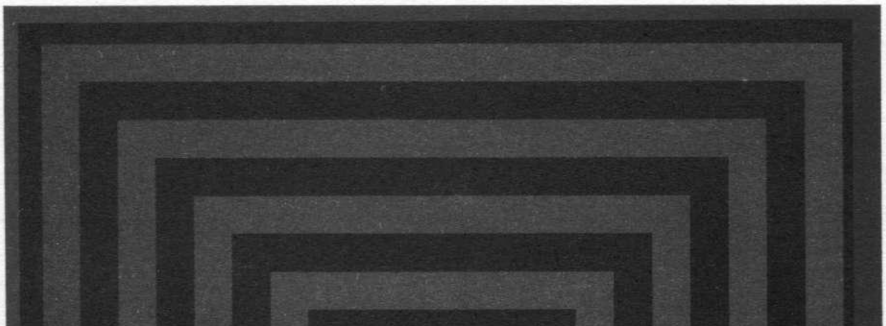
Київський університет ім. Тараса Шевченка

ISSN 0868-6904

ТЕОРІЯ ймовірностей



та математична СТАТИСТИКА

Видавництво ТВіМС

Зареєстрований 23 травня 2000 року.
Номер державної реєстрації КВ4229.
Засновники: Київський національний університет імені Тараса Шевченка та мале підприємство «ТВіМС».

Видавець: мале підприємство «ТВіМС»
Свідоцтво ДК110 від 05.07.2000 р.
Київ 03127, проспект Глушкова, 6

СКЛАД РЕДАКЦІЙНОЇ КОЛЕГІЇ

Журнал *"Теорія ймовірностей та математична статистика"* виходить двічі на рік і перекладається на англійську мову Американським математичним товариством з 1970 року. У журналі публікуються оригінальні статті та огляди з різних питань теорії ймовірностей, теорії випадкових процесів та полів, математичної статистики та їх застосувань. Рецензії на монографії та інформація відносно наукових подій публікуються як виключення. Всі матеріали, що надходять до редколегії, рецензуються. Після виходу у світ всі матеріали реферуються у "*Mathematical Reviews*" (AMS), "*Zentralblatt für Mathematik*" (Springer) та "*Statistical Methods and Applications*" (ISI).

Адреса редколегії: Україна, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет, кафедра теорії ймовірностей та математичної статистики
тел.: (044) 259–03–92
e-mail: tims@mail.univ.kiev.ua
http: probability.univ.kiev.ua/tims
http: www.ams.org/journals/tpms/

Журнал включено в каталог видань України ДП "Преса". Передплата здійснюється в усіх відділеннях "Укрпошти". Передплатний індекс 90216.

Рекомендовано до друку вченою радою механіко-математичного факультету.
Протокол № 8 від 11 березня 2013 року.
Формат 70*108/16. Друк офсетний. Ум. друк. арк. 17.26.
Здано до друку 14.06.2013. Номер замовлення 13-169. Тираж 100 прим.

Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 88, 2013, стор. 171–180

Teor. Imovir. ta Matem. Statyst.
No. 88, 2013, pp. 171–180

БАКСТЕРІВСЬКА ОЦІНКА НЕВІДОМОГО ПАРАМЕТРА КОВАРІАЦІЙНОЇ ФУНКЦІЇ У НЕГАУССОВОМУ ВИПАДКУ

УДК 519.21

О. О. СИНЯВСЬКА

Анотація. Вивчається задача оцінювання параметра H коваріаційної функції одного негауссового випадкового процесу. За допомогою бакстерівських статистик знайдено неасимптотичні довірчі інтервали.

Abstract. The problem of estimation the parameter H of covariance function of one non-Gaussian stochastic process is studied. A non-asymptotic confidence intervals are found by using Baxter statistics.

Аннотация. Изучается задача оценивания параметра H ковариационной функции одного негауссовского случайного процесса. При помощи бакстеровских статистик найдены неасимптотические доверительные интервалы.

1. Вступ

Граничні теореми, в яких доводиться збіжність в середньому квадратичному або з ймовірністю одиниця бакстерівських сум випадкового процесу до додатної сталої, називаються теоремами Леві–Бакстера або теоремами бакстерівського типу. Для випадкових процесів і полів такі теореми розглядались в роботах П. Леві [16], Г. Бакстера [10], Є. Г. Гладишева [3], С. М. Бермана [11], Т. Кавади [14], С. М. Краснітського [5] та інших.

