УДК 519.21

Д. В. Гусак (Інститут математики НАН України)
М. С. Герич (Ужгородський нац. ун-т)

УТОЧНЕННЯ КОМПОНЕНТ ОСНОВНОЇ ФАКТОРИЗАЦІЙНОЇ ТОТОЖНОСТІ ДЛЯ ГРАТЧАСТИХ ПУАССОНІВСЬКИХ ПРОЦЕСІВ НА ЛАНЦЮГАХ МАРКОВА

The article is about a homogeneous lattice Poisson process $\xi(t)$ on the Markov chain $x(t)$. It qualifies the auxiliary statements for factorization relations for some two-dimentional random walk on Markov chains. With the help of these statements we obtain twosided factorization decomposition of generating function of the considered process and the representation of the component of decomposition.

В статті розглядається однорідний гратчастий пуассонівський процес $\xi(t)$ на ланцюгу Маркова $x(t)$. В ній уточнюються допоміжні твердження для факторизаційних співвідношень для деякого двовимірного блукання на ланцюгах Маркова. З допомогою цих тверджень одержано двосторонній факторизаційний розклад генератриси розглядуваного процесу і зображення компонент розкладу.

В [1] описано клас процесів з незалежними приростами на ланцюгах Маркова і вивчено їх властивості у випадку, коли стрибки цих процесів неперервно розподілені. Для цього же випадку в [2]- [4] досліджувались розподіли різних функціоналів. В [6] продовжено дослідження граничних задач, зокрема у випадку неперервності та майже напівнеперервності процесів на ланцюгах Маркова.

Ми розглянемо двовимірний марковський процес $Z(t) = \{\xi(t), x(t)\}$ ($t \geq 0$, $\xi(0)$=0), однорідний за часом, з простором станів $\mathbb{Z}\times\mathbb{E}$ ($\mathbb{Z} = \{0; \pm1; \pm2; \pm3; \ldots\}$, $\mathbb{E} = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$). Перша компонента процесу $Z(t)$: $\xi(t)$ – складний гратчастий пуассонівський процес, де $\xi_k(t) = \sum\limits_{i\leq N_k(t)} \xi_i^{(k)}$, де $N_k(t)$–простий пуассонівський процес,

$$P\{N_k(t) = r\} = \frac{(\lambda_k t)^r}{r!} e^{-\lambda_k t},$$

інтервали між стрибками $\xi_k(t)$ (ζ'_k-показниково розподілені):

$$P\{\zeta'_k > t\} = e^{-\lambda_k t}.$$

Друга компонента $\{x(t), t \geq 0\}$ процесу $Z(t)$ є однорідним ланцюгом Маркова з матрицею перехідних імовірностей

$$\mathbf{P}(t) = \|P\{x(t) = r|x(0) = k\}\|_{k,r\in\mathbb{E}} = e^{\mathbf{Q}t},$$

де $\mathbf{Q}$ – інфінітезимальна матриця ланцюга Маркова $x(t)$ має вигляд

$$\mathbf{Q} = \mathbf{N}(\mathbf{P} - \mathbf{I}),\ \mathbf{N} = \|\delta_{kr} n_k\|_{k,r\in\mathbb{E}},\ \mathbf{I} = \|\delta_{kr}\|_{k,r\in\mathbb{E}},$$

$\{n_k \geq 0, k \in \mathbb{E}\}$ – параметри показниково розподілених випадкових величин ζ_k, де ζ_k – час перебування $x(t)$ в стані k ($P\{\zeta_k > t\} = e^{-n_k t}$), $\mathbf{P} = \|p_{kr}\|$ – матриця перехідних імовірностей вкладеного ланцюга Маркова $\{y_n = x(\sigma_n + 0), n \geq 0\}$.

Якщо σ_n – момент n-ї зміни стану $x(t)$, тоді

$$p_{kr} = P\{y_{n+1} = r|y_n = k\} = P\{y_1 = r|y_0 = k\}$$

(в силу однорідності ланцюга Маркова),

$$\sum_{r=1}^{n} p_{kr} = 1,\ p_{rr} = 0,\ n > 0.$$

Відносно першої компоненти $\{\xi(t), t \geq 0\}$ будемо припускати, що її прирости на інтервалі $[\sigma_n, \sigma_{n+1})$ мають той же розподіл, що і прирости одного із процесів $\{\xi_k(t)\}$, тобто $\Delta\xi(t) \doteq \Delta\xi_k(t)$, якщо $x(t) = k$, $t, t + \Delta t \in [\sigma_n, \sigma_{n+1})$. Крім того, в момент σ_n зміни станів, коли вкладений ланцюг Маркова переходить із стану $k = x(\sigma_n - 0)$ в стан $r = x(\sigma_n + 0)$, процес $\xi(t)$ має додаткові прирости

$$\chi_{kr} = \xi(\sigma_n + 0) - \xi(\sigma_n - 0)\ (\chi_{k_n r} = 0 \text{ при } r),$$

