УДК 519.21

Е. Й. Вереш, (Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці II)
К. Й. Кучінка, (Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці II)
Г. І. Сливка-Тилищак (Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ОБҐРУНТУВАННЯ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ФУР'Є ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ВИПАДКОВИМИ ПОЧАТКОВИМИ УМОВАМИ З ПРОСТОРУ $Sub_{\varphi}(\Omega)$

The condition of application of the Fourier method to parabolic equations of mathematical physics with strictly $Sub_{\varphi}(\Omega)$ random initial conditions.

Робота містить умови застосування методу Фур'є до рівняння параболічного типу коли початкові умови є $Sub_{\varphi}(\Omega)$ випадкові процеси.

1. Вступ. В роботі розглядається однорідне параболічне рівняння з випадковими початковими умовами. Знайдено умови при яких до однорідного параболічного рівняння можна застосовувати метод Фур'є у випадку коли початкова умова належить до простору $Sub_{\varphi}(\Omega)$. Крім того досліджено розподіл супремуму розв'язку такого рівняння.

Подібна задача для рівняння гіперболічного типу математичної фізики у багатовимірному випадку коли початкові умови є процеси з простору $Sub_{\varphi}(\Omega)$ розглядались в [1]. В роботах [2], [3], [4] було обґрунтовано застосування методу Фур'є до задач гіперболічного типу, а саме до задачі про коливання однорідної струни, круглої мембрани та прямокутного паралелепіпеда. В роботі [5,6] досліджувались рівняння параболічного типу з випадковими початковими умовами з простору Орліча. В монографії [7,8] можна знайти посилання на інші роботи, які проводились в цьому напрямку.

2. Випадкові процеси з простору $Sub_{\varphi}(\Omega)$.

Означення 1 ([9]). *Парна неперервна опукла функція $u(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$ така, що $u(0) = 0$, $u(x) > 0$ при $x \neq 0$ і $\lim\limits_{x\to 0} \frac{u(x)}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{u(x)}{x} = \infty$ називається N -функцією.*

Означення 2 ([10]). *Нехай $\varphi(x)$ – N-функція, така що існує $x_0 > 0$ і $c > 0$, що $\varphi(x) = cx^2$ при $|x| < x_0$. Простором $Sub_{\varphi}(\Omega)$ породженим N-функцією $\varphi(x)$ називається простір випадкових $\xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$, $(E\xi = 0)$, таких, що існує константа a_{ξ}, що для всіх $\lambda \in \mathbb{R}^1$ виконується нерівність*

$$E\exp\{\lambda\xi\} \leqslant \exp\{\varphi(\lambda a_{\xi})\}.$$

Простір $Sub_{\varphi}(\Omega)$ є Банаховим простором відносно норми [7]

$$\tau_{\varphi}(\xi) = \sup_{\lambda\neq 0} \frac{\varphi^{(-1)}(\ln E\exp\{\lambda\xi\})}{|\lambda|}.$$

Означення 3 ([10]). *Випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$ належить простору $Sub_{\varphi}(\Omega)$ $(X \in Sub_{\varphi}(\Omega))$, якщо для $t \in T$ випадкова величина $X(t) \in Sub_{\varphi}(\Omega)$.*

Лема 1 ([11]). *Якщо* $\xi \in \; Sub_{\varphi}(\Omega)$, *то існує така константа* $C > 0$ *що* $(E(\xi)^2)^{1/2} \leq \leq C\tau_{\varphi}(\xi)$

Означення 4 ([10]). *Випадкова величина* $\xi \in \; Sub_{\varphi}(\Omega)$ *називається строго* $Sub_{\varphi}(\Omega)$, $(SSub_{\varphi}(\Omega))$, *якщо* $\tau_{\varphi}(\xi) = \left(E\xi^2\right)^{1/2}$.

