_2^1 = \frac{{}^4\!/_7}{{}^3\!/_7 + {}^4\!/_7} = \frac{4}{7}.$$

Ефективну альтернативу x^1 знаходимо як розв'язок задачі:

$$\min\left\{\frac{3}{7}(2x_1 + x_2), \frac{4}{7}(x_1 + 2x_2)\right\} \to \max,\ \ x_1 + x_2 \le 5,\ 0 \le x_{1,2} \le 4.$$

На рисунку 1.11 бачимо лінії рівнів $\frac{90}{49}$ і $\frac{180}{49}$ цієї функції, які утворюють кути вершини яких x і x^* знаходяться на прямій $2x_1 = 5x_2$, що визначається умовою рівності аргументів функції $\min\left\{\frac{3}{7}(2x_1 + x_2), \frac{4}{7}(x_1 + 2x_2)\right\}$, а бокові сторони паралельні лініям рівня відповідних критеріїв початкової двохкритеріальної задачі. Рівень $180/49$ буде максимальним значенням функції, а точка $x^{(1)} = x^* = (25/7, 10/7)$ буде оптимальним розв'язком цієї задачі. Обчислюємо оцінку $y^1 = (60/7, 45/7)$. Якщо отримані значення критеріїв задовольняють ОПР, то процедура закінчується, у протилежному випадку – переходимо на наступний крок.

II. Розв'язання задач лінійного програмування в середовищі *Excel*

2.1. Автоматизація процесу розв'язання однокритеріальних задач лінійного програмування

Для розв'язання оптимізаційних задач можна використовувати надбудову «Пошук рішення» табличного редактора *Excel*. В *Microsoft Office Excel* 2007 надбудова «Пошук рішення» доступна на вкладці **Дані** в групі **Аналіз**. Якщо вона ще не завантажена, її необхідно завантажити. Необхідну інструкцію можна знайти в **Довідці** (рис. 2.1).

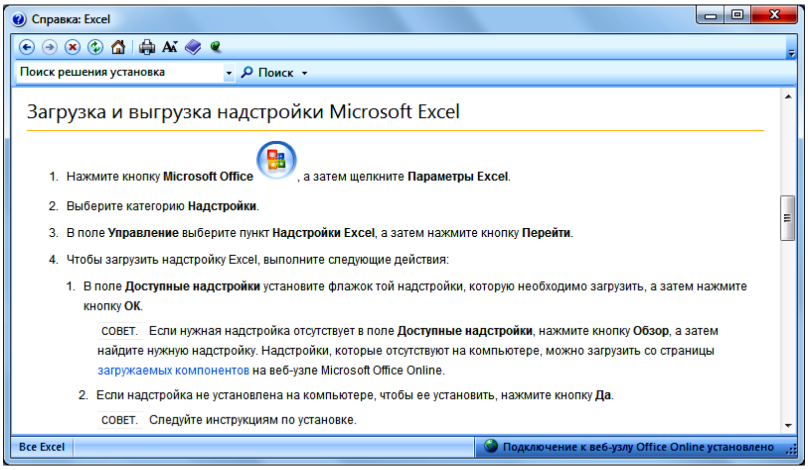


Рис. 2.1

Після завантаження надбудова «Пошук рішення» з'явиться на вкладці **Дані** в групі **Аналіз** (рис. 2.2).

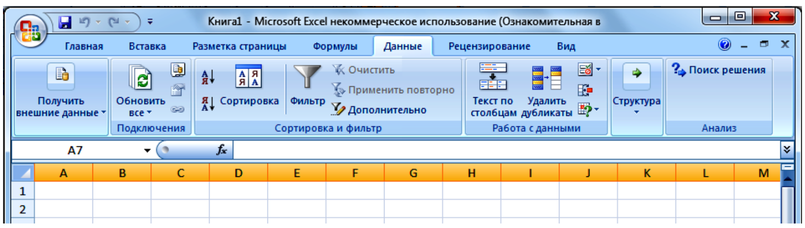


Рис. 2.2

Розглянемо розв'язання задачі в табличному редакторі *Excel* за допомогою інструменту «Пошук рішення».

Приклад 2.1. (*Вибір оптимального раціону харчування*). Нехай добовий раціон харчування для однієї дитини включає два продукти харчування: суміш № 5 та рис, причому суміш № 5 повинна ввійти в денний раціон не більше як 400 гр. Вартість 100 гр суміші № 5 становить 0,7 у.о., рису — 0,9 у.о.. Вміст поживних речовин в 100 гр продукту та мінімальні норми споживання зазначені в наступный таблиці. Визначити оптимальний раціон харчування, вартість якого буде найменшою.

Поживні речовини	Мінімальна норма споживання, гр	Вміст поживних речовин в 100 гр продукту	
		Суміш № 5	Рис
Білки	14,0	2,8	3,2
Вуглеводи	32,9	4,7	8,3

Математична модель задачі.

Позначимо через x_1 — добовий обсяг споживання суміші № 5, кг; x_2 — добовий обсяг споживання рису, кг.

Складемо математичну модель задачі.

Цільова функція буде мати вигляд:

$$L(x) = 7x_1 + 9x_2 \to \min$$

при обмеженнях:

$$\begin{cases} 28x_1 + 32x_2 \geq 14{,}0 \quad \text{(обмеження по білкам)}, \\ 47x_1 + 83x_2 \geq 32{,}9 \quad \text{(обмеження по вуглеводам)}, \\ x_1 \leq 0{,}4 \quad \text{(обмеження по суміші № 5)}, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Розв'язання.

При натисканні на кнопку **Пошук рішення** 

з'явиться діалогове вікно (рис. 2.3).

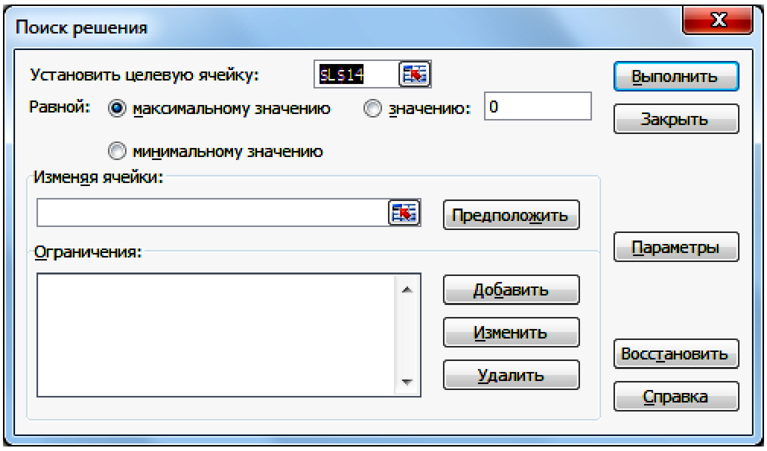
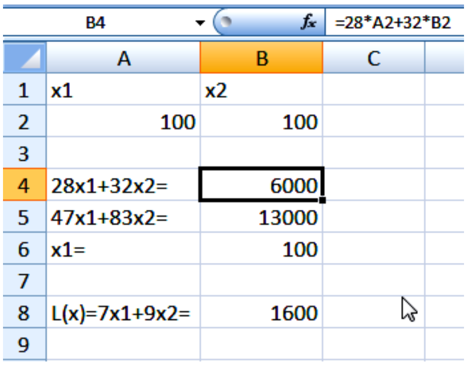


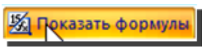
Рис. 2.3

Інструмент «Пошук рішення» додатку *Microsoft Office Excel* використовує програму нелінійної оптимізації Generalized Reduced Gradient. Щоб правильно провести цей діалог, треба підготувати дані задачі в комірках листа. При цьому частина комірок буде містити *підписи* (тобто *текст*, підписи оброблятися не будуть, їхнє призначення — зробити діалог максимально зручним, легко доступним користувачам), а частина — розрахункові *формули* або конкретні *числові значення*. Як бачимо з рис. 2.4, по-перше, в діалозі треба посилатись на комірку листа, у якій зберігається *значення* цільової функції: **Установити цільову комірку**, і вибрати радіо-кнопку відповідно до умови оптимізації. По-друге, на листі треба вибрати комірки, у яких будуть зберігатися поточні *значення* змінних, вхідних даних: **Змінюючи комірки**. Для цього в комірках A1 й A2 розмістимо *підписи* «x1» та «x2» відповідно, а під ними, у комірках B1 та B2 — початкові *значення* цих змінних, наприклад, числа 100 і 100 відповідно. По-третє, необхідно вказати обмеження у вікні **Обмеження**. Для цього в комірках A4:A6 розмістимо *підписи* «28x1+32x2=», «47x1 + 83x2=», «x1=» відповідно, а в комірках праворуч від них — B4:B6 — формули з посиланнями на комірки A2 й B2, в яких зберігаються *значення* x_1 й x_2: «=28*A2 + 32*B2», «=47*A2+83*B2», «=A2». При цьому в комірках B4:B6 з'являться відповідним початковим значенням змінні числа — значення величин білків, що розраховують, вуглеводів і суміші № 5, рис. 2.4).


B4 =28*A2+32*B2

	A	B	C
1	x1	x2	
2	100	100	
3			
4	28x1+32x2=	6000	
5	47x1+83x2=	13000	
6	x1=	100	
7			
8	L(x)=7x1+9x2=	1600	
9			

Рис. 2.4

Далі в комірці A8 помістимо підпис цільової функції, а в комірці праворуч – розрахункову формулу. Щоб побачити всі формули одночасно, треба на вкладці **Формули** в групі **Залежності формул** натиснути кнопку **Показати формули** 

(рис. 2.5).

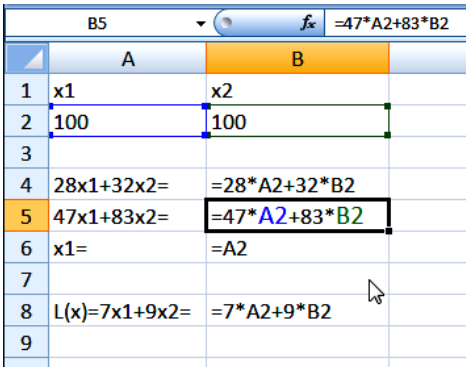


Рис.2.5

При цьому текст формул в комірках вирівнюється по лівому краї.

Після того, як необхідна підготовка листа виконана, викликається інструмент «Пошук рішення», у вікні **Встановити цільову комірку** вказується посилання на комірку $B$8 (у той час, як покажчик перебуває у вікні, досить клацнути по цій комірці та перейти в інше вікно діалогу), вибирається радіо-кнопка **мінімальному значенню**. У вікні **Змінюючи комірки** необхідно протягти мишку по комірках *значень* x_1 й x_2: $A$2:$B$2. Типовий вигляд екрану після цих дій зображений на рис.2.6.

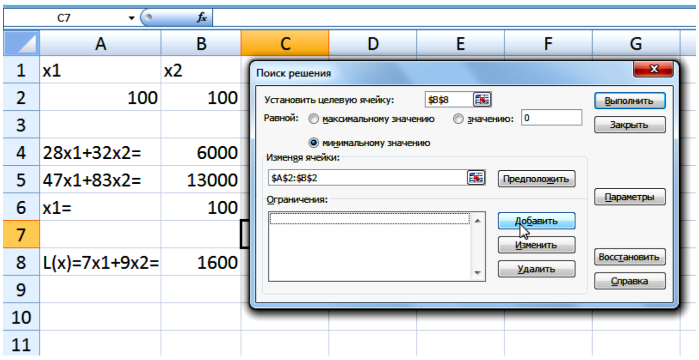


Рис. 2.6

Після цього треба перейти у вікно **Обмеження** й натиснути на кнопку **Додати**. З'явиться діалогове вікно як на рис. 2.7.