причому $\{\chi_{kr}\}_{k,r=1}$ – сукупність незалежних випадкових величин, що не залежать від $\xi_k(t)$ та $x(t)$ з функцією розподілу

$$\mathbf{F}(l) = \|f_{kr}(l)\| = \|p_{kr}P\{\chi_{kr} = l\}\|,$$

та матричною твірною функцією

$$\widetilde{\mathbf{F}}(z) = \mathbf{E}z^{\chi_{kr}} = \|E[z^{\chi_{kr}}, y_1 = r | y_0 = k]\|, |z| = 1.$$

Згідно однорідності $Z(t)$ за часом по компоненті $\xi(t)$ (див. [1], [3]) для опису розподілу цього процесу достатньо розглянути матрицю

$$\mathbf{P}(t, n) = \|P\{\xi(t) = n,\ x(t) = r | x(0) = k, \xi(0) = 0\}\|, \tag{1}$$

та матричну твірну функцію

$$\mathbf{E}z^{\xi(t)} = e^{t\mathbf{K}(z)},\ |z| = 1, \tag{2}$$

де кумулянта

$$\mathbf{K}(z) = \ln \mathbf{E}z^{\xi(1)} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} (z^l - 1)(\mathbf{\Lambda P}(l) + \mathbf{N}\ \mathbf{F}(l)) + \mathbf{Q}, \tag{3}$$

$\mathbf{P}(l) = \|\delta_{kr}P\{\xi_k = l\}\|, \mathbf{Q}, \mathbf{F}(l), \mathbf{N}$ визначені вище, $\mathbf{\Lambda} = \|\delta_{kr}\lambda_k\|, k, r \in E, \{\lambda_k \geq 0\}$ – параметри показниково розподілених випадкових величин ζ'_k, які визначають час між двома скачками процесу $\xi_k(t)$.

Введений таким чином процес $Z(t) = \{\xi(t), x(t)\}$ називається процесом з незалежними приростами, заданим на скінченному ланцюгу Маркова (ЛМ). Потрібно зазначити, що так побудований процес є марковським адитивним процесом. В зарубіжній літературі такі процеси називаються процесами у випадковому середовищі. Крім того, їх називають процесами, що керуються ланцюгами Маркова (процесами однорідними за компонентою $\xi(t)$, процесами з перемиканням).

В подальших викладках для спрощення позначень інтегральних перетворень по t будемо користуватися показниково розподіленою випадковою величиною θ_s:

$$P\{\theta_s > t\} = e^{-st},\ s > 0,\ t \geq 0,$$

тоді

$$\boldsymbol{g}(s,z)=s\int\limits_0^{+\infty}e^{-st}\mathbf{E}z^{\xi(t)}dt=\mathbf{E}z^{\xi(\theta_s)}=s(s\mathbf{I}-\mathbf{K}(z))^{-1}, \tag{4}$$

$$\mathbf{P}_s=\|P\{x(\theta_s)=r|x(0)=k\}\|=s\int\limits_0^{+\infty}e^{-st}\mathbf{P}(t)dt=s\int\limits_0^{+\infty}e^{-st}e^{t\mathbf{Q}}dt=s(s\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}.$$

Для функціональних послідовностей $\{\mathbf{R}_x, x=0,\pm1,\pm2,\ldots\}$ введемо поняття кілець, розширених кілець і відповідних півкілець та їх проекцій. А саме, позначимо кільце твірних функцій $R(z)$

$$\mathbb{L}:\{\mathbf{R}(z)=\sum_{x=-\infty}^{+\infty}z^x\mathbf{R}_x,\ \sum_{x=-\infty}^{+\infty}\mathbf{R}_x<\infty,|z|=1\}$$

із операцією "множення" типу згортки

$$\mathbf{R}_1(z)\circ\mathbf{R}_2(z)=\sum_{y=-\infty}^{+\infty}\mathbf{R}_1(z-y)\mathbf{R}_2(y)$$

та звичайною операцією додавання, а розширення кільця $\mathbb{L}$ позначимо

$$\mathbb{L}_{\mathbf{I}}:\{\mathbf{I}\pm\mathbf{R}(z)=\mathbf{R}_{\mathbf{I}}(z),\det\mathbf{R}_{\mathbf{I}}(z)\neq0\}.$$

Аналогічно позначимо підкільця функцій на півосях

$$\mathbb{L}^{\pm}:\left\{\mathbf{R}_{\pm}(z)=\sum_{x=0}^{\pm\infty}z^x\mathbf{R}_x\right\}$$

та їх розширення

$$\mathbb{L}^{\pm}_{\mathbf{I}}:\{\mathbf{I}-\mathbf{R}_{\pm}(z),\det[\mathbf{I}-\mathbf{R}_{\pm}(z)]\neq0\},$$

які допускають аналітичне продовження на $|z|\leq1$ $(|z|\geq1)$ $\mathbf{R}^{\pm1}_{\pm}(z)\in\mathbb{L}^{\pm}_{\mathbf{I}}$.