Означення 5 ([10]). *Сім'я випадкових величин* ξ *з простору* $Sub_{\varphi}(\Omega)$ *називається* $SSub_{\varphi}(\Omega)$ *якщо для довільної не більш ніж зліченної множини* I, $\xi_i \in \Delta_i$, $i \in I$ *і для всіх* $\lambda_i \in \mathbb{R}^1$ *виконується нерівність*

$$\tau_{\varphi}\left(\sum_{i\in I}\lambda_i\xi_i\right) \leq \left(E\left(\sum_{i\in I}\lambda_i\xi_i\right)^2\right)^{1/2}.$$

Означення 6 ([10]). *Випадкові процеси* $X_i = X_i(t), t \in T, i \in I$ *називаються сумісно строго* $Sub_{\varphi}(\Omega)$ *якщо сім'я випадкових величин* $X_i = X_i(t), t \in T, i \in I$ *є строго* $Sub_{\varphi}(\Omega)$.

Теорема 1 ([12]). *Нехай* Δ *— сім'я строго* $Sub_{\varphi}(\Omega)$ *випадкових величин. Тоді лінійне замикання* $\bar{\Delta}$ *в середньому квадратичному сім'ї* Δ *в просторі* $L_2(\Omega)$ *є строго* $Sub_{\varphi}(\Omega)$ *сім'єю.*

Теорема 2 ([12]). *Нехай* $X_i = \{X_i(t)\,,\ t \in T,\ i \in I\}$ *— сім'я сумісно строго* $Sub_{\varphi}(\Omega)$ *випадкових процесів. Нехай* (T, O, μ) *— вимірний простір. Нехай* $\left\{\varphi_{k_i}(t,)\ \ i \in I,\ k = \overline{1,\ \infty}\right\}$ *— сім'я вимірних функцій в* (T, O, μ). *Нехай існує інтеграл в середньому квадратичному*

$$\xi_{k_i} = \int\limits_T \varphi_{k_i}(t)\, X_i(t)\, d\mu(t).$$

Тоді сім'я випадкових величин $\Delta_{\xi} = \left\{\xi_{k_i},\ i \in I,\ k = \overline{1,\infty}\right\}$ *є строго* $Sub_{\varphi}(\Omega)$ *сім'єю.*

Теорема 3 ([7]). *Нехай* T *— параметрична множина,* $X = \{X(t)\,,\ t \in T\}$ *—випадковий процес,* $X \in Sub_{\varphi}(\Omega)$. *Нехай* $\rho(t, s) = \tau_{\varphi}(X(t) - X(s))$. *Псевдометричний простір* $(T,\ \rho)$ *— компакт. Процес* $X(t)$ *— сепарабельний на* $(T,\ \rho)$. *Нехай* $N(\varepsilon)$ *— метрична масивність простору* $(T,\ \rho)$, $H(\varepsilon) = \ln N(\varepsilon)$. *Якщо виконується умова*

$$\varepsilon_0 = \sup_{t\in T}\tau_{\varphi}(X(t)) < \infty, \qquad \int\limits_0^{\varepsilon_0}\Psi(H(\varepsilon))\,d\varepsilon < \infty,$$

де $\Psi(u) = \frac{u}{\varphi^{(-1)}(u)}$, $\varphi^{(-1)}(u)$ *— обернена функція до* $\varphi(u)$ *при* $u > 0$, *тоді для будь-якого* $u > \frac{2\mathrm{I}_{\varphi}(\theta\varepsilon_0)}{\theta(1-\theta)}$ *має місце нерівність*

$$P\left\{\sup_{t\in T}|X(t)| \geqslant \varepsilon\right\} \leqslant 2A(u,\ \theta),$$

де

$$A(u,\ \theta) = \exp\left\{-\varphi^*\left(\frac{1}{\varepsilon_0}\left[u(1-\theta) - \frac{2}{\theta}\mathrm{I}_{\varphi}(\theta\varepsilon)\right]\right)\right\}, \quad \mathrm{I}_{\varphi}(y) = \int\limits_0^y \Psi(H(\varepsilon))\,d\varepsilon.$$