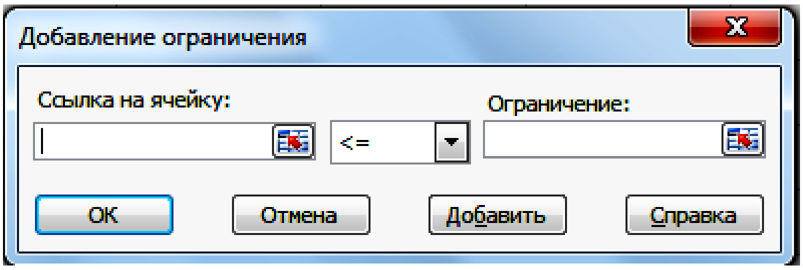


Рис.2.7

Докладно опишемо додавання обмеження по білках. У вікні **Посилання на комірку** пошлемося на комірку, у якій зберігається розраховане по формулі поточне *значення* кількості білків, тобто на $B$4. В середньому вікні зі списку виберемо тип обмеження: >=. У вікні **Обмеження** вкажемо конкретне значення 14 (рис. 2.8).

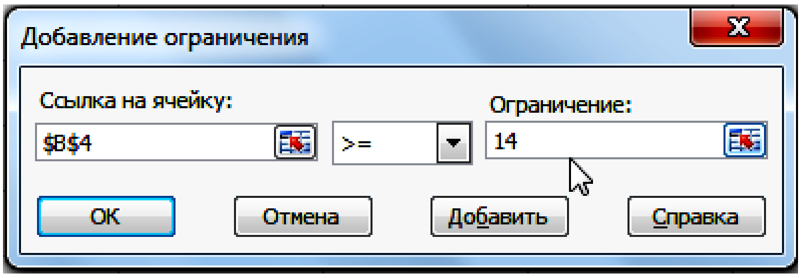


Рис. 2.8

Після цього натиснемо кнопку **Додати**, і введемо по черзі інші обмеження задачі. Наприкінці натиснемо **ОК**, всі обмеження з'являться у вікні **Обмеження**. Треба пам'ятати й про вимоги невідємності змінних, які теж є обмеженнями. Після зазначення всіх необхідних обмежень вікно **Пошук рішення** виглядає як на рис.2.9.

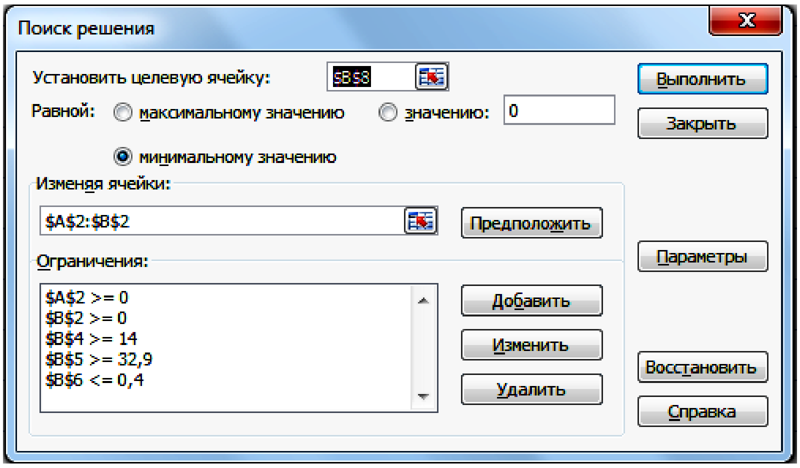


Рис. 2.9

Після натискання на кнопку **Виконати,** інструмент «Пошук рішення» реалізує оптимізаційний алгоритм і з'являється повідомлення про те, що розв'язок знайдений (рис. 2.10), а в змінюваних та в залежних від них комірках з'являються оптимальні значення величин.

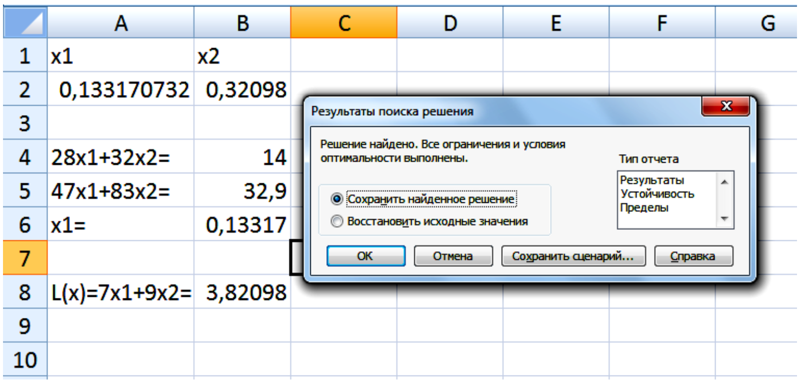
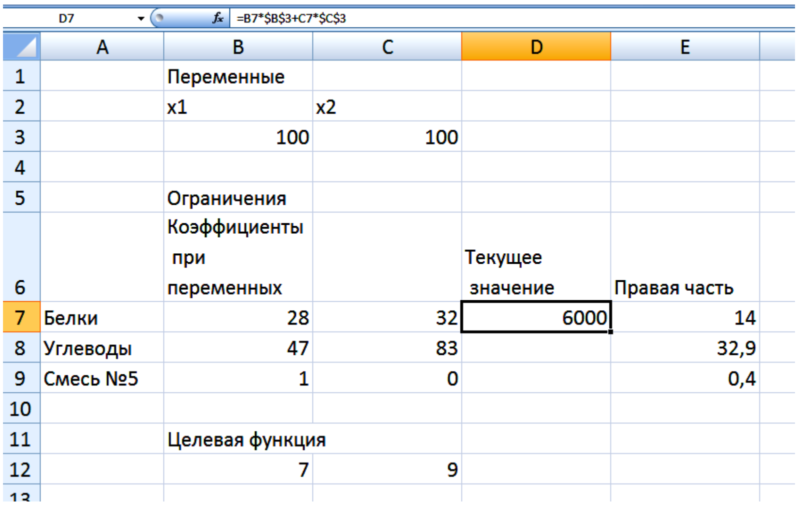


Рис. 2.10

Обмеження по білках і вуглеводах є активними, тому що їх оптимальні значення в комірках B4 і B5 у точності дорівнюють правим частинам відповідних нерівностей. Далі можна провести експеримент із даним сценарієм, задаючи різні початкові значення змінних у комірках A2 й B2, у тому числі й від'ємні. Легко переконатися в тому, що незалежно від початкових значень x_1 та x_2, вбудований алгоритм пошуку оптимального розв'язку задачі лінійного програмування буде давати той самий результат. Така властивість алгоритму називається стійкістю до початкових даних.

Запропонований варіант оформлення листа книги *Excel* для застосування інструмента «Пошук рішення» не є оптимальним. Наприклад, для того, щоб вирішити цю ж задачу при інших коефіцієнтах в обмеженнях та цільовій функції, треба в комірці з відповідною формулою вручну змінити ці коефіцієнти. А при зміні правих частин обмежень необхідно викликати діалогове вікно **Пошук рішення** й змінити праві частини в обмеженнях у відповідному вікні. Можна запропонувати інший, більш універсальний спосіб розміщення даних задачі й оформлення посилань (рис. 2.11).



D7 =B7*$B$3+C7*$C$3

	A	B	C	D	E
1		Переменные			
2		x1	x2		
3		100	100		
4					
5		Ограничения			
6		Коэффициенты при переменных		Текущее значение	Правая часть
7	Белки	28	32	6000	14
8	Углеводы	47	83		32,9
9	Смесь №5	1	0		0,4
10					
11		Целевая функция			
12		7	9		

Рис. 2.11

У цьому випадку у всіх комірках знаходяться конкретні числа, у комірці D7 і розташованих нижче — формули. Причому, якщо в D7 помістити формулу «=B7*$B$3+C7*$C$3», то її можна скопіювати вниз у комірки D8, D9, D12, і необхідні формули в них з'являться автоматично. Значно спрощується при цьому і організація діалогу у вікні **Пошук рішення** (рис. 2.12).

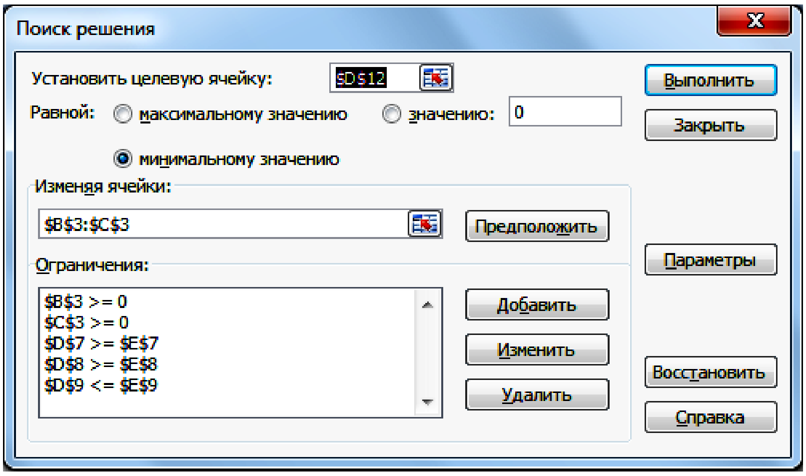


Рис. 2.12

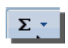
Для розв'язання одного конкретного завдання можна використати кожний із запропонованих підходів, але якщо потрібно провести економічний аналіз, то користуються другим. Адже в цьому випадку немає необхідності змінювати сценарій, вносити виправлення у вікні **Пошук рішення**, а досить змінювати числа на листі книги *Excel*. Наприклад, з'ясуємо, при якій мінімальній вартості кілограму рису обмеження по суміші № 5 стає активним при незмінній вартості суміші № 5. Будемо збільшувати ціну 1 кг рису із кроком 1, щораз повертаючи початкові значення 100 й 100 у комірки B2 і 32 і запускаючи інструмент

«Пошук рішення». Тоді при ціні 13 у.о. /кг рису отримаємо, що активними стануть обмеження по вуглеводах і суміші № 5 (рис. 2.13).

	A	B	C	D	E
1		Переменные			
2		x1	x2		
3		0,4	0,169879518		
4					
5		Ограничения			
6		Коэффициенты при переменных		Текущее значение	Правая часть
7	Белки	28	32	16,63614458	14
8	Углеводы	47	83	32,9	32,9
9	Смесь №5	1	0	0,4	0,4
10					
11		Целевая функция			
12		7	13	5,008433735	
13					

Рис. 2.13

.Наведемо ще кілька прикладів використання інструменту «Пошук рішення».

Приклад 2.2. Розглянемо транспортну задачу (ТЗ). Вихідну ситуацію в ТЗ зручно представити в спеціальній таблиці – макеті, в якій описано запаси в постачальників A_i, потреби (заявки) споживачів B_j і тарифи перевезень C_{ij}. На рис. 2.14 така таблиця обведена стовщеною рамкою, а власне тарифи B3:D4 виділені комірками, що мають яскраві границі. Особливість підготовки даних ТЗ на листі книги *Excel* полягає в тому, що немає можливості підписати змінні: вони мають табличну структуру й характеризуються двома індексами. Нижче таблиці тарифів створимо точно таку ж таблицю початкових значень змінних B8:D9, не підписуючи їх. Формули підсумовування по рядках або по стовпцях можна автоматично набирати за допомогою кнопки автосуми  та подальшого копіювання. Для зручності формування цільової функції створимо нижче таблицю добутків тарифів на перевезення B13:D14, набравши формулу «=B3*B8» у комірці B13 і скопіювавши її по горизонталі, а потім весь рядок - по вертикалі.

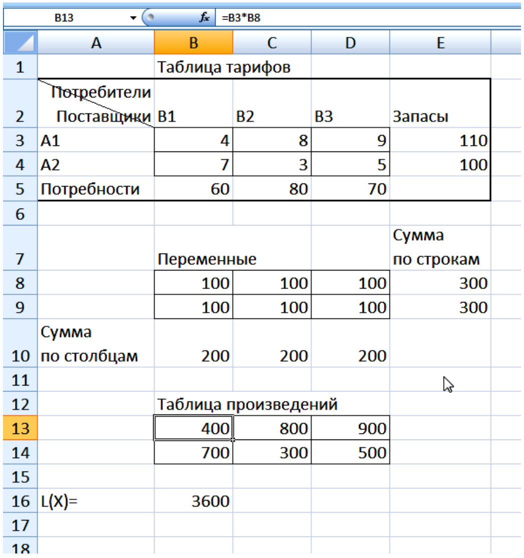


Рис. 2.14

Тоді в комірці значення цільової функції можна задати формулу «=СУМ(B13:D14)». Всі необхідні формули показані на рис. 2.15.