Визначимо також операції проектування

$$[\mathbf{R}(z)]_+=\sum_{x=1}^{+\infty}z^x\mathbf{R}_x,\qquad[\mathbf{R}(z)]_-=\sum_{x=-1}^{-\infty}z^x\mathbf{R}_x,$$

$$[\mathbf{R}(z)]^0_+=\sum_{x=0}^{+\infty}z^x\mathbf{R}_x,\qquad[\mathbf{R}(z)]^0_-=\sum_{x=-\infty}^{0}z^x\mathbf{R}_x,$$

$$\mathbf{R}(z)=[\mathbf{R}(z)]_++[\mathbf{R}(z)]^0_-=[\mathbf{R}(z)]_-+[\mathbf{R}(z)]^0_+.$$

Для загального гратчастого процесу $\xi(t)$ на ЛМ кумулянта $\mathbf{K}(z)$ містить діагональну частину

$$\mathbf{K}_{dg}(z)=\|\delta_{kr}\mathbf{K}_r(z)\|=\mathbf{\Lambda}\sum_{l\neq0}(z^l-1)\mathbf{P}(l),\ \ r=\overline{1,n};$$

$$\mathbf{K}(z)=\sum_{l=-\infty}^{+\infty}(z^l-1)(\mathbf{\Lambda P}(l)+\mathbf{NF}(l))+\mathbf{Q},\ \mathbf{K}(1)=\mathbf{Q};$$

$$\mathbf{K}(z)=\mathbf{K}_{dg}(z)+\mathbf{N}(\widetilde{\mathbf{F}}(z)-\mathbf{I})=\mathbf{K}_{dg}(z)+\mathbf{N}(\widetilde{\mathbf{F}}(z)-\mathbf{P})+\mathbf{Q},\ \widetilde{\mathbf{F}}(1)=\mathbf{P};$$

$$\widetilde{\mathbf{F}}(z)=\mathbf{K}_\chi(z)+\mathbf{P},\ \mathbf{K}_\chi(z)=\mathbf{N}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}(z^l-1)\mathbf{F}(l),\ \mathbf{K}_\chi(1)=0.$$

Позначимо

$$\mathbf{K}(s,z)=s\mathbf{I}-\mathbf{K}(z),$$

$$\mathbf{K}_{dg}(s,z)=s\mathbf{I}+\mathbf{N}-\mathbf{K}_{dg}(z). \tag{5}$$

Введемо позначення основних функціоналів для $\xi(t)$: функціонали, що характеризують екстремуми процесу на інтервалі $[0;t]$:

$$\xi^+(t)=\sup_{0\le u\le t}\xi(t),\qquad \overline{\xi}(t)=\xi(t)-\xi^+(t);$$

$$\xi^-(t)=\inf_{0\le u\le t}\xi(t),\qquad \check{\xi}(t)=\xi(t)-\xi^-(t);$$

функціонали, пов'язані з перетином додатнього рівня $x>0$ ("верхні" функціонали):

$$\tau^+(x)=\inf\{t>0:\xi(t)>x\},\qquad \gamma^+(x)=\xi(\tau^+(x))-x;$$

$$\gamma_+(x)=x-\xi(\tau^+(x)-0),\qquad \gamma_x^+=\gamma_+(x)+\gamma^+(x);$$

та функціонали, пов'язані з перетином від'ємного рівня $x<0$ ("нижні" функціонали):

$$\tau^-(x)=\inf\{t<0:\xi(t)<x\},\qquad \gamma^-(x)=x-\xi(\tau^-(x));$$

$$\gamma_-(x)=\xi(\tau^-(x)-0)-x,\qquad \gamma_x^-=\gamma_-(x)+\gamma^-(x).$$

Позначимо розподіли екстремумів та їх відповідні матричні твірні функції:

$\mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s)=x\}=\|P\{\xi^+(\theta_s)=x,\ x(\theta_s)=r|x(0)=k\}\|=\mathbf{p}_x^+(s)$, $\mathbf{P}\{\xi^-(\theta_s)=x\}=\mathbf{p}_x^-(s)$,

$\mathbf{P}\{\overline{\xi}(\theta_s)=x\}=\mathbf{P}\{\xi(\theta_s)-\xi^+(\theta_s)=x\}=\check{\mathbf{p}}_x^-(s)$,

$\mathbf{P}\{\check{\xi}(\theta_s)=x\}=\mathbf{P}\{\xi(\theta_s)-\xi^-(\theta_s)=x\}=\check{\mathbf{p}}_x^+(s)$,

$\mathbf{P}\{\xi(\theta_s)=x\}=\mathbf{p}_x(s)$,

$\mathbf{P}_+(s,x)=\mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s)<x\}=\|P\{\xi^+(\theta_s)<x,\ x(\theta_s)=r|x(0)=k\}\|,\ x>0$,

$\mathbf{P}^+(s,x)=\mathbf{P}\{\check{\xi}(\theta_s)<x\},\ x>0$,

$\mathbf{P}_-(s,x)=\mathbf{P}\{\xi^-(\theta_s)<x\},\ \mathbf{P}^-(s,x)=\mathbf{P}\{\overline{\xi}(\theta_s)<x\},\ x<0$,

$\mathbf{P}(s,x)=\mathbf{P}\{\xi(\theta_s)<x\};\ \overline{\mathbf{P}}(s,x)=\mathbf{P}_s-\mathbf{P}(s,x),\ x\ge 0$,

$\boldsymbol{g}_+(s,z)=\mathbf{E}z^{\xi^+(\theta_s)},\ \boldsymbol{g}_-(s,z)=\mathbf{E}z^{\xi^-(\theta_s)}$,

