

УДК 519.8

А. Ю. Брила (Ужгородський нац. ун-т)

## ЗАДАЧІ ЛЕКСИКОГРАФІЧНО-ПАРЕТІВСЬКОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ З АЛЬТЕРНАТИВНИМИ КРИТЕРІЯМИ

The method of finding of attainable optimum solutions of linear problem of lexicographic-pareto multicriteria optimization with alternative criteria by reduce it to the problem of onecriterion optimization with a scalar objective function is considered.

Розглядається метод знаходження досяжних оптимальних розв'язків лінійної задачі лексикографічно-паретівської багатокритеріальної оптимізації з альтернативними критеріями шляхом зведення її до однокритеріальної задачі з скалярною цільовою функцією.

**Вступ** Прикладні задачі лексикографічно-паретівської оптимізації з альтернативними критеріями виникають у різних сферах людської діяльності, в яких рішення приймається на основі багатьох критеріїв, що розбито на групи. В межах кожної із груп критерії вважаються рівноважливими, а групи упорядковано за важливістю у субординації строгого ранжирування.

Для розв'язання задачі лексикографічно-паретівської оптимізації в [1] запропоновано підхід, що ґрунтується на зведенні її до задачі лексикографічної оптимізації. У [2] запропоновано метод розв'язання лексикографічно-паретівської задачі шляхом зведення її до однокритеріальної задачі лінійного програмування з використанням відповідної лінійної згортки критеріїв. У даній статті результати отримані у [2] застосовуються для розв'язання задач лексикографічно-паретівської оптимізації з альтернативними критеріями та задач лексикографічно-паретівської оптимізації з альтернативними групами критеріїв.

**1. Задача лексикографічно-паретівської оптимізації з альтернативними критеріями.** Розглянемо лінійну задачу лексикографічно-паретівської максимізації ( [1])

$$\max^{LP} c(x), \quad x \in X, \quad (1)$$

де  $c(x) = (c_1(x), c_2(x), \dots, c_q(x))$  – векторна згортка критеріїв  $c_k(x)$ ,  $k=1, 2, \dots, q$  у субординації строгого ранжирування  $Rg(1, 2, \dots, q)$ , а кожен з критеріїв  $c_k(x) = (c_{k1}(x), c_{k2}(x), \dots, c_{kq_k}(x))$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, q\}$ , в свою чергу, є векторною згортокою критеріїв  $c_{ki}$ ,  $i = 1, 2, \dots, q_k$  у субординації рівної важливості  $Rv$ . Множина допустимих розв'язків  $X$  задається системою лінійних нерівностей

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Будемо вважати, що  $c_{ki}(x) \geq 0$ ,  $x \in X$ ,  $k = 1, 2, \dots, q$ ,  $i = 1, 2, \dots, q_k$ .

Якщо розв'язок лінійної багатокритеріальної задачі оптимізації може бути отриманий як розв'язок відповідної задачі лінійного програмування, з цільовою функцією, яка є лінійною згортокою критеріїв цієї багатокритеріальної задачі оптимізації, то вважають, що даний розв'язок є досяжним за зваженою сумою різноважливих критеріїв.

Нехай

$$f_k(x) = \sum_{i=1}^{q_k} \bar{\alpha}_{ki} c_{ki}(x),$$

де  $\bar{\alpha}_{ki} > 0, i = 1, 2, \dots, q_k, k = 1, 2, \dots, q, \sum_{i=1}^{q_k} \bar{\alpha}_{ki} = 1, k = 1, 2, \dots, q$ .

У [1] показано, що задача (1) може бути зведена до задачі

$$\max^L f(x), x \in X, \quad (2)$$

де  $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_q(x))$ . Вибравши додатні коефіцієнти  $\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \dots, \bar{\beta}_q$  згідно [2–6], задачу (2) можна звести до задачі лінійного програмування

$$\max \bar{B}(x) = \sum_{k=1}^q \bar{\beta}_k f_k(x), \quad x \in X. \quad (3)$$

На основі задач (1)-(3) розглянемо задачу, в якій оптимальний розв'язок необхідно знайти враховуючи тільки один критерій якнайвищого рангу з групи критеріїв якнайвищого рангу, для якого виконується умова

$$c_{ki}(x) \geq m_{ki}, \quad m_{ki} \in R, \quad k \in \{1, 2, \dots, q\}, \quad i \in \{1, 2, \dots, q_k\}.$$

Такий критерій назвемо допустимим, а дану задачу назвемо задачею лексикографічно-паретівської оптимізації з альтернативними критеріями.

Розглянемо задачу знаходження максимуму функціоналу

$$B(x) = \sum_{k=1}^q \bar{\beta}_k \sum_{i=1}^{q_k} \alpha_{ki} c_{ki}(x) \quad (4)$$

на допустимій множині, що задається обмеженнями

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (5)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (6)$$

$$c_{ki}(x) \geq m_{ki} y_{ki}, \quad k = 1, 2, \dots, q, \quad i = 1, 2, \dots, q_k, \quad (7)$$

$$\alpha_{ki} = \bar{\alpha}_{ki} y_{ki}, \quad k = 1, 2, \dots, q, \quad i = 1, 2, \dots, q_k, \quad (8)$$

$$\sum_{k=1}^q \sum_{i=1}^{q_k} y_{ki} = 1, \quad (9)$$

$$y_{ki} \in \{0, 1\}, \quad k = 1, 2, \dots, q, \quad i = 1, 2, \dots, q_k. \quad (10)$$

Нехай  $(\hat{x}, \hat{y})$  є оптимальним розв'язком задачі (4)-(10).