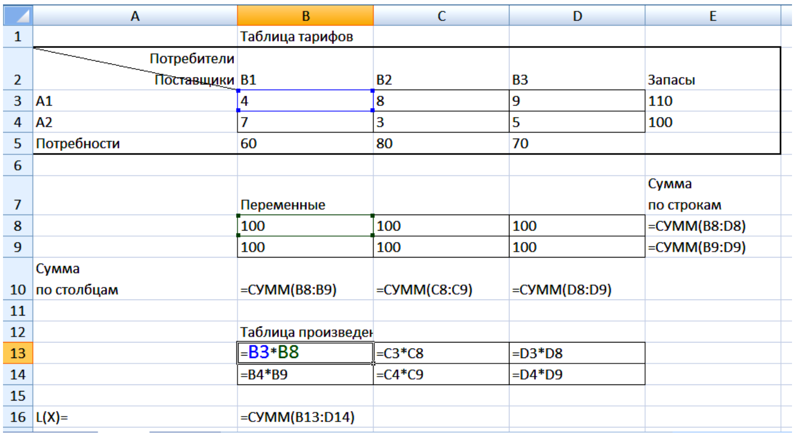


Рис. 2.15

Вікно **Пошук рішення** повинне містити вимогу невід'ємності, накладена на всі змінні (2.16).

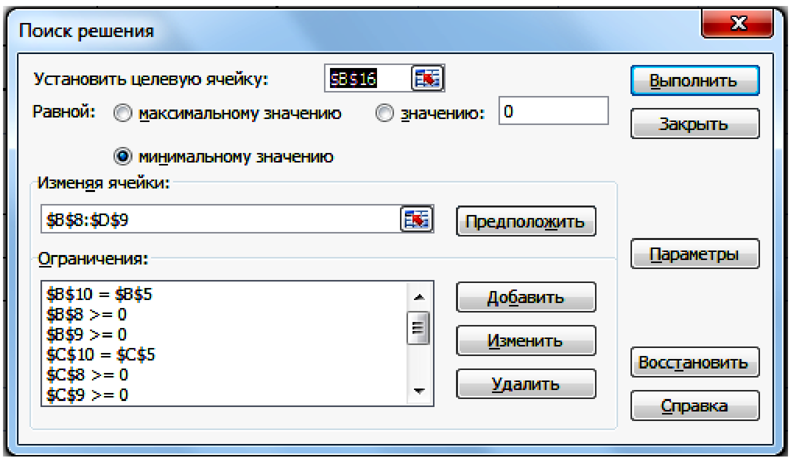


Рис. 2.16

Такі обмеження можна задати окремо, а можна накласти його відразу на всі комірки діапазону B13:D14 (рис. 2.17).

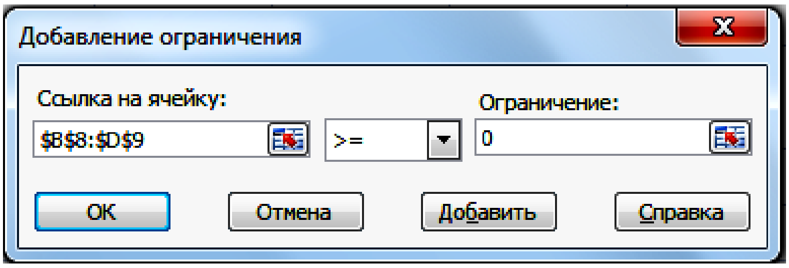


Рис. 2.17

Результат роботи інструменту «Пошук рішення» представлений на рис. 2.18.

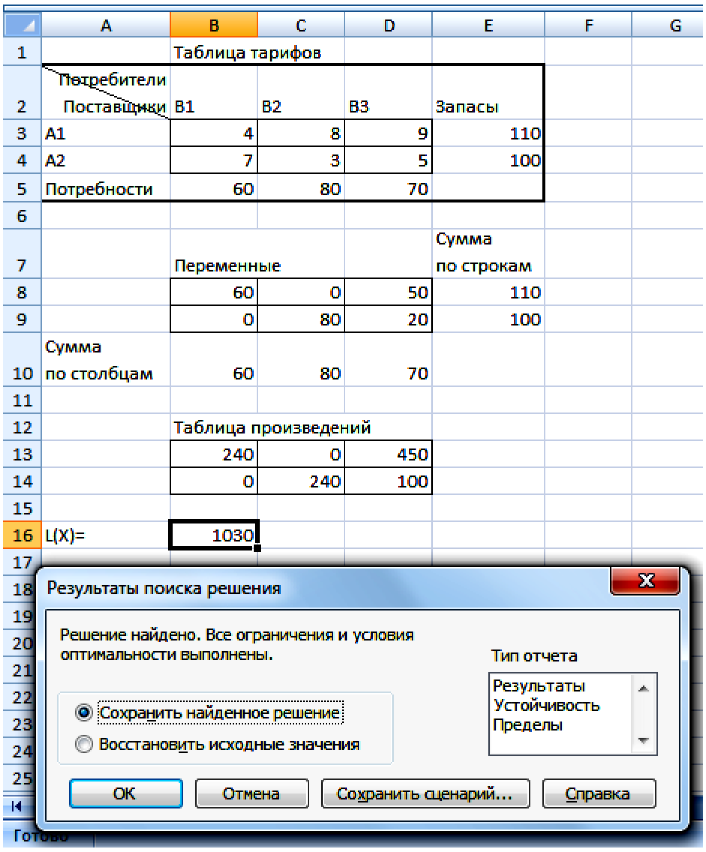


Рис. 2.18

2.2. Автоматизація процесу розв'язання багатокритеріальних задач лінійного програмування в середовищі Excel

Проілюструємо розв’язання багатокритеріальних задач в середовищі Excel на наступних прикладах.

Приклад 2.3. Нехай потрібно розв’язати багатокритеріальну задачу комівояжера методами адитивної згортки критеріїв, послідовних поступок та ідеальної точки засобами середовища Excel та проаналізувати отримані результати.

Постановка задачі. Нехай транспортна мережа налічує 5 пунктів: Київ, Москва, Рим, Будапешт, Париж. Відомі відстані між пунктами, які занесені в матрицю $C_{5\times 5}$ та вартість (найменша) квитків на авіа перельоти $D_{5\times 5}$:

$$C=\begin{pmatrix} 0 & 754 & 1676 & 899 & 2024 \\ 754 & 0 & 2375 & 1568 & 2486 \\ 1676 & 2375 & 0 & 810 & 1106 \\ 899 & 1568 & 810 & 0 & 1244 \\ 2024 & 2486 & 1106 & 1244 & 0 \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} 0 & 1308 & 2550 & 2279 & 2663 \\ 1308 & 0 & 2401 & 1174 & 1926 \\ 2550 & 2401 & 0 & 2938 & 2120 \\ 2279 & 1174 & 2938 & 0 & 2657 \\ 2663 & 1926 & 2120 & 2657 & 0 \end{pmatrix}.$$

Виїжджаючи з початкового пункту - Київ (йому приписується номер 0), комівояжер повинен побувати у всіх інших пунктах тільки один раз і повернутися в пункт 0. В якому порядку треба об'їжджати пункти, щоб пройдена сумарна відстань та вартість квитків були мінімальними?

Математична модель задачі.

Задачу комівояжера можна сформулювати як задачу цілочислового лінійного програмування. Впровадимо двійкові змінні x_{ij} , $i = 0,..,n$, $j = 0,\dots,n$; $i \neq j$, що мають наступний зміст:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо комівояжер після пункту } i \text{ потрапляє в пункт } j, \\ 0 & \text{в протилежному випадку.} \end{cases}$$

Впровадимо також додаткові змінні u_i , u_j $(i, j = 1, n)$, що приймають довільні дійсні значення (їх можна вважати цілими). Дані змінні дозволяють сформувати умову зв’язності маршруту комівояжера: виключити розпадання маршруту на підцикли. Тоді математична модель задачі набуває вигляду:

F_1: $754x_{01} + 1676x_{02} + 899x_{03} +2024x_{04} +754_{10} +2375x_{12} + 1568x_{13} + 2486x_{14} +167x_{20} +2375x_{21} +810x_{23} + 1106x_{24} + 899x_{30} + 1568x_{31} +810x_{32} +1244x_{34} +2024x_{40} +2486x_{41} +1106x_{42} +1244x_{43} \rightarrow \min$,

F_2: $1308x_{01} + 2550x_{02} + 2279x_{03} +2663x_{04} +1308_{10} +2401x_{12} + 1174x_{13} + 1926x_{14} +2550x_{20} +2401x_{21} +2938x_{23} + 2120x_{24} + 2279x_{30} + 1174x_{31} +2938x_{32} +2657x_{34} +2663x_{40} +1926x_{41} +2120x_{42} +2657x_{43} \to \min$,

при умовах

$$x_{01} + x_{02} + x_{03} + x_{04} =1,$$
$$x_{10} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1,$$
$$x_{20} + x_{21} + x_{23} + x_{24} = 1,$$
$$x_{30} + x_{31} + x_{32} + x_{34} = 1,$$
$$x_{40} + x_{41} + x_{42} + x_{43} = 1,$$
$$x_{10} + x_{20} + x_{30} + x_{40} = 1,$$
$$x_{01} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1,$$
$$x_{02} + x_{12} + x_{32} + x_{42} = 1,$$
$$x_{03} + x_{13} + x_{23} + x_{43} = 1,$$
$$x_{04} + x_{14} + x_{24} + x_{34} = 1,$$
$$u_i - u_j + 4x_{ij} \le 3,\ i, j = 1{,}4,\ i \ne j\ ,$$
$$u_i\ ,u_i = \text{цілі},\ i = 1{,}4\ .$$
$$x_{ij} + x_{ji} \le 1,\ i, j = 0{,}4,\ i \ne j\ .$$

(2.1)

Перший критерій відповідає за мінімізацію сумарної відстані в маршруті, а другий за мінімізацію грошових витрат на квитки в авіа перельотах.

Примітка. У математичну модель задачі комівояжера, коли її розглядають як задачу цілочислового лінійного програмування, не входить обмеження (2.1). Введення цього обмеження обумовлено тим, що задача вирішується в інформаційному середовищі *Microsoft Excel*. В загальному випадку без додання в математичну модель обмеження (2.1) задача комівояжера в середовищі *Microsoft Excel* не розв’язується.

Розв’язання:

Крок 1.