$\boldsymbol{g}^{+}(s,z)=\mathbf{E}z^{\check{\xi}(\theta_s)},\ \boldsymbol{g}^{-}(s,z)=\mathbf{E}z^{\bar{\xi}(\theta_s)},$

$(\boldsymbol{g}_{+}(s,z))=\mathbf{E}z^{\xi^{+}(\theta_s)}=\|E[z^{\xi^{+}(\theta_s)},\ x(\theta_s=r|x(0)=k]\|.$

Аналогічно θ_s позначимо через θ_{s+n_k} незалежну від $\xi(t)$ та $x(t)$ показниково розподілену величину з параметром $s+n_k$. Тоді для герератриси

$$Ez^{\xi_k(\theta_{s+n_k})}=(s+n_k)(s+n_k-K_k(z))^{-1},\ K_r(z)=lnEz^{\xi_r(1)},\ k,r=\overline{1,n}.$$

має місце безмежно подільна факторизація (див. [4])

$$Ez^{\xi_k(\theta_{s+n_k})}=Ez^{\xi_k^{+}(\theta_{s+n_k})}\cdot Ez^{\xi_k^{-}(\theta_{s+n_k})},\ |z|=1, \tag{6}$$

де $\quad \xi_k^{+}(\theta_{s+n_k})=\sup\limits_{0\le u\le\theta_{s+n_k}}\xi(u),\ \xi^{-}(\theta_{s+n_k})=\inf\limits_{0\le u\le\theta_{s+n_k}}\xi(u),\ s\ge 0,\ n_k>0.$

Позначимо $\mathbf{D}(s,z)=\|\delta_{kr}E[z^{\xi_k(\theta_{s+n_k})}]\|, k=\overline{1,n}$. Для матриці $\mathbf{D}(s,z)$ має місце наступна лема.

Лема 1. *Діагональна матриця $\boldsymbol{D}(s,z)$ допускає факторизаційний розклад*

$$\mathbf{D}(s,z)=(s\mathbf{I}+\mathbf{N})\mathbf{K}_{dg}^{-1}(s,z)=\mathbf{D}_{+}(s,z)\mathbf{D}_{-}(s,z),\ \ |z|=1, \tag{7}$$

$\mathbf{D}_{\pm}(s,z)=\|\delta_{kr}d_k^{\pm}(s,z)\|$ – *комутативні діагональні матриці* .

Доведення. За основною факторизаційною тотожністю (о.ф.т.) для цілозначних процесів діагональні генератриси згідно з [4] мають вигляд

$$Ez^{\xi_k(\theta_{s+n_k})}=\frac{s+n_k}{s+n_k-K_k(z)}=d_k^{+}(s,z)\cdot d_k^{-}(s,z), |z|=1, k=\overline{1,n},$$

$d_k^{\pm}(s,z)=Ez^{\xi_k^{\pm}(\theta_{s+n_k})}$, $\mathbf{D}_{\pm}(s,z)=\|\delta_{kr}d_k^{\pm}(s,z)\|$.

Отже, $\mathbf{D}(s,z)=\mathbf{D}_{+}(s,z)\mathbf{D}_{-}(s,z)=(s\mathbf{I}+\mathbf{N})\mathbf{K}_{dg}^{-1}(s,z)$.

Згідно леми 7.1 і теореми 7.1 із [4] маємо:

$d_k^{\pm}(s,z)=e^{\sum\limits_{\pm l>0}(z^l-1)\widetilde{n}_l^{\pm}(s+n_k)}$,

$\widetilde{n}_l^{\pm}(s+n_k)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-(s+n_k)t}t^{-1}P\{\xi_k^{\pm}(t)=l\}dt,$

$p_l(t)=P\{\xi_k^{\pm}(t)=l\},\ \pm l=1,2,\dots$

Побудова факторизаційного розкладу для $\mathbf{K}(s,z)$ пов'язана з використанням (7) і деяких перетворень $\mathbf{K}(s,z)$. А ці перетворення пов'язані з узагальненням скалярного факторизаційного розкладу для двовимірного випадкового блукання $\{\sigma_n,s_n\}$ (див. [5]). Нас цікавить двовимірне не скалярне блукання, а блукання $Z_n=\{(\sigma_n,s_n),y_n\}$ на вкладеному ЛМ $y_n=x(\sigma_n)$ з матричною характеристичною функцією (х. ф.)

$$\mathbf{H}(s,z)=\|E[e^{-s\sigma_1}z^{\chi_{kr}(s)},\ y_1=r|y_0=k]\|,$$

стрибки якого при різних n – незалежні і однаково розподілені та обумовлені розкладом (7)

$$\chi_{kr}^{(n)}(s)=\chi_{kr}+\xi_k^{-}(\theta_{s+n_k})+\xi^{+}(\theta_{s+n_k}),\ k\ne r,\ \chi_{rr}(s)\equiv 0.$$

Як і в [2], мають місце наступні твердження.