**Теорема 1.** Вектор  $\widehat{x}$  є розв'язком задачі лексикографічно-паретівської оптимізації з альтернативними критеріями, в якій вибір зніється на основі допустимого критерію якнайвищого рангу.

Доведення теореми легко отримати, враховуючи вибір коефіцієнтів  $\bar{\beta}_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, q$  та коефіцієнтів  $\bar{\alpha}_{ki}$ ,  $k = 1, 2, \dots, q$ ,  $i = 1, 2, \dots, q_k$ .

Очевидно, якщо оптимальний розв'язок необхідно знайти в залежності від вибору  $d$ ,  $d \geq 1$  допустимих критеріїв, то обмеження (9) необхідно замінити обмеженням

$$\sum_{k=1}^q \sum_{i=1}^{q_k} y_{ki} = d.$$

**2. Задача лексикографічно-паретівської оптимізації з альтернативними групами критеріїв.** На основі задач (1)-(3) побудуємо задачу, у якій оптимальний розв'язок необхідно знайти враховуючи тільки одну групу критеріїв якнайвищого рангу, тобто тільки один векторний критерій  $c_k(x)$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, q\}$ , який є векторною згорткою критеріїв  $c_{ki}$ ,  $i = 1, 2, \dots, q_k$  у субординації рівної важливості  $Rv$  і

$$c_{ki}(x) \geq m_{ki}, \quad i = 1, 2, \dots, q_k. \quad (11)$$

Такий векторний критерій будемо вважати допустимим, а саму задачу назвемо задачею лексикографічно-паретівської оптимізації з альтернативними групами критеріїв.

Розглянемо задачу знаходження максимуму функціоналу

$$B(x) = \sum_{k=1}^q \beta_k \sum_{i=1}^{q_k} \bar{\alpha}_{ki} c_{ki}(x) \quad (12)$$

на допустимій множині, що задається обмеженнями

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (13)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (14)$$

$$c_{ki}(x) \geq m_{ki} y_k, \quad k = 1, 2, \dots, q, \quad i = 1, 2, \dots, q_k, \quad (15)$$

$$\beta_k = \bar{\beta}_k y_k, \quad k = 1, 2, \dots, q, \quad (16)$$

$$\sum_{k=1}^q y_k = 1, \quad (17)$$

$$y_k \in \{0, 1\}, \quad k = 1, 2, \dots, q. \quad (18)$$

Нехай  $(\widehat{x}', \widehat{y}')$   $\in R^{n+q}$  є оптимальним розв'язком задачі (12)-(18).

**Теорема 2.** Вектор  $\hat{x}'$  є розв'язком задачі лексикографічно-паретівської оптимізації з альтернативними групами критеріїв, у якій вибір здійснюється на основі допустимого векторного критерію якнайвищого рангу.

Доведення теореми легко отримати, враховуючи вибір коефіцієнтів  $\bar{\beta}_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, q$  та коефіцієнтів  $\bar{\alpha}_{ki}$ ,  $k = 1, 2, \dots, q$ ,  $i = 1, 2, \dots, q_k$ .

Якщо необхідно знайти оптимальний розв'язок, враховуючи  $d$ ,  $d \geq 1$  векторних критеріїв якнайвищого рангу, то обмеження (17) необхідно замінити обмеженням

$$\sum_{k=1}^q y_k = d.$$

1. Червак Ю. Ю. Оптимізація. Непокращуваний вибір/ Ю.Ю. Червак. — Ужгород: Ужгородський нац. ун-т, 2002. — 312 с.
2. Брила А.Ю. Досяжність оптимальних розв'язків лексикографічно-паретівської та парето-лексикографічних задач оптимізації за зваженою сумою різноважливих критеріїв/ А.Ю. Брила // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. — 2007. — Вип. 14–15. — С. 13–17.
3. Брила А.Ю. Достижимость оптимальных решений линейной задачи многокритериальной оптимизации по взвешенной сумме критериев разной важности в транзитивной субординации/ А.Ю. Брила // Кибернетика и системный анализ.— 2008.— № 5.— С. 135-138.
4. Подиновский В.В. Методы многокритериальной оптимизации / В.В. Подиновский // Эффективные планы. — М.:Наука, 1971.— Вып. 1.— 73 с.
5. Подиновский В.В., Гаврилов В.М. Оптимизация по последовательно применяемым критериям/ В.В. Подиновский, В.М. Гаврилов. — М.:Наука, 1975. — 192 с.
6. Подиновский В.В. О построении множества эффективных стратегий в многокритериальных задачах с упорядоченными по важности критериями/ В.В. Подиновский // ЖВМ и МФ.—1978.— № 4.— С. 908-915.

Одержано ..2011