Розв’яжемо однокритеріальну задачу виду:

F_1: $754x_{01} + 1676x_{02} + 899x_{03} + 2024x_{04} + 754_{10} + 2375x_{12} + 1568x_{13} + 2486x_{14} + 167x_{20} + 2375x_{21} + 810x_{23} + 1106x_{24} + 899x_{30} + 1568x_{31} + 810x_{32} + 1244x_{34} + 2024x_{40} + 2486x_{41} + 1106x_{42} + 1244x_{43} \to \min$,

при умовах

$$x_{01} + x_{02} + x_{03} + x_{04} = 1,$$

$$x_{10} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1,$$

$$x_{20} + x_{21} + x_{23} + x_{24} = 1,$$

$$x_{30} + x_{31} + x_{32} + x_{34} = 1,$$

$$x_{40} + x_{41} + x_{42} + x_{43} = 1,$$

$$x_{10} + x_{20} + x_{30} + x_{40} = 1,$$

$$x_{01} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1,$$

$$x_{02} + x_{12} + x_{32} + x_{42} = 1,$$

$$x_{03} + x_{13} + x_{23} + x_{43} = 1,$$

$$x_{04} + x_{14} + x_{24} + x_{34} = 1,$$

$$u_i - u_j + 4x_{ij} \le 3,\ i, j = 1,4,\ i \ne j,$$

$$u_i, u_i = \text{цілі},\ i = 1,4.$$

$$x_{ij} + x_{ji} \le 1,\ i, j = 0,4,\ i \ne j.$$

Для цього скористаємось середовищем *Microsoft Excel.*

Розподіл і призначення клітинок електронної таблиці для задачі комівояжера в умовах прикладу

- клітинки C5:F5, B6, D6:F6, B7:C7, E7:F7, B8:D8, F8, B9:E9 – для шуканих значень змінних x_{ij} , $i, j = 1,4$;
- клітинки C11:F11 – для значень додаткових змінних u_j , $j = 1,4$;
- клітинки H6:H9 – для значень додаткових змінних u_i, $i = 1,4$;
- клітинки B14:F14 – для функцій f_i , $i = 0,4$, із відповідними завантаженими формулами;
- клітинки J5:J9 – для четвертого обмеження $+ j$, $j = 0,4$, із відповідними завантаженими формулами;
- клітинки B16:F20 – для подання відстаней між пунктами c_{ij} , $i, j = 0,4$, $i \ne j$;

- N6:P6, M7, O7:P7, M8:N8, P8, M9:O9 – для проміжних результатів із завантаженими формулами для обчислення виразу $u_i - u_j + 4x_{ij} \le 3$, $i, j = 1,4$, $i \ne j$,
- H11:K11, I12:K12, J13:K13, K14 – для проміжних результатів із завантаженими формулами для обчислення виразу $x_{ij} + x_{ji}$, $i, j = 0,4$, $i \ne j$;
- H16:L20 – для проміжних результатів із завантаженими формулами для обчислення добутку $c_{ij}\, x_{ij}$, $i, j = 0,4$, $i \ne j$;
- клітинка N18 – для цільової функції y із відповідною завантаженою формулою для її обчислення.

Всі клітинки електронної таблиці, що задіяні для розв'язання задачі, повинні мати *числовий* формат із числом десяткових знаків, рівним 0.

Установки даних в діалоговому вікні команди *Сервіс/Пошук_рішення* мають бути такими:

- для цільової клітинки – **$N$18**, що дорівнює **мінімальному значенню;**
- для клітинок із змінюваними змінними – **$C$5:$F$5**; **$B$6**; **$D$6:$F$6**; **$B$7:$C$7**; **$E$7:$F$7**; **$B$8:$D$8**; **$F$8**; **$B$9:$E$9**; **$C$11:$F$11**; **$H$5:$H$9**;
- для обмежень: **$B$14:$F$14 = 1**,

  $J$5:$J$9 = 1,

  $C$5:$F$5 = двійкове,

  $B$6 = двійкове,

  $B$7:$C$7 = двійкове ,

  $B$8:$D$8 = двійкове,

  $B$9:$E$9 = двійкове,

  $D$6:$F$6 = двійкове,

  $E$7:$F$7 = двійкове,

  $F$8 = двійкове,

  $B$11:$F$11 = ціле,

  $H$5:$H$9 = ціле,

  $N$6:$P$6 <= 3,

  $M$7 <= 3,

\$O\$7:\$P\$7 <=3,

\$M\$8:\$N\$8 <= 3,

\$P\$8 <= 3,

\$M\$9:\$O\$9 <= 3,

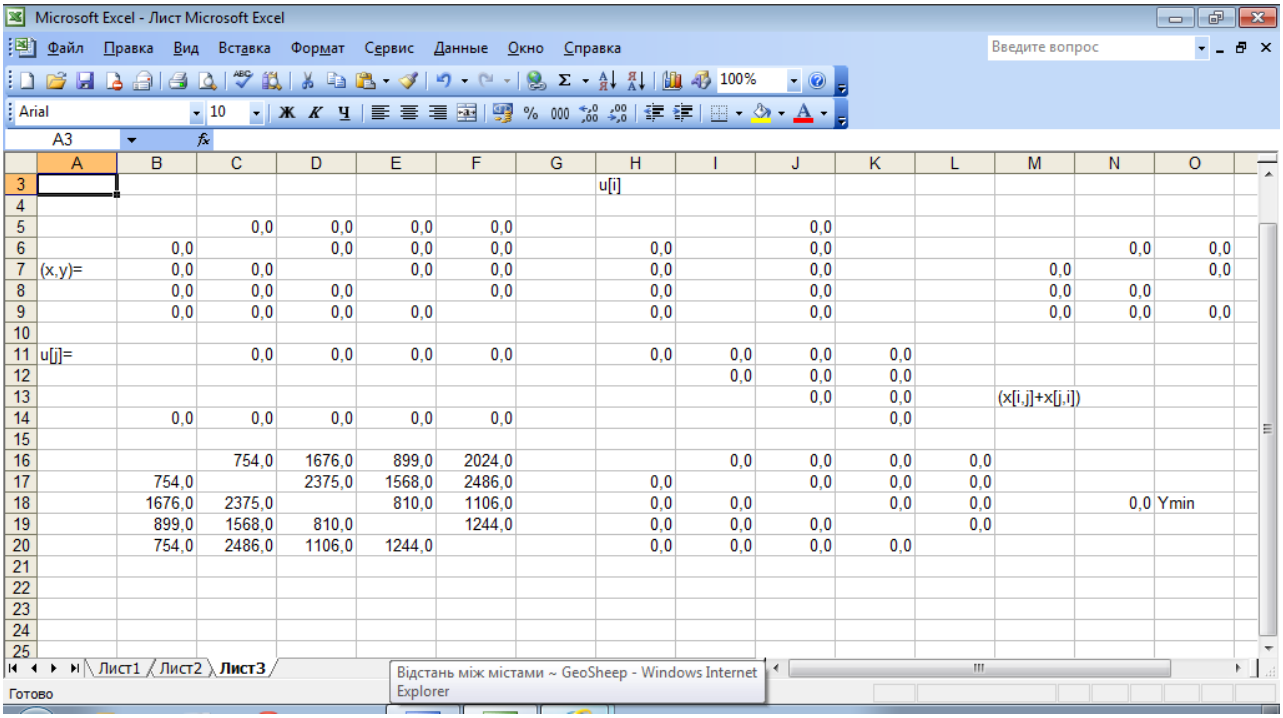
\$H\$11:\$K\$11 <= 1,

\$I\$12:\$K\$12 <= 1,

\$J\$13:\$K\$13 <= 1,

K\$14 <= 1.

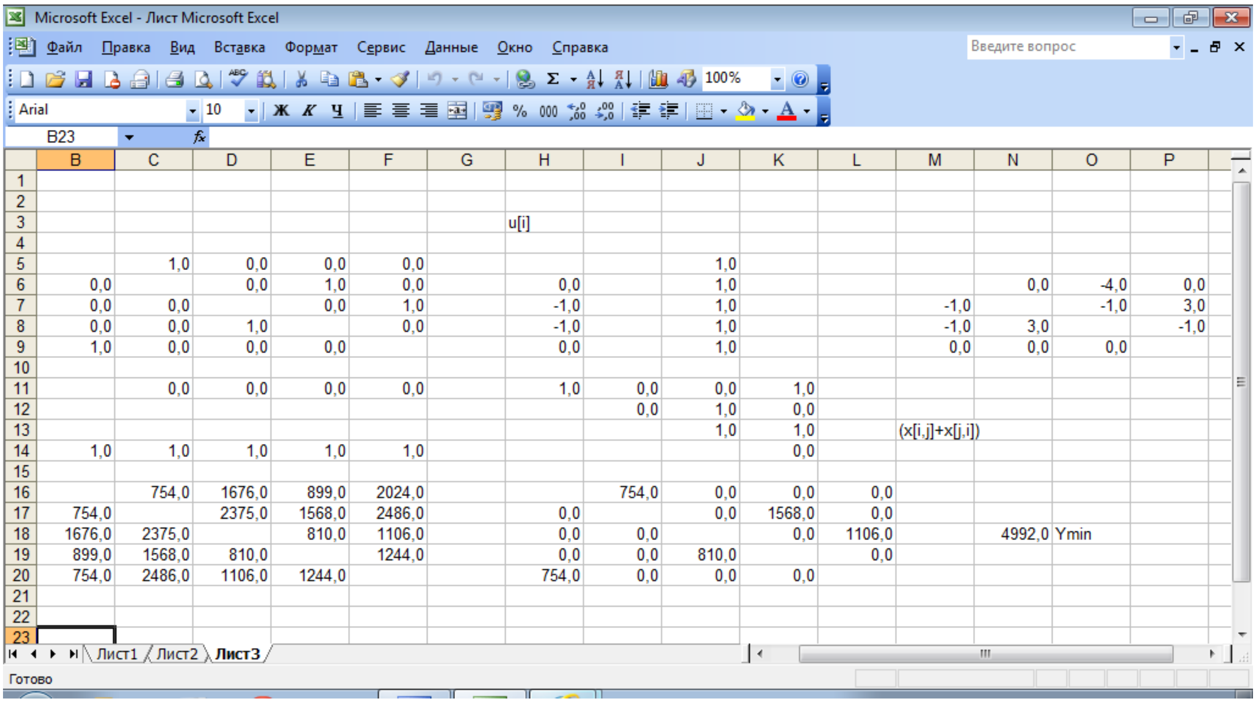
На рис.2.19. показаний вигляд екрана, що передує виконанню команди *Сервіс/Пошук_рішення*.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
3								u[i]							
4															
5			0,0	0,0	0,0	0,0				0,0					
6		0,0		0,0	0,0	0,0		0,0		0,0				0,0	0,0
7	(x,y)=	0,0	0,0		0,0	0,0		0,0		0,0			0,0		0,0
8		0,0	0,0	0,0		0,0		0,0		0,0			0,0	0,0	
9		0,0	0,0	0,0	0,0			0,0		0,0			0,0	0,0	0,0
10															
11	u[j]=		0,0	0,0	0,0	0,0		0,0	0,0	0,0	0,0				
12									0,0	0,0	0,0				
13										0,0	0,0		(x[i,j]+x[j,i])		
14		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0					0,0				
15															
16			754,0	1676,0	899,0	2024,0			0,0	0,0	0,0	0,0			
17		754,0		2375,0	1568,0	2486,0		0,0		0,0	0,0	0,0			
18		1676,0	2375,0		810,0	1106,0		0,0	0,0		0,0	0,0		0,0	Ymin
19		899,0	1568,0	810,0		1244,0		0,0	0,0	0,0		0,0			
20		754,0	2486,0	1106,0	1244,0			0,0	0,0	0,0	0,0				
21															
22															
23															
24															
25															

Рис. 2.19.

Вигляд екрана після виконання команди *Сервіс/Пошук_рішення* показаний на рис. 2.20.



	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1															
2															
3							u[i]								
4															
5		1,0	0,0	0,0	0,0				1,0						
6	0,0		0,0	1,0	0,0		0,0		1,0				0,0	-4,0	0,0
7	0,0	0,0		0,0	1,0		-1,0		1,0			-1,0		-1,0	3,0
8	0,0	0,0	1,0		0,0		-1,0		1,0			-1,0	3,0		-1,0
9	1,0	0,0	0,0	0,0			0,0		1,0			0,0	0,0	0,0	
10															
11		0,0	0,0	0,0	0,0		1,0	0,0	0,0	1,0					
12								0,0	1,0	0,0					
13									1,0	1,0		(x[i,j]+x[j,i])			
14	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0					0,0					
15															
16		754,0	1676,0	899,0	2024,0			754,0	0,0	0,0	0,0				
17	754,0		2375,0	1568,0	2486,0		0,0		0,0	1568,0	0,0				
18	1676,0	2375,0		810,0	1106,0		0,0	0,0		0,0	1106,0		4992,0	Ymin	
19	899,0	1568,0	810,0		1244,0		0,0	0,0	810,0		0,0				
20	754,0	2486,0	1106,0	1244,0			754,0	0,0	0,0	0,0					
21															
22															
23															

Рис. 2.20.

Розв’язок задачі $\mathbf{X_1}^{\mathbf{min}}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ визначає покриття, що відповідає графу зображеному на рис. 2.21.