Лема 2. *При $s > 0$ має місце зображення*

$$\mathbf{K}(s,z) = (s\mathbf{I} + \mathbf{N})\mathbf{D}_-^{-1}(s,z)[\mathbf{I} - \mathbf{H}(s,z)]\mathbf{D}_+^{-1}(s,z), \tag{8}$$

де для матриці двовимірного блукання з кроком $\chi_{kr}(s)$ на ланцюгу Маркова $\{y_n\}$

$$\mathcal{H}(s,z) = \mathbf{I} - \mathbf{H}(s,z)$$

має місце правий факторизаційний розклад

$$\mathcal{H}(s,z) = \mathcal{H}_-(s,z)\mathcal{H}_+(s,z),\ |z| = 1. \tag{9}$$

Аналогічно доводиться справедливість лівосторонньої факторизації

$$\mathcal{H}(s,z) = \mathcal{H}^+(s,z)\mathcal{H}^-(s,z),\ |z| = 1. \tag{10}$$

$\mathcal{H}_\pm^{\pm 1} \in \mathbb{L}_\mathbf{I}^\pm$ і допускають аналітичне продовження в область $\{|z| < 1\}(\{|z| > 1\})$.

Як і в [2], рівняння для

$$\mathbf{P}(t,x) = \|P\{\xi(t) = x, x(t) = r|x(0) = k\}\|$$

з оператором $\mathbf{L}_0$ справа можна вивести усередненням за формулою повної ймовірності на переходах ланцюгів Маркова в момент останнього стрибка на кінцевому інтервалі $[t - \Delta t, t]$. Точніше кажучи, аналогічно рівнянню (1.1) в [2], для

$$\mathbf{F}(t,x) = \|P\{\xi(t) < x,\ x(t) = r|x(0) = k\}\|$$

виводиться рівняння прямого типу (з оператором $\mathbf{L}_0$, що діє справа)

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}(t,x) = \mathbf{P}(t,x)\mathbf{L}_0,\ x \in \mathbf{Z}, \tag{11}$$

$$f(x)\mathbf{L}_0 = \sum_l [f(x-l) - f(x)]\mathbf{K}_0(l) + f(x)\mathbf{Q},\ \mathbf{K}_0(l) = \mathbf{\Lambda P}(l) + \mathbf{NF}(l) \tag{12}$$

з початковою умовою:

$$\mathbf{P}(0,x) = \mathbf{I}\delta_0(x),\ \delta_0(x) = \begin{cases} 1,\ x = 0, \\ 0,\ x \neq 0. \end{cases} \tag{13}$$

Рівняння (11) з урахуванням умови (13) та співвідношення

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} d_t\mathbf{P}(t,x) = e^{-st}\mathbf{P}(t,x)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty \mathbf{P}(x,t)e^{-st}dt = \mathbf{P}_x(s) - \mathbf{I}\delta_0(x),$$

після перетворення Лапласа набуває вигляду

$$s(\mathbf{P}_x(s) - \mathbf{I}\delta_0(x)) = \sum_l [\mathbf{P}_{x-l}(s) - \mathbf{P}_x(s)]\mathbf{K}_0(l) + \mathbf{P}_x(s)\mathbf{Q}$$

або в операторному вигляді

$$\mathbf{P}_x(s)(s\mathbf{I} - \mathbf{L}_0) = s\delta_0(x),\ x \in \mathbf{Z}. \tag{14}$$

Після твірного перетворення рівняння різницевого типу з (14) випливає, що для

$$\boldsymbol{g}(s,z) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} z^x \mathbf{P}_x(s) = \mathbf{E} z^{\xi(\theta_s)}$$

$$\boldsymbol{g}(s,z)(s\,\mathbf{I} - \mathbf{K}(z)) = s\,\mathbf{I},\ \ \boldsymbol{g}(s.z) = s(s\,\mathbf{I} - \mathbf{K}(z))^{-1}. \tag{15}$$

Рівняння для розподілу граничних функціоналів виводяться усередненням за формулою повної ймовірності на переходах ланцюга Маркова в момент першого стрибка на початковому інтервалі $[0,t']$, $t' > \zeta_k \vee \zeta_k'$, $k = \overline{1,n}$. Для цього використовуються стохастичні співвідношення для цих функціоналів. В цих рівняннях оператор $\mathbf{L}_0$ діє зліва

$$\mathbf{L}_0 f(x) = \sum_l \mathbf{K}_0(l)(f(x-l) - f(x)) + \mathbf{Q} f(x),\ \ x \in \mathbf{Z}, \tag{16}$$

де $\mathbf{K}_0(l) = \mathbf{\Lambda}\mathbf{P}(l) + \mathbf{N}\mathbf{F}(l))$.

Згідно із [7] має місце теорема.

Теорема 1. *При $s > 0$, $|z| = 1$ мають місце правий і лівий факторизаційні розклади*

$$\boldsymbol{K}(s,z) = \begin{cases} \boldsymbol{K}_-(s,z)\boldsymbol{K}_+(s,z), \\ \boldsymbol{K}^+(s,z)\boldsymbol{K}^-(s,z). \end{cases} \tag{17}$$

Між розподілами $\xi^{\pm}(\theta_s)$ та генератрисою $\tau^{\pm}(x)$ існує такий зв'язок:

$$\boldsymbol{P}\{\xi^+(\theta_s) > x\} = \overline{\boldsymbol{P}}_+(s,x) = \boldsymbol{E}[e^{-s\tau^+(x)},\, \tau^+(x) < \infty]\boldsymbol{P}_s,\ \ x > 0, \tag{18}$$

$$\boldsymbol{P}\{\xi^-(\theta_s) < x\} = \boldsymbol{E}[e^{-s\tau^-(x)},\, \tau^-(x) < \infty]\boldsymbol{P}_s,\ \ x < 0. \tag{19}$$

Надалі будемо позначати $\mathbf{T}^{\pm}(s,x) = \mathbf{E}[e^{-s\tau^{\pm}(x)},\, \tau^{\pm}(x) < \infty]$.