Наслідок 1 ([1]). *Нехай* $\mathbb{R}^k$ *— k-вимірний простір,* $d(t,s) = \max\limits_{1 \le i \le k} |t_i - s_i|, T = \{0 \le t_i \le T_i,\ n = 1, 2, \ldots, k\},\ T_i > 0$. *Сепарабелбний випадковий процес* $X = \{X(t),\ \ t \in T\}\ \in Sub_\varphi(\Omega)$. *Нехай* $\sup\limits_{d(t,s) \leqslant h} \tau_\varphi (X(t) - X(s)) \leqslant \sigma(h)$, *де* $\sigma(h)$ *— неперервна монотонно зростаюча функція, така що* $\sigma(h) \to 0$ *при* $h \to \infty$. *Нехай виконується умова*

$$\int\limits_{0+} \Psi\left(\ln \frac{1}{\sigma^{(-1)}(\varepsilon)}\right) d\varepsilon < \infty,$$

де $\Psi(u) = \frac{u}{\varphi^{(-1)}(u)}$. *Тоді для будь-якого* $0 < \theta < 1, u > \frac{2\mathrm{I}_\varphi(\theta\varepsilon_0)}{\theta(1-\theta)}$ *має місце нерівність*

$$P\left\{\sup_{t \in T} |X(t)| > u\right\} \leqslant 2\tilde{A}(u,\ \theta),$$

де

$$\tilde{A}(u,\ \theta) = \exp\left\{-\varphi^*\left(\frac{1}{\tilde{\varepsilon}_0}\left[u(1-\theta) - \frac{2}{\theta}\tilde{\mathrm{I}}_\varphi(\theta\tilde{\varepsilon})\right]\right)\right\},$$

де $\tilde{\varepsilon}_0 = \sup\limits_{t \in T}\left(E|X(t)|^2\right)^{1/2}$, $\tilde{\mathrm{I}_{\varphi_\varphi}}(\delta) = \int\limits_0^\delta \Psi\left(\sum\limits_{i=1}^k \ln\left(\frac{T_i}{2\sigma^{(-1)}(\varepsilon)} + 1\right)\right) d\varepsilon.$

Наслідок 2. *Нехай* $X = \{X(x,\ t),\ 0 \le t \le T,\ 0 \le x \le \pi\}$ *— сепарабельний* $Sub_\varphi(\Omega)$ *випадковий процес. Наслідок 1 залишається справедливим, якщо* $\widetilde{I}_\varphi(\delta)$ *замінити інтегралом*

$$\int\limits_0^\delta \Psi\left(2\ln\left(\frac{\max(T, \pi)}{2\sigma^{(-1)}(\varepsilon)} + 1\right)\right) d\varepsilon.$$

Доведення. У даному випадку

$$\widetilde{I}(\delta) = \int\limits_0^\delta \Psi\left(\ln\left(\frac{\pi}{2\sigma^{(-1)}\varepsilon} + 1\right) + \ln\left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)}\varepsilon} + 1\right)\right) d\varepsilon =$$

$$= \int\limits_0^\delta \Psi\left(\ln\left(\frac{\pi}{2\sigma^{(-1)}\varepsilon} + 1\right)\left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)}\varepsilon} + 1\right)\right) d\varepsilon \le$$

$$\le \int\limits_0^\delta \Psi\left(\ln\left(\frac{\max(T,\ \pi)}{2\sigma^{(-1)}\varepsilon} + 1\right)\left(\frac{\max(T,\ \pi)}{2\sigma^{(-1)}\varepsilon} + 1\right)\right) d\varepsilon = \int\limits_0^\delta \Psi\left(2\ln\left(\frac{\max(T,\ \pi)}{2\sigma^{(-1)}\varepsilon} + 1\right)\right) d\varepsilon.$$

3. Постановка задачі. Основний результат.

Розглянемо крайову задачу для параболічного рівняння з двома незалежними змінними [13]: $x \in [0,\ \pi]$, $\ t > 0$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial V(t,\ x)}{\partial x}\right) - q(x)V(t,\ x) - \rho(x)\frac{\partial V(t,\ x)}{\partial t} = 0, \tag{1}$$

$$V(t,\ 0) = 0, \quad V(t,\ \pi) = 0, \tag{2}$$

$$V(0,\ x) = \xi(x), \tag{3}$$

де $\xi(x)$ — вибірково неперервний з імовірністю одиниця випадковий процес з простору $Sub_\varphi(\Omega)$.