При цьому $y_{\min}$ = 4992 км, що визначатиме загальну довжину маршруту.

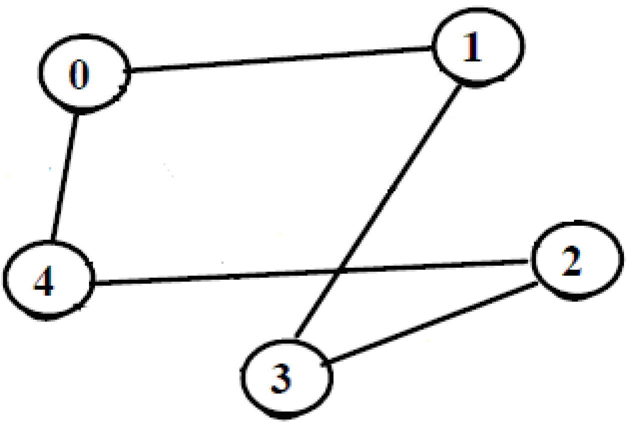
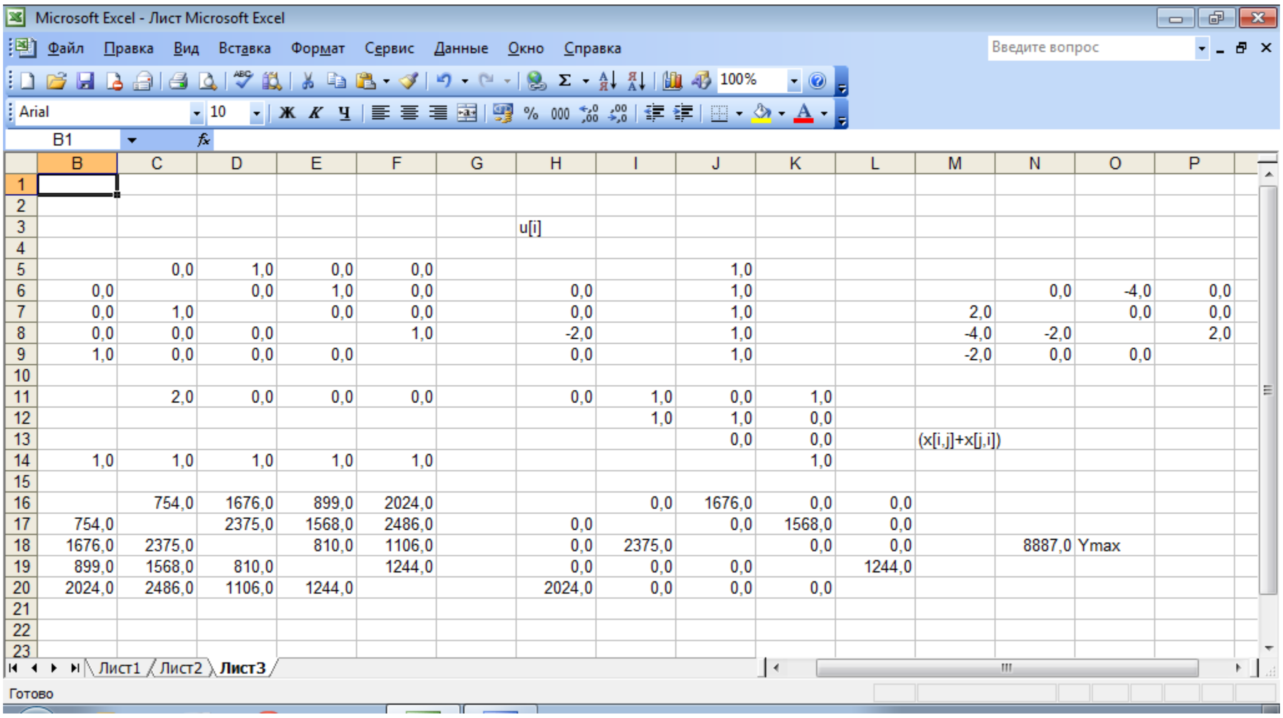


Рис. 2.21

Тобто, для того щоб сумарна відстань між містами була мінімальною потрібно їх відвідати в наступній послідовності:

Київ→Москва→Будапешт→Рим→Париж→Київ, при цьому відстань складатиме 4992 км.

Розв'яжемо дану задачу при максимізації даного критерію (рис. 2.22).



Microsoft Excel - Лист Microsoft Excel

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка

B1

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1															
2															
3							u[i]								
4															
5		0,0	1,0	0,0	0,0				1,0						
6	0,0		0,0	1,0	0,0		0,0		1,0				0,0	-4,0	0,0
7	0,0	1,0		0,0	0,0		0,0		1,0			2,0		0,0	0,0
8	0,0	0,0	0,0		1,0		-2,0		1,0			-4,0	-2,0		2,0
9	1,0	0,0	0,0	0,0			0,0		1,0			-2,0	0,0	0,0	
10															
11		2,0	0,0	0,0	0,0		0,0	1,0	0,0	1,0					
12								1,0	1,0	0,0					
13									0,0	0,0		(x[i,j]+x[j,i])			
14	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0					1,0					
15															
16		754,0	1676,0	899,0	2024,0			0,0	1676,0	0,0	0,0				
17	754,0		2375,0	1568,0	2486,0		0,0		0,0	1568,0	0,0				
18	1676,0	2375,0		810,0	1106,0		0,0	2375,0		0,0	0,0		8887,0	Ymax	
19	899,0	1568,0	810,0		1244,0		0,0	0,0	0,0		1244,0				
20	2024,0	2486,0	1106,0	1244,0			2024,0	0,0	0,0	0,0					
21															
22															
23															

Лист1 Лист2 Лист3

Готово

Рис. 2.22

Розв'язком при цьому буде $\mathbf{X_1}^{\mathbf{max}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, а $y_{max} = 8887$ км.

Для того щоб сумарна відстань між містами була максимальною потрібно їх відвідати в наступній послідовності: Київ→Рим→Москва→ Будапешт→Париж→Київ, при цьому відстань складатиме 8887 км.

Різниця між можливими вибраними маршрутами становитиме 3895 км.

Крок 2. Розв'яжемо однокритеріальну задачу для мінімізації вартості квитків на авіа перельоти виду:

F_2: $1308x_{01} + 2550x_{02} + 2279x_{03} + 2663x_{04} + 1308_{10} + 2401x_{12} + 1174x_{13} + 1926x_{14} + 2550x_{20} + 2401x_{21} + 2938x_{23} + 2120x_{24} + 2279x_{30} + 1174x_{31} + 2938x_{32} + 2657x_{34} + 2663x_{40} + 1926x_{41} + 2120x_{42} + 2657x_{43} \rightarrow \min$,

при умовах

$$x_{01} + x_{02} + x_{03} + x_{04} = 1,$$
$$x_{10} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1,$$
$$x_{20} + x_{21} + x_{23} + x_{24} = 1,$$
$$x_{30} + x_{31} + x_{32} + x_{34} = 1,$$
$$x_{40} + x_{41} + x_{42} + x_{43} = 1,$$
$$x_{10} + x_{20} + x_{30} + x_{40} = 1,$$
$$x_{01} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1,$$
$$x_{02} + x_{12} + x_{32} + x_{42} = 1,$$
$$x_{03} + x_{13} + x_{23} + x_{43} = 1,$$
$$x_{04} + x_{14} + x_{24} + x_{34} = 1,$$
$$u_i - u_j + 4x_{ij} \le 3,\ i, j = 1,4,\ i \ne j\ ,$$
$$u_i\ ,u_i = \text{цілі},\ i = 1,4\ .$$
$$x_{ij} + x_{ji} \le 1,\ i, j = 0,4,\ i \ne j\ .$$

Скористаємось середовищем *Microsoft Excel*.

На рис.2.23. показаний вигляд екрана, що передує виконанню команди *Сервіс/Пошук_рішення*.

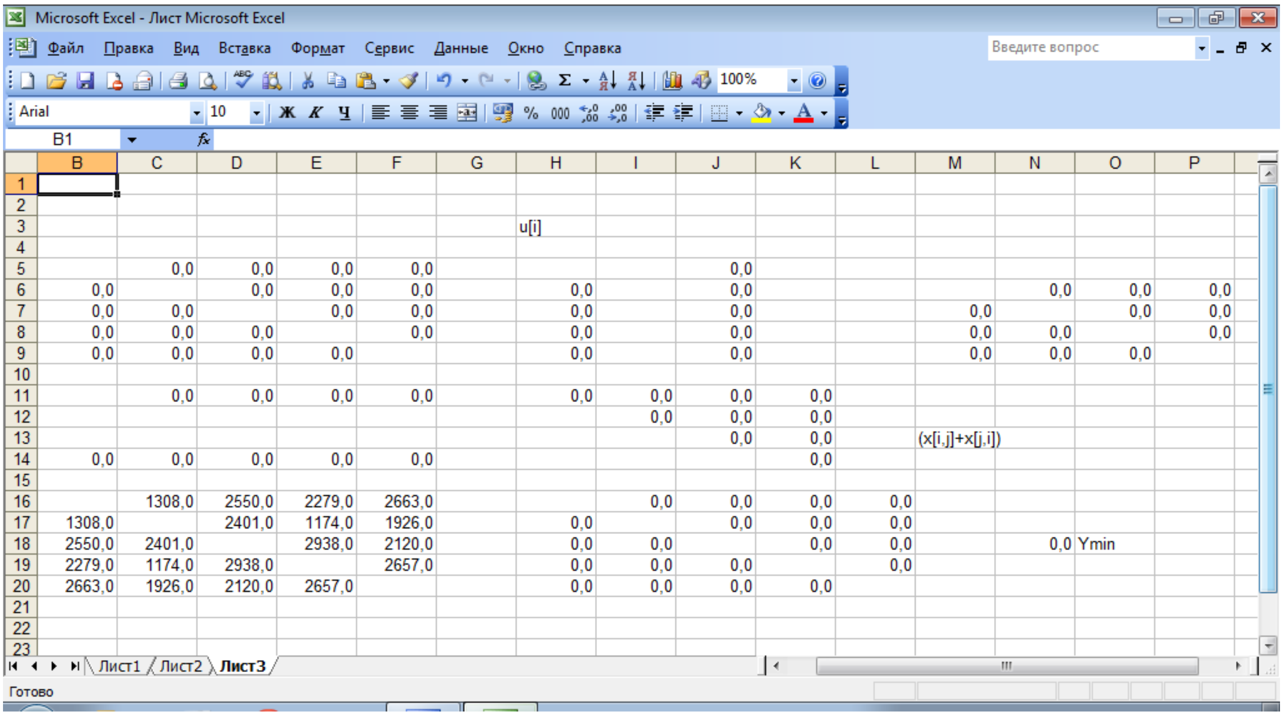
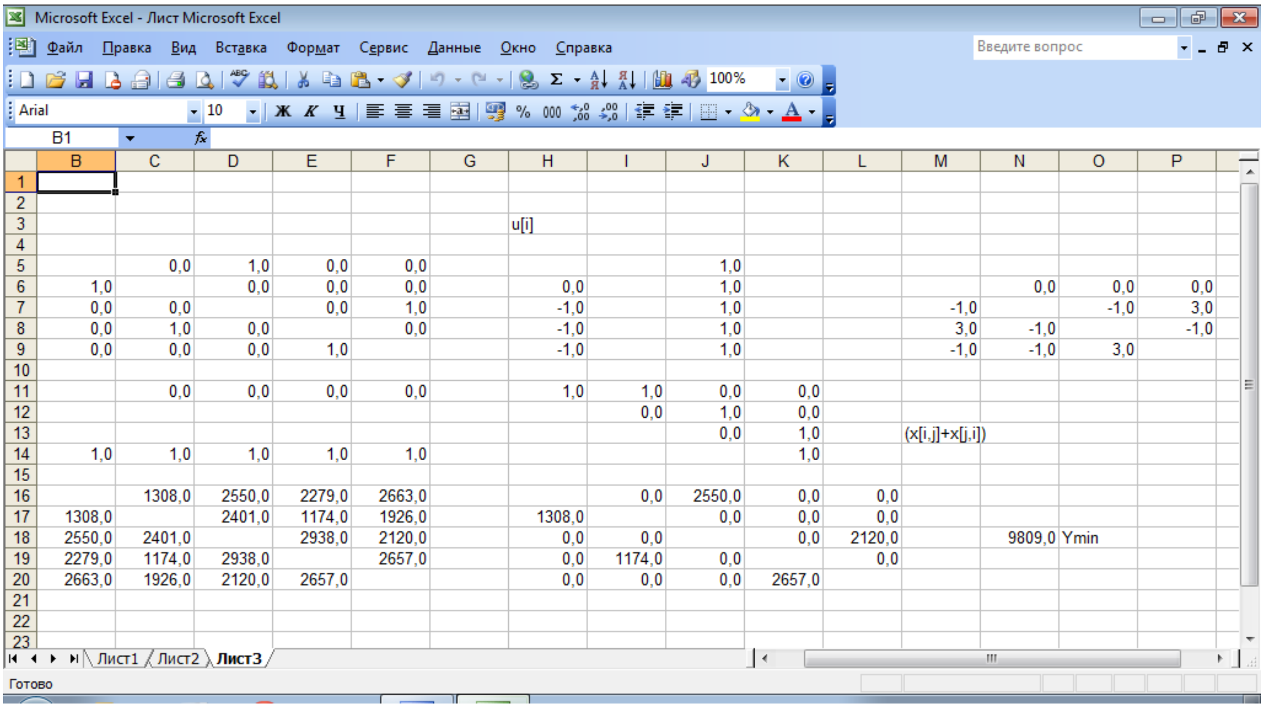