На основі наведених вище тверджень доводиться наступна лема.

Лема 3. *При $s > 0$ для $\boldsymbol{g}_{\pm}(s,z) = \boldsymbol{E} z^{\xi^{\pm}(\theta_s)}$ виконуються співвідношення*

$$(s\,\mathbf{I} - \mathbf{K}(z))\boldsymbol{g}_+(s,z) = s\,\mathbf{I} - \mathbf{Q},\ \ |z| < 1, \tag{20}$$

$$(s\,\mathbf{I} - \mathbf{K}(z))\boldsymbol{g}_-(s,z) = s\,\mathbf{I} - \mathbf{Q},\ \ |z| > 1. \tag{21}$$

Доведення. Використаємо результат, отриманий в [7] на основі стохастичного співвідношення для $\tau^+(x)$:

$$[\tau^+(x)]_{kr} \doteq \begin{cases} \zeta_k' + [\tau^+(x-\xi_k)]_{kr}, & \zeta_k' < \zeta_k, \quad \xi_k < x; \\ \zeta_k', & \zeta_k' < \zeta_k, \quad \xi_k \ge x; \\ \zeta_k + [\tau^+(x-\chi_{kj})]_{jr}, & \zeta_k' > \zeta_k, \quad \chi_{kj} < x; \\ \zeta_k, & \zeta_k' > \zeta_k, \quad \chi_{kr} \ge x. \end{cases}$$

З цього співвідношення випливає матричне рівняння для $\mathbf{T}^+(s,x)$,

$$(s\,\mathbf{I} + \mathbf{\Lambda} + \mathbf{N})\mathbf{T}^+(s,x) = \sum_{l=-\infty}^{x-1} (\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}(l) + \mathbf{N}\mathbf{F}(l))\mathbf{T}^+(s,x-l) + \sum_{l=x}^{+\infty} (\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}(l) + \mathbf{N}\mathbf{F}(l)),\ x > 0.$$

Спростимо попереднє рівняння, використовуючи граничну умову

$$\mathbf{T}^{+}(s,x)=\mathbf{I},\ x\leq 0. \tag{22}$$

$$(s\,\mathbf{I}+\mathbf{\Lambda}+\mathbf{N})\mathbf{T}^{+}(s,x)=\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\mathbf{K}_0(l)\mathbf{T}^{+}(s,x-l),\ x\in\mathbf{Z} \tag{23}$$

Після домноження рівняння (23) на $\mathbf{P}_s$ з врахуванням співвідношення (18) одержимо рівняння

$$(s\,\mathbf{I}+\mathbf{\Lambda}+\mathbf{N})\overline{\mathbf{P}}_{+}(s,x)=\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\mathbf{K}_0(l)\overline{\mathbf{P}}_{+}(s,x-l),\ x\in\mathbf{Z} \tag{24}$$

з граничною умовою

$$\overline{\mathbf{P}}_{+}(s,x)=\mathbf{P}_s,\ \ x<0. \tag{25}$$

Генератриса $\mathbf{T}^{+}(s,x)$ і $\overline{\mathbf{P}}_{+}(s,x)$ з відповідними граничними умовами задовольняють рівняння

$$(s\,\mathbf{I}-\mathbf{L}_0)\overline{\mathbf{P}}_{+}(s,x)=0,\ \ x>0,\ \ \overline{\mathbf{P}}_{+}(s,x)=\mathbf{P}_s,\ x<0.$$

а $\mathbf{P}_{+}(s,x)$ з граничною умовою $\mathbf{P}_{+}(s,x)=0$ $(x\leq 0)$ задовольняє наступне рівняння:

$$(s\,\mathbf{I}-\mathbf{L}_0)(\mathbf{I}-\mathbf{P}_{+}(s,x))=s\,\mathbf{I}-s\mathbf{P}_{+}(s,x)-\mathbf{L}_0\mathbf{I}+\mathbf{L}_0\mathbf{P}_{+}(s,x)=$$

$$=s\,\mathbf{I}-\mathbf{Q}-(s\,\mathbf{I}-\mathbf{L}_0)\mathbf{P}_{+}(s,x)=0,$$

$$(s\,\mathbf{I}-\mathbf{L}_0)\mathbf{P}_{+}(s,x)=(s\,\mathbf{I}-\mathbf{Q})\mathbf{I},\ \ x>0. \tag{26}$$

Застосуємо до (26) твірне перетворення різницевого типу $x\geq 0$ й отримаємо (20).

Аналогічно доводиться співвідношення (21).

З результатів леми 3 і теореми 1, випливає наступне твердження.