Функції $p = (p(x), x \in [0,\ \pi])$, $q = (q(x), x \in [0,\ \pi])$, $\rho = (\rho(x), x \in [0,\ \pi])$ задовольняють умови:

1) $p(x) > 0,\ q(x) \geq 0,\ \rho(x) > 0,\ x \in [0,\ \pi]$;

2) $p(x),\ \rho(x)$ двічі неперервно диференційовні функції при $x \in [0,\ \pi]$;

3) $q(x)$ неперервно диференційовна функція при $x \in [0,\ \pi]$.

Нехай

$$V(t,\ x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e^{-\lambda_k t} X_k(x), \tag{4}$$

де $X_k(x)$ — власні функції, а λ_k — власні значення задачі Штурма-Ліувілля

$$L(x) = \frac{\partial}{\partial x}(p(x)\frac{dX(x)}{dx}) - q(x)X(x) + \lambda\rho(x)X(x) = 0;$$

$$X(0) = 0,\ X(\pi) = 0;$$

$$\xi_k = \int_0^\pi \rho(x) X_k(x) \xi(x) dx. \tag{5}$$

Розглянемо ряди

$$S_{ms}(t,\ x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e^{-\lambda_k t} \lambda_k^m X_k^s(x),$$

де $m = 0,\ 1$ причому при $m = 0$ $s = 0,\ 1,\ 2$, а при $m = 1$ $s = 0$.

Лема 2 ([6]). *Нехай $\xi(x),\ 0 \leq x \leq \pi$ сумісно строго $Sub_\varphi(\Omega)$ випадковий процес, такий що ряди $S_{ms}(t,\ x)$ збігаються в середньому квадратичному при кожному $x \in [0.\ \pi], t > 0$. Тоді випадкові ряди $S_{ms}(t,\ x)$ є також строго $Sub_\varphi(\Omega)$ випадкові процеси.*

Доведення. З теореми 2 випливає, що сім'я випадкових величин $\xi_k,\ k \geq 1$ є строго $Sub_\varphi(\Omega)$. Тоді, згідно теореми 1, випадкові ряди $S_{ms}(t,\ x)$ є також строго $Sub_\varphi(\Omega)$ випадкові процеси.

Лема 3 ([6]). *Нехай ε — довільне число, таке що $0 < \xi < +\infty$. Ряди $S_{ms}(t,\ x)$ збігаються рівномірно з ймовірністю одиниця в області*

$$D_\varepsilon = [0,\ \pi] \times [\varepsilon,\ +\infty).$$

Лема 4 ([6]). *Нехай для функції $X_\lambda(u),\ \lambda > 0,\ u \in T$, де $T = (0, T)$, виконуються умови:*

1) $\sup\limits_{u \in T} |X_\lambda(u)| \leq B$;

2) $|X\lambda(u) - X_\lambda(v)| \leq C\lambda|u - v|\ u, v\ \in T$.

Нехай $\chi(\lambda), \lambda > 0$ — неперервна зростаюча функція, $\chi(\lambda) > 0$ при всіх $\lambda > 0$, така що функція $\frac{\lambda}{\chi(\lambda)}$ є зростаючою при $\lambda > v_0$, де стала $v_0 \geq 0$, тоді для всіх $\lambda \geq 0$ та $v > 0$ виконується наступна нерівність

$$|X_\lambda(u) - X_\lambda(v)| \leq max(C; 2B) \frac{\chi(\lambda + v_0)}{\chi\left(\frac{1}{|u-v|+v_0}\right)}.$$

Лема 5 ([6]). *Нехай для власної функції $X_k(x),\ x \in [0,\ \pi]$ виконується умова*

$$|X_k(x) - X_k(x_1)| \leq L\lambda_k |x - x_1|.$$

нехай також збігається ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} |E\xi_k \xi_l| \chi(\lambda_k + v_0) \chi(\lambda_l + v_0) = W,$$

де функція $\chi(\lambda)$ визначена в лемі 4. Тоді при $0 < t \leq t_1,\ t_1 > 0$ та $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq x_1 \leq \pi$ має місце нерівність

$$\sup_{\max(|t-t_1|, |x-x_1|) \leq h} \left(E\left(z(t,\ x) - z(t_1\ x_1)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{2\max(2C_X,\ L)}{\chi(\frac{1}{h} + v_0)} \sqrt{W},$$

де C_X — така константа, що $|X_k(x)| < C_X$ а $z(t,\ x) = V(t,\ x) - \xi(x)$.