Рис. 2.23

Вигляд екрана після виконання команди *Сервіс/Пошук_рішення*



	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1															
2															
3							u[i]								
4															
5		0,0	1,0	0,0	0,0				1,0						
6	1,0		0,0	0,0	0,0		0,0		1,0				0,0	0,0	0,0
7	0,0	0,0		0,0	1,0		-1,0		1,0			-1,0		-1,0	3,0
8	0,0	1,0	0,0		0,0		-1,0		1,0			3,0	-1,0		-1,0
9	0,0	0,0	0,0	1,0			-1,0		1,0			-1,0	-1,0	3,0	
10															
11		0,0	0,0	0,0	0,0		1,0	1,0	0,0	0,0					
12								0,0	1,0	0,0					
13									0,0	1,0		(x[i,j]+x[j,i])			
14	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0					1,0					
15															
16		1308,0	2550,0	2279,0	2663,0			0,0	2550,0	0,0	0,0				
17	1308,0		2401,0	1174,0	1926,0		1308,0		0,0	0,0	0,0				
18	2550,0	2401,0		2938,0	2120,0		0,0	0,0		0,0	2120,0		9809,0	Ymin	
19	2279,0	1174,0	2938,0		2657,0		0,0	1174,0	0,0		0,0				
20	2663,0	1926,0	2120,0	2657,0			0,0	0,0	0,0	2657,0					
21															
22															
23															

Рис. 2.24

При цьому використаний розподіл і призначення клітинок електронної таблиці для даної задачі комівояжера як і на кроці 1.

Отриманий розв’язок задачі $\mathbf{X_2}^{\mathbf{min}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ визначає покриття, що відповідає графу зображеному на рис. 2.25. При цьому $y_{\min}$ = 9809 грн.

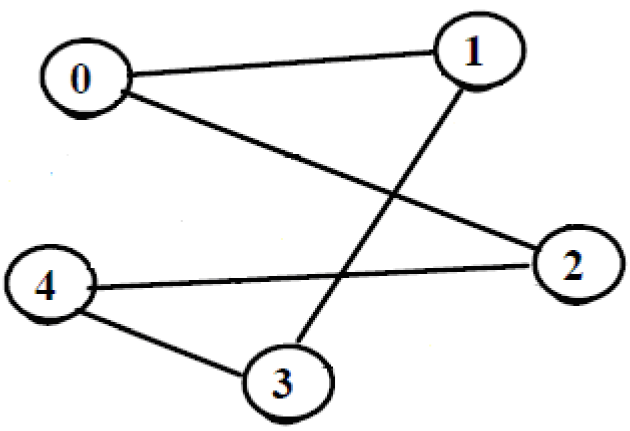
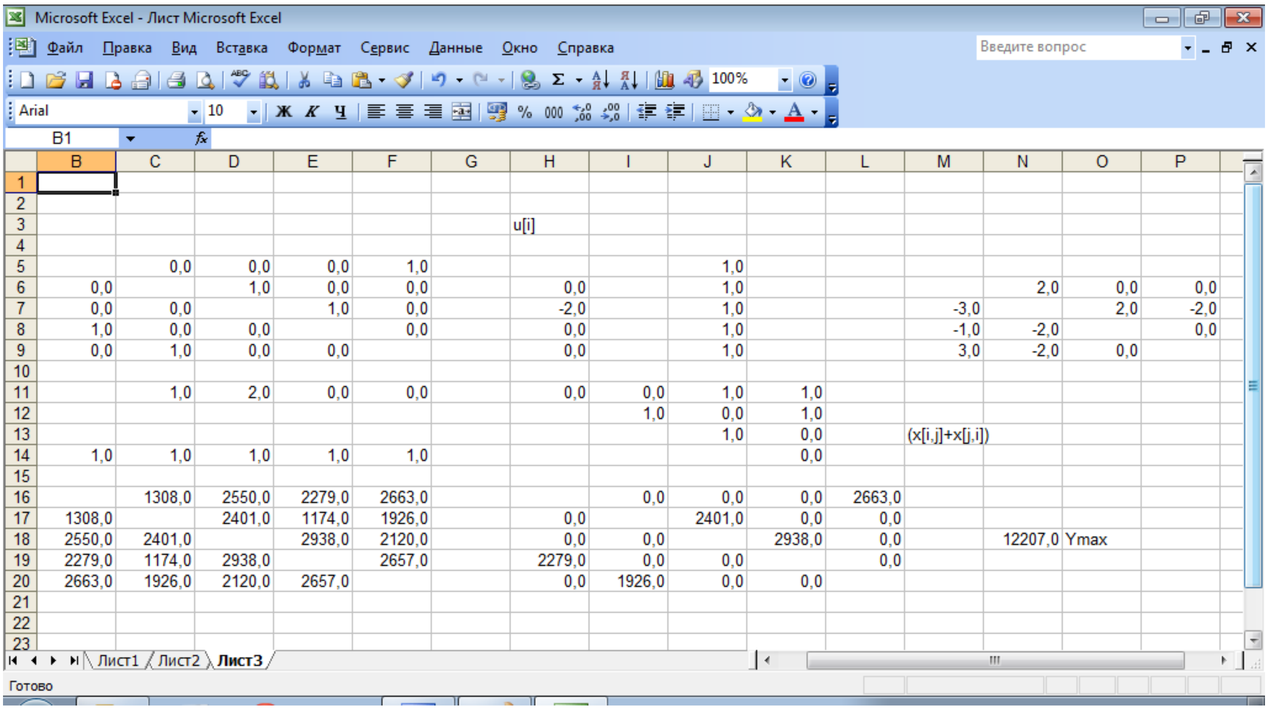


Рис. 2.25

оптимального маршруту комівояжера для мінімізації другого критерію

Таким чином, для того щоб сумарна вартість квитків на авіа перельоти була мінімальною потрібно їх відвідати в наступній послідовності: Київ→Рим→Париж→Будапешт→Москва→Київ, при цьому це коштуватиме 9809 грн.

Розв’язання задачі максимізації критерію F_2 представлено на рис.2.26



	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1															
2															
3							u[i]								
4															
5		0,0	0,0	0,0	1,0				1,0						
6	0,0		1,0	0,0	0,0		0,0		1,0				2,0	0,0	0,0
7	0,0	0,0		1,0	0,0		-2,0		1,0			-3,0		2,0	-2,0
8	1,0	0,0	0,0		0,0		0,0		1,0			-1,0	-2,0		0,0
9	0,0	1,0	0,0	0,0			0,0		1,0			3,0	-2,0	0,0	
10															
11		1,0	2,0	0,0	0,0		0,0	0,0	1,0	1,0					
12								1,0	0,0	1,0					
13									1,0	0,0		(x[i,j]+x[j,i])			
14	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0					0,0					
15															
16		1308,0	2550,0	2279,0	2663,0			0,0	0,0	0,0	2663,0				
17	1308,0		2401,0	1174,0	1926,0		0,0		2401,0	0,0	0,0				
18	2550,0	2401,0		2938,0	2120,0		0,0	0,0		2938,0	0,0		12207,0	Ymax	
19	2279,0	1174,0	2938,0		2657,0		2279,0	0,0	0,0		0,0				
20	2663,0	1926,0	2120,0	2657,0			0,0	1926,0	0,0	0,0					
21															
22															
23															

Рис. 2.26

Розв’язком задачі максимізації цільової функції F_2 буде

$$\mathbf{X_2}^{\mathbf{max}}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \text{а}\ y_{max} = 12207\ \text{грн.}$$

Для того щоб сумарна вартість квитків на авіаперльоти була максимальною потрібно їх відвідати в наступній послідовності: Київ→Париж →Москва→Рим→Будапешт→Київ, при цьому необхідно витратити 12207 грн.

Різниця між найдорожчим та найдешевшим маршрутами складає 2398 грн.

Проаналізувавши отримані дані на першому та другому кроках бачимо, що багатокритеріальна задача не є тривіальною, тобто розв’язки по кожному окремо взятому критерію не співпадають. Таким чином, розв’язком багатокритеріальної задачі буде деякий компромісний.

МЕТОД ІДЕАЛЬНОЇ ТОЧКИ

Врахувавши перші два кроки отримаємо, що ідеальною (недосяжною) буде точка А(4992, 9809), $F_1^{\max} = 8887$, $F_2^{\max} = 12207$.

Враховуючи, що багатокритеріальна задача є задачею мінімізації перейдемо до задачі максимізації тобто розглянемо задачу:

$$f_1=-F_1\to max,$$

$$f_2=-F_2\to max,$$

$$x\in X,$$

при цьому її розв'язок не зміниться.

Скористаємось методом ідеальної точки при $s=1$, тоді

$$F = \sum_{i=1,2} \frac{f_i(x)}{a_i - f_i^{\min}} = -\frac{1}{3895}F_1 - \frac{1}{2398}F_2 \approx -1*(0,74x_{01} + 1,49x_{02} + 1,18x_{03} +1,63x_{04} +0,74_{10} +1,61x_{12} + 0,89x_{13} + 1,44x_{14} +1,49x_{20} +1,61x_{21} +1,43x_{23} + 1,17x_{24} + 1,18x_{30} + 0,89x_{31} +1,43x_{32} +1,43x_{34} +1,63x_{40} +1,44x_{41} +1,17x_{42} +1,43x_{43}) \to max,$$

або $-F \to \min$.