Теорема 2. *При $s>0$ виконуються співвідношення*

$$\boldsymbol{g}_{+}(s,z)=\mathbf{E}\,z^{\xi^{+}(\theta_s)}=\begin{cases}\mathbf{K}_{+}^{-1}(s,z)\mathbf{K}_{+}(s,1)\mathbf{P}_s,\\ s\,\mathbf{K}_{+}^{-1}(s,z)\mathbf{K}_{-}^{-1}(s,1);\end{cases} \tag{27}$$

$$\boldsymbol{g}_{-}(s,z)=\mathbf{E}\,z^{\xi^{-}(\theta_s)}=\begin{cases}(\mathbf{K}^{-}(s,z))^{-1}\mathbf{K}^{-}(s,1)\mathbf{P}_s,\\ s\,(\mathbf{K}^{-}(s,z))^{-1}\mathbf{K}^{+}(s,1);\end{cases} \tag{28}$$

$$\boldsymbol{g}^{-}(s,z)=\mathbf{E}\,z^{\bar{\xi}(\theta_s)}=\begin{cases}s\,\mathbf{K}_{+}^{-1}(s,1)\mathbf{K}_{-}^{-1}(s,z),\\ \mathbf{P}_s\mathbf{K}_{-}(s,1)\mathbf{K}_{-}^{-1}(s,z);\end{cases} \tag{29}$$

$$\boldsymbol{g}^{+}(s,z)=\mathbf{E}\,z^{\breve{\xi}(\theta_s)}=\begin{cases}s\,(\mathbf{K}^{-}(s,1))^{-1}(\mathbf{K}^{+}(s,z))^{-1},\\ \mathbf{P}_s\mathbf{K}^{+}(s,1)(\mathbf{K}^{+}(s,z))^{-1}.\end{cases} \tag{30}$$

Доведення. Враховуючи перше співвідношення із (17), запишемо рівняння (20) наступним чином

$$\mathbf{K}_-(s,z)\mathbf{K}_+(s,z)\boldsymbol{g}_+(s,z) = s\,\mathbf{I} - \mathbf{Q}.$$

Звідси випливає

$$\mathbf{K}_+(s,z)\boldsymbol{g}_+(s,z) = (\mathbf{K}_-(s,z))^{-1}(s\,\mathbf{I} - \mathbf{Q}).$$

Після операції проектування $[\ ]_+^0$ одержимо рівняння

$$\mathbf{K}_+(s,z)\boldsymbol{g}_+(s,z) = \mathbf{C}_0(s),\ \ \mathbf{C}_0(s) = [(\mathbf{K}_-(s,z))^{-1}(s\,\mathbf{I} - \mathbf{Q})]_+^0,$$

з якого отримаємо

$$\boldsymbol{g}_+(s,z) = \mathbf{K}_+^{-1}(s,z)\mathbf{C}_0(s).$$

При $z=1$ маємо

$$\mathbf{P}_s = \mathbf{K}_+^{-}(s,1)\mathbf{C}_0(s).$$

Після підстановки $\mathbf{C}_0(s) = \mathbf{K}_+(s,1)\mathbf{P}_s$ одержимо перше співвідношення (27). Враховуючи умову

$$\mathbf{K}_-(s,1)\mathbf{K}_+(s,1) = s\mathbf{P}_s^{-1}, \tag{31}$$

із першого співвідношення (27) отримуємо друге співвідношення (27).

Аналогічно, враховуючи друге співвідношення (17), рівняння (21) зводиться до вигляду

$$\mathbf{K}^+(s,z)\mathbf{K}^-(s,z)\boldsymbol{g}_-(s,z) = s\,\mathbf{I} - \mathbf{Q},$$

$$\mathbf{K}^-(s,z)\boldsymbol{g}_-(s,z) = (\mathbf{K}^+(s,z))^{-1}(s\,\mathbf{I} - \mathbf{Q}).$$

Після операції проектування $[\ ]_-^0$ одержуємо

$$\mathbf{K}^-(s,z)\boldsymbol{g}_-(s,z) = \mathbf{C}^0(s), \mathbf{C}^0(s) = [(\mathbf{K}^+(s,z))^{-1}(s\,\mathbf{I} - \mathbf{Q})].$$

При $z=1$, $\mathbf{C}^0(s) = \mathbf{K}^-(s,1)\mathbf{P}_s$. Отже, доведено перше співвідношення (28).

Друге співвідношення (28) отримуємо, враховуючи умову

$$\mathbf{K}^+(s,1)\mathbf{K}^-(s,1) = s\mathbf{P}_s^{-1}. \tag{32}$$

Співвідношення (29) випливають із співвідношень для спільної генератриси $\{\xi(\theta_s), \xi^+(\theta_s)\}$.

Використовуючи результати леми 2, наведені в [7], при $v = z^{-1}$ одержимо перше співвідношення (29)

$$\mathbf{E}[z^{\xi(\theta_s)}v^{\xi^+(\theta_s)}]_{v=z^{-1}} = \boldsymbol{g}^-(s,z) = s\mathbf{K}_+^{-1}(s,1)\mathbf{K}_-^{-1}(s,z).$$

Враховуючи умову (31), отримуємо друге співвідношення (29).