Зауваження 1. *Нехай $\xi(x), x \in [0, \pi]$ випадковий процес з простору $Sub_\varphi(\Omega)$. $\xi(x)$ — сепарабельний, неперервний в середньому квадратичному, $E\xi(x) = 0$. Нехай існує така функція $\chi = \{\chi(\lambda), \lambda > 0\}$ така, що $\chi(\lambda)$ неперервна, монотонно зростає при $\lambda > 0$, а функція $\frac{\lambda}{\chi(\lambda)}$, $\lambda > 0$ монотонно зростає при $\lambda \geq v_0$, де $v_0 \geq 0$ — деяка константа, і збігається ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} |E\xi_k \xi_l| \chi(\lambda_k + v_0) \chi(\lambda_l + v_0),$$

тоді наслідок 2 залишається справедливим, якщо функцію $\sigma(h)$ має вигляд $\sigma(h) = \frac{C}{\chi\left(\frac{1}{h} + v_0\right)}$.

Теорема 4. *Нехай випадковий процес $\xi(x),\ x \in [0,\ \pi]$ є строго $Sub_\varphi(\Omega)$ випадковим процесом. $\xi(x)$ — сепарабельний, неперервний в середньому квадратичному, $E\xi(x) = 0$. Нехай існує функція $\chi = \{\chi(\lambda), \lambda > 0\}$ така, що $\chi(\lambda)$ неперервна, монотонно зростаюча, а функція $\frac{\lambda}{\chi(\lambda)}$, $\lambda > 0$ монотонно зростає при $\lambda \geq v_0$, де $v_0 \geq 0$ — деяка константа і для будь-якого $\varepsilon > 0$ та $c > 0$ виконується умова*

$$\int_0^\varepsilon \psi\left(\ln\left(\chi^{-1}\left(\frac{C}{v}\right) - v_0\right)\right) dv < \infty,$$

де $\psi(u) = \frac{u}{\varphi^{-1}(u)}$. Якщо

$$\sup_{|x-y| \leq h} \left(E\left(\xi(x) - \xi(y)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\left(\chi\left(\frac{1}{h} + v_0\right)\right)^{-1}$$

і збігаєтьcя ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}|E\xi_k\xi_l|\chi(\lambda_k+v_0)\chi(\lambda_l+v_0),$$

тоді для будь-якого $\sigma>0$ рівномірно за $x,\ x\in[0,\ \pi]$ і $t\geq\sigma$ з ймовірністю одиниця збігаютьcя ряди

$$S_{ms}(t,\ x)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k e^{-\lambda_k t}\lambda_k^m X_k^s(x),$$

де $m=0,\ 1,$ причому при $m=0$ $s=1,\ 1,\ 2,$ а при $m=1$ $s=0,$ (тобто ряд (4) та ряди отримані з (4) почленним диференціюванням два рази за x та один раз за t). В області $x\in[0,\ \pi]$, $t\geq\sigma$ функція $V(t,\ x)$ з імовірністю одиниця задовольняє рівняння (1) та умову (2). Крім того рівномірно з ймовірністю одиниця в області $x\in[0,\ \pi]$ $V(t,\ x)\to\xi(x)$ при $t\to 0$.

Доведення. Рівномірна збіжність з ймовірністю одиниця рядів $S_{ms}(t,\ x)$ випливає з леми 3.

Оскільки ряди $S_{ms}(t,\ x)$ збігаються рівномірно з ймовірністю одиниця, то те, що $V(t,\ x)$ з імовірністю одиниця задовольняє рівняння (1) та умову (2) доводиться як і в детермінованому випадку.

Доведемо, що з умов теореми даної теореми випливає, що $V(t,\ x)\to\xi(x)$ за $x\in[0,\ \pi]$ рівномірно з імовірністю одиниця при $t\to 0$.