Таким чином, для знаходження компромісного розв'язку методом ідеальної точки розв'язуємо однокритеріальну задачу виду:

$$-F = 0,74x_{01} + 1,49x_{02} + 1,18x_{03} +1,63x_{04} +0,74_{10} +1,61x_{12} + 0,89x_{13} + 1,44x_{14} +1,49x_{20} +1,61x_{21} +1,43x_{23} + 1,17x_{24} + 1,18x_{30} + 0,89x_{31} +1,43x_{32} +1,43x_{34} +1,63x_{40} +1,44x_{41} +1,17x_{42} +1,43x_{43} \to min,$$

при умовах

$$x_{01} + x_{02} + x_{03} + x_{04} =1,$$

$$x_{10} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1,$$

$$x_{20} + x_{21} + x_{23} + x_{24} = 1,$$

$$x_{30} + x_{31} + x_{32} + x_{34} = 1,$$

$$x_{40} + x_{41} + x_{42} + x_{43} = 1,$$

$$x_{10} + x_{20} + x_{30} + x_{40} = 1,$$

$$x_{01} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1,$$

$$x_{02} + x_{12} + x_{32} + x_{42} = 1,$$

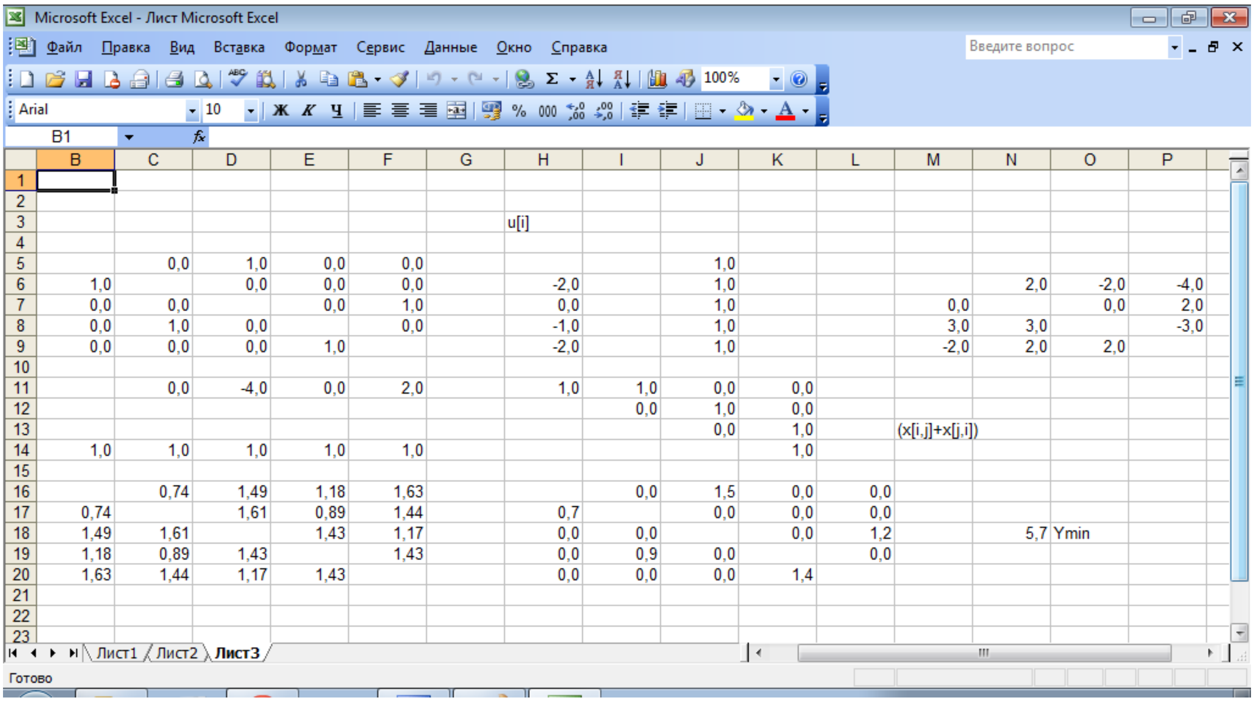
$$x_{03} + x_{13} + x_{23} + x_{43} = 1,$$

$$x_{04} + x_{14} + x_{24} + x_{34} = 1,$$

$$u_i - u_j + 4x_{ij} \le 3,\ i, j = 1{,}4,\ i \ne j\ ,$$

$$u_i\ ,u_i = \text{цілі},\ i = 1{,}4\ .$$

$$x_{ij} + x_{ji} \le 1,\ i, j = 0{,}4,\ i \ne j\ .$$



	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1															
2															
3							u[i]								
4															
5		0,0	1,0	0,0	0,0				1,0						
6	1,0		0,0	0,0	0,0		-2,0		1,0				2,0	-2,0	-4,0
7	0,0	0,0		0,0	1,0		0,0		1,0			0,0		0,0	2,0
8	0,0	1,0	0,0		0,0		-1,0		1,0			3,0	3,0		-3,0
9	0,0	0,0	0,0	1,0			-2,0		1,0			-2,0	2,0	2,0	
10															
11		0,0	-4,0	0,0	2,0		1,0	1,0	0,0	0,0					
12								0,0	1,0	0,0					
13									0,0	1,0		(x[i,j]+x[j,i])			
14	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0					1,0					
15															
16		0,74	1,49	1,18	1,63			0,0	1,5	0,0	0,0				
17	0,74		1,61	0,89	1,44		0,7		0,0	0,0	0,0				
18	1,49	1,61		1,43	1,17		0,0	0,0		0,0	1,2		5,7	Ymin	
19	1,18	0,89	1,43		1,43		0,0	0,9	0,0		0,0				
20	1,63	1,44	1,17	1,43			0,0	0,0	0,0	1,4					
21															
22															
23															

Рис. 2.27

Компромісним розв'язком методу ідеальної точки багатокритеріальної задачі буде (рис.2.27) $\mathbf{X}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, а вектор оцінок при цьому $y^* = (6348\,;9809)$, тобто відстань по даному маршруту становитиме 6348 км, а загальна вартість квитків 9809 гр.

Таким чином використання даного методу дало розв'язок який співпадає з локально-оптимальним розв'язком задачі мінімізації вартості квитків на авіа перельоти.

<u>МЕТОД АДИТИВНОЇ ЗГОРТКИ КРИТЕРІЇВ</u>

Так як критерії вимірюються в різних одиницях (гривня та кілометри) потрібно їх пронормувати звівши при цьому до безрозмірної шкали $[0,1]$:

$$f_i(x) = \frac{F_i(x)}{a_i - F_i^{\min}}.$$

Тобто, враховуючи крок 1 та крок 2: $f_1(x) = \dfrac{F_1(x)}{3895}$, $f_2(x) = \dfrac{F_2(x)}{2398}$.

Розв'язок багатокритеріальної задачі <u>*для випадку рівнозначних критеріїв*</u> ($\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$) методом адитивної згортки критеріїв буде таким самим (рис. 2.27), як і в методі ідеальної точки: $\mathbf{X}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $y^* = (6348; 9809)$.

Розв'язок багатокритеріальної задачі <u>*для випадку нерівнозначних критеріїв при*</u> :

- $\alpha_1 = 0{,}7$, $\alpha_2 = 0{,}3$ методом адитивної згортки критеріїв не змінився;
- $\alpha_1 = 0{,}8$, $\alpha_2 = 0{,}2$ методом адитивної згортки критеріїв не змінився;
- $\alpha_1 = 0{,}9$, $\alpha_2 = 0{,}1$ методом адитивної згортки критеріїв змінився на користь першого критерію і становить $\mathbf{X}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $y^* = (6055; 10571)$.

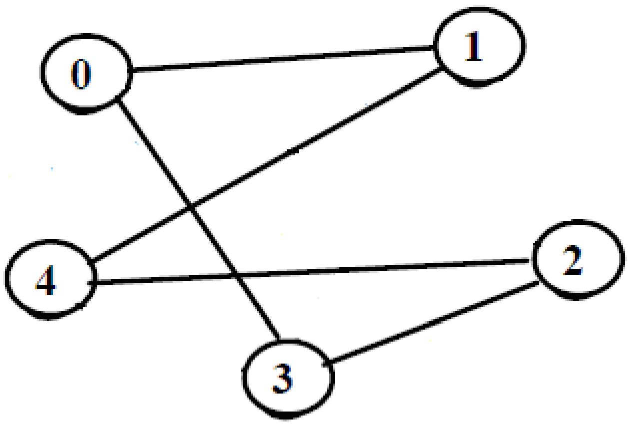
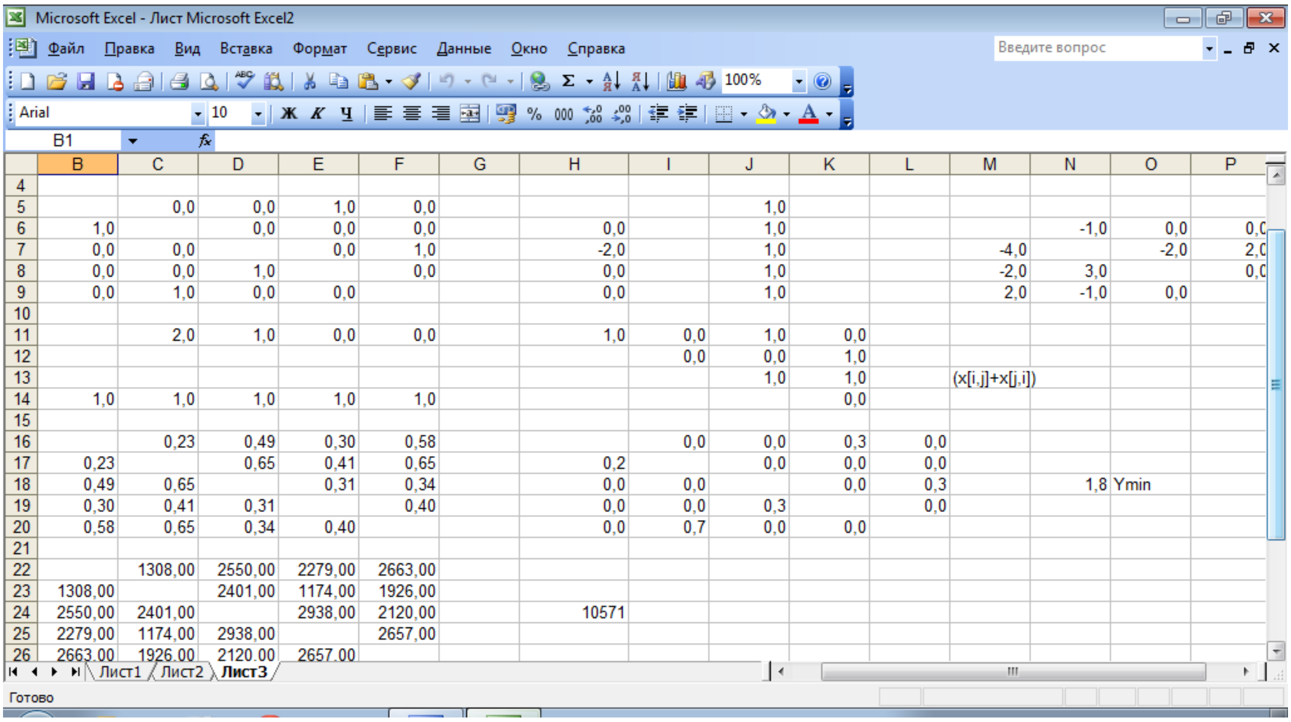


Рис. 2.28.



	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
4															
5		0,0	0,0	1,0	0,0				1,0						
6	1,0		0,0	0,0	0,0		0,0		1,0				-1,0	0,0	0,0
7	0,0	0,0		0,0	1,0		-2,0		1,0			-4,0		-2,0	2,0
8	0,0	0,0	1,0		0,0		0,0		1,0			-2,0	3,0		0,0
9	0,0	1,0	0,0	0,0			0,0		1,0			2,0	-1,0	0,0	
10															
11		2,0	1,0	0,0	0,0		1,0	0,0	1,0	0,0					
12								0,0	0,0	1,0					
13									1,0	1,0		(x[i,j]+x[j,i])			
14	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0					0,0					
15															
16		0,23	0,49	0,30	0,58			0,0	0,0	0,3	0,0				
17	0,23		0,65	0,41	0,65		0,2		0,0	0,0	0,0				
18	0,49	0,65		0,31	0,34		0,0	0,0		0,0	0,3		1,8	Ymin	
19	0,30	0,41	0,31		0,40		0,0	0,0	0,3		0,0				
20	0,58	0,65	0,34	0,40			0,0	0,7	0,0	0,0					
21															
22		1308,00	2550,00	2279,00	2663,00										
23	1308,00		2401,00	1174,00	1926,00										
24	2550,00	2401,00		2938,00	2120,00		10571								
25	2279,00	1174,00	2938,00		2657,00										
26	2663,00	1926,00	2120,00	2657,00											

Рис. 2.29.