Аналогічно доводяться співвідношення (30) за допомогою спільної генератриси $\{\xi(\theta_s), \xi^-(\theta_s)\}$ та умови (32).Теорема доведена.

У роботі [7] (див. теорему 1) одержано правосторонній факторизаційний розклад для $\boldsymbol{g}(s,z)$. На основі одержаних в теоремі 2 співвідношень, встановлюється двосторонній факторизаційний розклад $\boldsymbol{g}(s,z)$.

Теорема 3. (Про правий і лівий матричні аналоги о. ф. т.) *Для цілозначного процесу на ланцюгах Маркова $Z(t)$ має місце права і ліва о. ф. т.*

$$\boldsymbol{g}(s,z) = \boldsymbol{E} z^{\xi(\theta_s)} = \begin{cases} \boldsymbol{g}_+(s,z)\boldsymbol{P}_s^{-1}\boldsymbol{g}^-(s,z), \ |z|=1, \\ \boldsymbol{g}_-(s,z)\boldsymbol{P}_s^{-1}\boldsymbol{g}^+(s,z), \ |z|=1. \end{cases} \tag{33}$$

Доведення. Після підстановки першого співвідношення (27) і (29) в перший рядок (33), переконуємося в тому, що

$$\boldsymbol{g}_+(s,z)\mathbf{P}_s^{-1}\boldsymbol{g}^-(s,z) = \mathbf{K}_+^{-1}(s,z)\mathbf{K}_+(s,z)\mathbf{P}_s \cdot \mathbf{P}_s^{-1}\, s\,\mathbf{K}_+^{-1}(s,1)\mathbf{K}_-^{-1}(s,z) =$$

$$= s\,\mathbf{K}_+^{-1}(s,z)\mathbf{K}_+(s,1)\mathbf{K}_+^{-1}(s,1)\mathbf{K}_-^{-1}(s,z) = s\,\mathbf{K}_+^{-1}(s,1z)\mathbf{K}_-^{-1}(s,z) =$$

$$= s\,(\mathbf{K}_-(s,z)\mathbf{K}_+(s,z))^{-1} = s\,(\mathbf{K}(s,z))^{-1} = s\,(s\,\mathrm{II} - \mathbf{K}(z))^{-1} = \boldsymbol{g}(s,z).$$

Аналогічно, після підстановки перших співвідношень із (28) та (30) у друге співвідношення (33), переконуємося в справедливості правої факторизаційної тотожності

$$\boldsymbol{g}_-(s,z)\mathbf{P}_s^{-1}\boldsymbol{g}^+(s,z) = (\mathbf{K}^-(s,z))^{-1}\mathbf{K}^-(s,1)\mathbf{P}_s \cdot \mathbf{P}_s^{-1}\, s\,(\mathbf{K}^{-1}(s,1))^{-1}(\mathbf{K}^+(s,z))^{-1} =$$

$$= s\,(\mathbf{K}^-(s,z))^{-1}(\mathbf{K}^+(s,z))^{-1} = s\,(\mathbf{K}^+(s,z)\mathbf{K}^-(s,z))^{-1} = s\,(s\,\mathbf{I} - \mathbf{K}(z))^{-1} = \boldsymbol{g}(s,z).$$

Справедливість правої о. ф. т. можна довести також підстановкою других співвідношень із (27), (29) у перше співвідношення (33), а справедливість лівої о. ф. т. перевіряється аналогічно.

Зауважимо, що розподіл "верхніх" функціоналів, пов'язаних з перетином додатнього рівня, виражається через 1–ий множник $\boldsymbol{g}_+(s,z)$ правосторонньої факторизації, а розподіл "нижніх" функціоналів, пов'язаних з перетином від'ємного рівня, – через множник $\boldsymbol{g}_-(s,z)$ в лівосторонній факторизації.

1. *Ежов И. И., Скороход А. В.* Марковские процессы, однородные по второй компоненте. I // Теория вероятн. и её примен. – 1969. – **14**, № 1,№ 4.
2. *Гусак Д. В.* Граничні задачі для процесів з незалежними приростами на скінченних ЛМ та для напівмарковських процесів. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. – 320 с.
3. *Гусак Д. В.* Метод факторизации в граничных задачах для одного класса процессов на цепи Маркова. I. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1978. – 60 с. – Препринт 78. II.
4. *Гусак Д. В.* Граничні задачі для процесів з незалежними приростами в теорії ризику. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2007. – 460 с.
5. *Боровков А. А., Рогозин Б. А.* Граничные задачи для некоторых двумерных случайных блужданий // Теория вероятн. и её примен. – 1984. – **9**, № 3. – С. 401–430.
6. *Карнаух Є.В.* Граничні задачі для одного класу процесів на ланцюгу Маркова: Автореф. дис. кан-та фіз.-мат. наук. – Київ, 2007, 18с.
7. *Гусак Д. В., Турениязова А. И.* Распределение некоторых граничных функционалов для решетчатых пуассоновских процессов на цепи Маркова // Асимптотические методы в исследовании стохастических моделей:Сб.науч.тр.– Киев: Ин-т математики АН УССР, 1967. – С. 21–27.

Одержано 01.10.2011