Розглянемо випадковий процес $z(t,\ x)=V(t,\ x)-\xi(x)$. Оскільки $z(t,\ x)$ є строго φ-субгауссовим випадковим процесом, то з леми 5 випливає, що в області $0\leq t\leq T$, $0\leq t_1\leq T$,

$$\sup_{\max(|t-t_1|,|x-x_1|)\leq h}\tau_\varphi\left(z(t,\ x)-z(t_1\ x_1)\right)\leq$$

$$\leq C_\Delta\sup_{\max(|t-t_1|,|x-x_1|)\leq h}\left(E\left(z(t,\ x)-z(t_1\ x_1)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq\frac{R}{\chi\left(\frac{1}{h}+v_0\right)},$$

де $R=2C_\Delta\max(2C_x,L)\sqrt{W}$.

Із зауваженні 1 випливає, що інтеграл

$$\int_0^\varepsilon\psi\left(\ln\frac{1}{\sigma^{-1}(v)}\right)dv,$$

можна записати у вигляді

$$\int_0^\varepsilon\psi\left(\ln\left(\chi^{-1}\left(\frac{C}{v}\right)-v_0\right)\right)dv,$$

тому має місце теорема 3 та наслідок 2, тобто для довільного $0<\theta<1$, $y>\frac{2I(\theta\widehat{\varepsilon}_0)}{\theta(1-\theta)}$ має місце нерівність

$$P\left\{\sup_{0\leq x\leq\pi,0\leq t\leq T}|z(t,\ x)|>y\right\}\leq 2\widehat{A}(y,\ \theta),$$

де

$$\widehat{A}(y,\ \theta) = \exp\left\{-\varphi^{\star}\left(\frac{1}{\widehat{\varepsilon_0}}\left[y(1-\theta) - \frac{2}{\theta}\widehat{I}(\theta\widehat{\varepsilon_0}\right]\right)\right\},$$

$$\widehat{I}(\delta) = \int\limits_0^{\delta} \Psi\left(2\ln\left(\frac{\max(T,\pi)}{2\sigma^{(-1)}(\varepsilon)} + 1\right)\right) d\varepsilon.$$

Легко бачити, що

$$\lim_{t\to 0}\widehat{\varepsilon_0} = \lim_{t\to 0}\left(E\left(z(t,\ x)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Оскільки, функція $\varphi^{\star}$ неспадна, то

$$\lim_{t\to 0}\widehat{A}(y,\ \theta) = \lim_{t\to 0}\exp\left\{-\varphi^{\star}\left(\frac{1}{\widetilde{\varepsilon_0}}\left[y(1-\theta) - \frac{2}{\theta}\widehat{I}(\theta\widehat{\varepsilon_0}\right]\right)\right\} = 0.$$

Отже $\frac{1}{\widehat{\varepsilon_0}} \to \infty$ при $t \to 0$. Тобто

$$\lim_{t\to 0} P\left\{\sup_{0\le x\le\pi, 0\le t\le T}|V(t,\ x) - \xi(x)| > \varepsilon\right\} = \lim_{t\to 0} P\left\{\sup_{0\le x\le\pi, 0\le t\le T}|z(t,\ x)| > \varepsilon\right\} = 0,$$

а це означає, що $V(t,\ x) \to \xi(x)$ рівномірно за $x \in [0,\ \pi]$ з ймовірністю одиниця при $t \to 0$.

Зауваження 2. *Твердження леми 5 залишається справедливим, якщо замість* $V(t,\ x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k e^{-\lambda_k t}X_k(x)$ *розглядати ряди* $V_N(t,\ x) = \sum\limits_{k=N}^{\infty}\xi_k e^{-\lambda_k t}X_k(x)$.

4. Оцінка розподілу супремуму розв'язку. Спираючись на наслідок 2 методом викладеним при доведенні теореми 4 обґрунтовується справедливість такої теореми.