Екран з проміжними і кінцевими результатами для розв’язання багатокритеріальної задачі методом адитивної згортки критеріїв представлено на рис. 2.29.

Збільшення вагового коефіцієнту першого критерію покращило його значення на 293 км.

Використання методу адитивної згортки для різних α_i для даної задачі показало, що отриманий розв’язок є досить стійким до зміни вагових коефіцієнтів критеріїв і співпадає з розв’язком методу ідеальної точки.

<u>*МЕТОД ПОСЛІДОВНИХ ПОСТУПОК*</u>

Задаємо ранг відносної важливості критеріїв: $f_2 \succ f_1$, тобто критерій мінімізації вартості квитків на авіа перельоти важливіший за критерій мінімізації загальної довжини маршруту.

Тоді першим кроком даного методу буде вищеописаний крок 2.

Спробуємо покращити значення першого критерію ввівши поступку для другого $\Delta F_2 = 1000$ *грн*.

Перейдемо до однокритеріальної задачі кроку 1 в якій добавлено ще одне обмеження $F_2 \le F_2^* + \Delta F_2$.

Розв’яжемо однокритеріальну задачу виду:

F_1: $754x_{01} + 1676x_{02} + 899x_{03} + 2024x_{04} + 754_{10} + 2375x_{12} + 1568x_{13} + 2486x_{14} + 167x_{20} + 2375x_{21} + 810x_{23} + 1106x_{24} + 899x_{30} + 1568x_{31} + 810x_{32} + 1244x_{34} + 2024x_{40} + 2486x_{41} + 1106x_{42} + 1244x_{43} \to \min$,

при умовах

$1308x_{01} + 2550x_{02} + 2279x_{03} + 2663x_{04} + 1308_{10} + 2401x_{12} + 1174x_{13} + 1926x_{14} + 2550x_{20} + 2401x_{21} + 2938x_{23} + 2120x_{24} + 2279x_{30} + 1174x_{31} + 2938x_{32} + 2657x_{34} + 2663x_{40} + 1926x_{41} + 2120x_{42} + 2657x_{43} \le 10809$

$$x_{01} + x_{02} + x_{03} + x_{04} = 1,$$

$$x_{10} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1,$$

$$x_{20} + x_{21} + x_{23} + x_{24} = 1,$$

$$x_{30} + x_{31} + x_{32} + x_{34} = 1,$$

$$x_{40} + x_{41} + x_{42} + x_{43} = 1,$$

$$x_{10} + x_{20} + x_{30} + x_{40} = 1,$$

$$x_{01} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1,$$

$$x_{02} + x_{12} + x_{32} + x_{42} = 1,$$

$$x_{03} + x_{13} + x_{23} + x_{43} = 1,$$

$$x_{04} + x_{14} + x_{24} + x_{34} = 1,$$

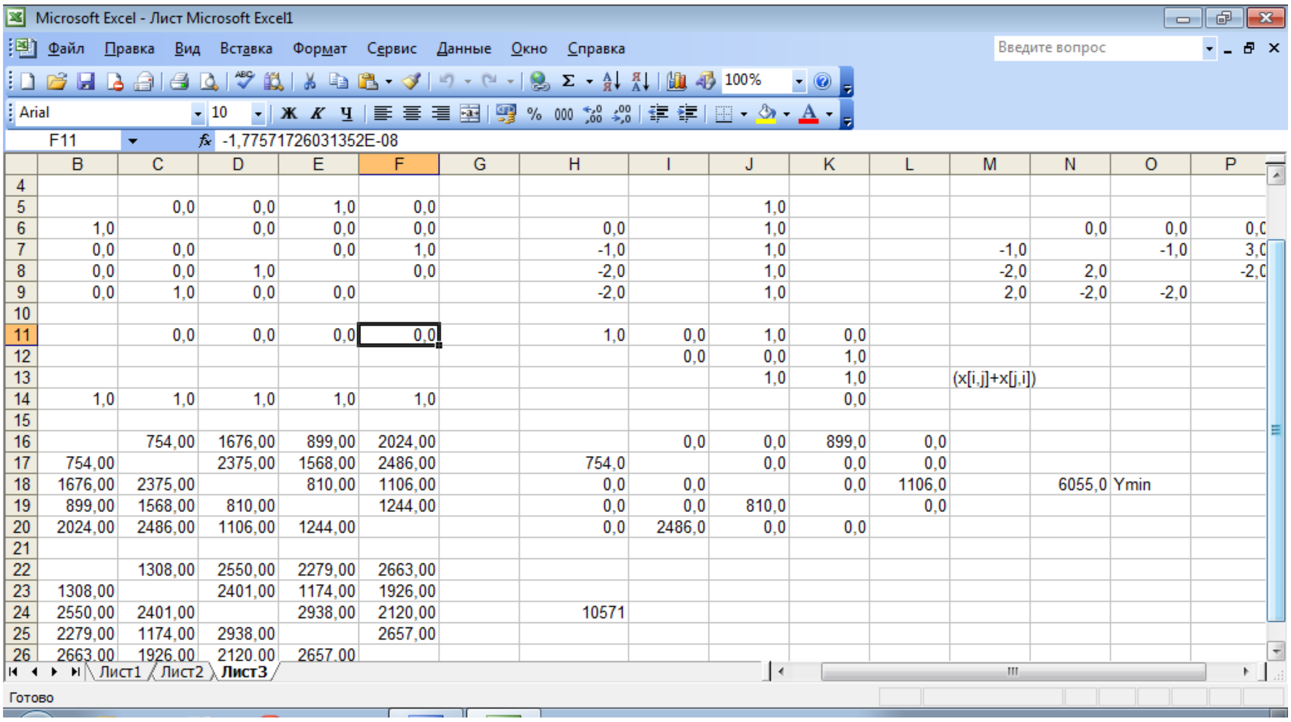
$$u_i - u_j + 4x_{ij} \le 3,\ i, j = 1,4,\ i \ne j\ ,$$

$$u_i\ ,u_i = \text{цілі},\ i = 1,4\ .$$

$$x_{ij} + x_{ji} \le 1,\ i, j = 0,4,\ i \ne j\ .$$

Для цього в Excel введемо обмеження виду:

$C$22*$C$5+$D$22*$D$5+$E$22*$E$5+$F$22*$F$5+$B$23*$B$6+$D$23*$D$6+$E$23*$E$6+$F$23*$F$6+$B$24*$B$7+$C$24*$C$7+$E$24*$E$7+$F$24*$F$7+$B$25*$B$8+$C$25*$C$8+$D$25*$D$8+$F$25*$F$8+$B$26*$B$9+$C$26*$C$9+$D$26*$D$9+$E$26*$E$9≤10809.



	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
4															
5		0,0	0,0	1,0	0,0				1,0						
6	1,0		0,0	0,0	0,0		0,0		1,0				0,0	0,0	0,0
7	0,0	0,0		0,0	1,0		-1,0		1,0			-1,0		-1,0	3,0
8	0,0	0,0	1,0		0,0		-2,0		1,0			-2,0	2,0		-2,0
9	0,0	1,0	0,0	0,0			-2,0		1,0			2,0	-2,0	-2,0	
10															
11		0,0	0,0	0,0	0,0		1,0	0,0	1,0	0,0					
12								0,0	0,0	1,0					
13									1,0	1,0		(x[i,j]+x[j,i])			
14	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0					0,0					
15															
16		754,00	1676,00	899,00	2024,00			0,0	0,0	899,0	0,0				
17	754,00		2375,00	1568,00	2486,00		754,0		0,0	0,0	0,0				
18	1676,00	2375,00		810,00	1106,00		0,0	0,0		0,0	1106,0		6055,0	Ymin	
19	899,00	1568,00	810,00		1244,00		0,0	0,0	810,0		0,0				
20	2024,00	2486,00	1106,00	1244,00			0,0	2486,0	0,0	0,0					
21															
22		1308,00	2550,00	2279,00	2663,00										
23	1308,00		2401,00	1174,00	1926,00										
24	2550,00	2401,00		2938,00	2120,00		10571								
25	2279,00	1174,00	2938,00		2657,00										
26	2663,00	1926,00	2120,00	2657,00											

Рис. 2.30.

Екран з проміжними і кінцевими результатами для розв’язання багатокритеріальної задачі методом послідовних поступок представлено на рис.2.30.

Отримаємо розв’язок (рис 2.30) $\mathbf{X}^{*}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $y^{*}=(6055\,;10571)$.

Отриманий розв’язок показує, що збільшивши кошти потрачені на квитки на 762 грн отримаємо коротший маршрут на 293 км.

Крім того використання даного методу показало, що для того щоб покращити значення першого критерію, тобто скоротити маршрут по довжині потрібно другий погіршити мінімально на 762 од., тобто, збільшити виплату на квитки мінімально на 762 грн.

Література

1. Волошин, О. Ф. Моделі та методи прийняття рішень : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / О. Ф. Волошин, С. О. Мащенко. - 2-ге вид., переоб. та допов. - К. : Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2010. - 336 с.
2. Кузьмичов А. І. Оптимізаційні методи і моделі: практикум в EXCEL [Текст] : [навч. посіб.] / А. І. Кузьмичов. - К. : ВПЦ АМУ, 2013. - 438 с.
3. Моделі і методи прийняття управлінських рішень [Текст] : навч. посіб. для студентів ВНЗ / К. Ф. Ковальчук [та ін.] ; Нац. металург. акад. України. - Дніпропетровськ : Герда, 2014. - 115 с.
4. Клочко О. В. Методи оптимізації в економіці [Текст] : навч. посіб. / Клочко О. В., Клочко В. І., Потапова Н. А. ; Вінниц. нац. аграр. ун-т. - Вінниця : Вінницька газета, 2013. - 451 с.
5. Зайченко, Ю. П. Дослідження операцій [Текст] : підручник для студ. вищих навч. закл., що навч. за напрямками "Прикладна математика" та "Комп'ютерні науки" / Ю. П. Зайченко. - 4.вид., переоб. і доп. - К. : ЗАТ "ВІПОЛ", 2000. - 687 с. - Бібліогр.: с. 686-687.
6. Шоробура,пН.Н. Разработка моделей и программных средств для многокритериальной оптимизации сложных объектов в компьютерных информационныхпсистемах [Електронний ресурс] / Н.Н. Шоробурап – Режим доступу:п//http://masters.donntu.edu.ua/2004/kita/shorobura/diss/index.htm. – Назва з домашньої сторінки Інтернету.
7. Вентцель, Е. С. Исследование операцій / Е.С. Вентцель – М.: Наука. 1988. – 208 с.
8. Воронин, А.Н. Многокритериальная оптимизация динамических систем управления / А.Н. Воронин // Кибернетика. – 1980. – №4. – с. 56–68.
9. Подиновский, В.В. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач / В.В. Подиновский, В.Д. Ногин. – М.: Наука, 1982. – 256 с.
10. Кини, Р.Л. Принятие решений при многих критериях предпочтения и замещения / Р.Л. Кини, Х. Райфа; пер. с англ. под ред. Шахнова И. Ф. – М.: Радио и связь, 1981. – 560 с.
11. Векторная оптимизация динамических систем / А. М. Воронин, Ю. К. Зиатдинов, О. І Козлов, В. С. Чабанюк; за ред. А. М. Воронина – К.: Техніка, 1999. – 284 с.
12. Дайер Дж. Многоцелевое программирование с использованием человеко-машинных процедур / Дж. Дайер // Вопросы анализа и процедуры принятия решений. – М.: Мир, 1976. – с. 108-125.
13. Курс методов оптимизации: учебное пособие – 2-е изд. /А. Г. Сухарев, А. В. Тимохов, В. В. Федоров – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 368 с.
14. Модели и методы векторной оптимизации / С.В.Емельянов, В.И.Борисов, А.А.Малевич, А.М.Черкашин// Техническая кибернетика. Итоги науки и техники. — М.: ВИНИТИ, 1973. — Т.5. — С. 386 — 448.
15. Миркин, Б. Г. Проблема группового выбора / Б. Г. Миркин – М.: Наука, 1974. – 256 с.