Теорема 5. *Нехай виконуються умови теореми 4. Тоді для будь-якого* $0 < \theta < 1$, $y > \frac{2I(\theta\widetilde{\varepsilon_0})}{\theta(1-\theta)}$ *має місце нерівність*

$$P\left\{\sup_{0\le x\le\pi, 0\le t\le T}|V_N(t,\ x)| > y\right\} \le 2\widetilde{A}(y,\ \theta),$$

де

$$\widetilde{A}(y,\ \theta) = \exp\left\{-\varphi^{\star}\left(\frac{1}{\widetilde{\varepsilon}_{0N}}\left[y(1-\theta) - \frac{2}{\theta}I(\theta\widetilde{\varepsilon}_{0N}\right]\right)\right\},$$

$$\widetilde{\varepsilon}_{0N} = \sup_{0\le x\le\pi, 0\le t\le T}\left(E|V_N(t,\ x)|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$I(\delta) = \int\limits_0^{\delta}\psi\left[2\ln\left(\max(T,\ \pi)\left(\chi^{-1}\left(\frac{R_N}{h}\right) - v_0\right) + 1\right)\right] dh,$$

$$R_N = 2C_{\Delta}\sqrt{W_N}\max(2C_X, L),$$

$$\psi(u) = \frac{u}{\varphi^{-1}}(u),$$

$$W_N = \sum_{k=N}^{\infty} \sum_{l=N}^{\infty} |E\xi_k \xi_l| \chi(\lambda_k + v_0) \chi(\lambda_l + v_0),$$

де C_X *така, що*$|X_k(x)| < C_X$, C_Δ — *визначальна стала.*

Доведення. Спираючись на наслідок 2 методом викладеним при доведенні теореми 4 обґрунтовується дана теорема.

1. *Козаченко Ю. В., Сливка Г. І.* Обґрунтування методу Фур'є для гіперболічного рівняння з випадковими початковими умовами // Теорія ймов. та матем. статист. Вип. 69. – 2003. – С. 48–63.
2. *Yu.V. Kozachenko and G.I. Slyvka* Boundary-value problems for equations of mathematical physics with strictly $Sub_\varphi(\Omega)$ random initials conditions// Theory of Stochastic processes. – 2004. – 10(26) no. 1-2 – P. 60–71.
3. *Сливка Г. І.* Обґрунтування застосування методу Фур'є до задачі про коливання круглої мембрани з випадковими початковими умовами // Вісник Київ. ун-ту. Сер. фіз-мат. науки. – 2002. – Вип. 4. – С. 31–37.
4. *Сливка Г. І.* Обґрунтування застосування методу Фур'є до задачі про коливання прямокутного паралелепіпеда з випадковими початковими умовами // Вісник Київського університету. Серія фіз-мат. науки. – 2004. – Вип. №4. – С. 132–140.
5. *Yu. V. Kozachenko, K.J. Veresh* Boundary-value problem for nonhomogeneouse parabolic equation with Orlicz right side //Random Operators Eqs.– 2010. – no. 18 – P. 97–119.
6. *Козаченко Ю.В., Вереш К.Й.* Рівняння теплопровідності з випадковими початковими умовами із просторів Орліча // Теорія ймов. та матем. статист. Вип. 80. – 2009. – С. 56–69.
7. *V. V. Buldygin, Yu. V. Kozachenko.* Metric Characterization of Random Variables and Random processes – American Mathematical Society, Providence, Rhode, 2000. – 258p.
8. *Б.В. Довгай, Ю.В. Козаченко, Г.І. Сливка-Тилищак Г.І.* Крайові задачі математичної фізики з випадковими факторами. Монографія. Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет 2008.– 175с.
9. *Красносельский М.А., Рутицкий Я.В.* Выпуклые функции и пространства Орлича.– М.: Физматгиз, 1958. – 271с.
10. *R. Giuliano Antonini, Yu. Kozachenko, T. Nikitina* Space of φ-subgaussian random variables // Memorie di Mathematica e Applicazioni (Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL). – 2003 – Vol/ XXVII, fasc.1, P.95-124.
11. *Козаченко Ю.В.. Островский Е. И.* Банаховы пространства случайных величин типа субгауссовских // Теория вероятн. и мат. статист. – 1985. – № 32. – С. 42–53.
12. *Козаченко Ю.В., Ковальчук Ю.А.* Краевые задачи со случайными начальными условиями и функциональные ряды из $sub_\varphi(\Omega)$ *I* //Укр. мат. журнал. – 1998. – т.50, №4. – С. 504–515.
13. *Положий Г.Н.* Уравнения математической физики. – Москва: Высшая школа, 1964. – 559с.

Одержано 17.10..2011