Є. П. Бесклінська та Ю. В. Козаченко [1] отримали бакстерівські теореми для передгауссових випадкових процесів. Теореми бакстерівського типу для сумісно строго субгауссових та сумісно псевдогауссових випадкових процесів досліджувалися в монографії В. В. Булдигіна та Ю. В. Козаченка [2]. О. О. Курченко [7] довів бакстерівську теорему для сумісно строго субгауссових випадкових полів. Ю. В. Козаченко та О. О. Курченко [15] отримали для певного класу випадкових процесів без припущення гауссовості граничні теореми бакстерівського типу.

Теореми бакстерівського типу для оцінювання параметрів коваріаційної функції випадкових процесів та полів застосовувалися в роботах Р. Є. Майбороди [8], Ю. В. Козаченка та О. О. Курченка [4], О. О. Курченка [6], Дж.-Кр. Бретона, І. Нурдена, Дж. Пеккаті [12] та інших.

2. Постановка задачі

Нехай (Ω, F, P) — ймовірнісний простір.

Означення 2.1 ([15]). Випадковий вектор $(\xi,\eta)\in L_4(\Omega)\times L_4(\Omega)$ має властивість K, якщо

(1) $\mathsf{E}\xi=\mathsf{E}\eta=0$,

(2) $\mathsf{E}(\xi\pm\eta)^4\le 3\big(\mathsf{E}\,(\xi\pm\eta)^2\big)^2$.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 42C40; Secondary 60G12.

Ключові слова і фрази. Бакстерівські суми, довірчий інтервал, випадковий процес з приростами класу K.

Підклас K_1 класу K визначимо як множину усіх тих векторів класу K, для яких $\mathsf{E}(\xi \pm \eta)^4 = 3\big(\mathsf{E}(\xi \pm \eta)^2\big)^2$.

Означення 2.2 ([15]). Випадковий процес $\{X(t), t \in [0,1]\}$ з нульовим середнім називається процесом з приростами першого та другого порядку класу K, якщо для довільних $0 \le s \le t \le u \le v \le 1$ випадкові вектори (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2), де

$$\xi_1 = X(t) - X(s), \qquad \eta_1 = X(v) - X(u), \qquad \xi_2 = X(t) - 2X\left(\frac{t+s}{2}\right) + X(s),$$

$$\eta_2 = X(v) - 2X\left(\frac{u+v}{2}\right) + X(u),$$

мають властивість K. Випадковий процес $\{X(t), t \in [0,1]\}$ називається процесом з приростами першого та другого порядку класу K_1, якщо випадкові вектори (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2) належать класу K_1.

Наприклад, гауссові випадкові процеси з нульовим середнім значенням є випадковими процесами з приростами першого та другого порядку класу K_1.

Зауважимо, що для випадкового процесу $\{\xi(t), t \in [0,1]\}$ з приростами першого та другого порядку класу K_1 прирости ξ_i, $i = 1, 2$, задовольняють рівність $\mathsf{E}\,\xi_i^4 = 3\left(\mathsf{E}\,\xi_i^2\right)^2$, $i = 1, 2$.

Нехай $\{\xi(t), t \in [0,1]\}$ — випадковий процес з нульовим середнім значенням, коваріаційною функцією:

$$r(t,s) = \frac{1}{2}\left(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\right), \qquad t, s \in [0,1],\ H \in (0,1), \tag{1}$$

та приростами першого та другого порядку класу K_1. За спостереженнями випадкового процесу $\{\xi(t), t \in [0,1]\}$ в точках $\left\{\frac{k}{a_n}, \frac{k+0.5}{a_n} \mid 0 \le k \le a_n, n \ge 1\right\}$, де послідовність $(a_n) \subset \mathbf{N}$, $a_n \to +\infty$, $n \to \infty$, потрібно отримати оцінку невідомого параметра H та знайти неасимптотичні довірчі інтервали. Надалі будемо припускати, що для довільного $\alpha > 0$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-\alpha}$ збіжний.

Дробовий броунівський рух є прикладом випадкового процесу з коваріаційною функцією (1) і приростами першого та другого порядку класу K_1. Нижче наведений приклад негауссового випадкового процесу з коваріаційною функцією (1) і приростами першого та другого порядку класу K_1.

Приклад 2.1. У статті [13] отримано наступний розклад дробового броунівського руху $\{B_H(t), t \in [0,1]\}$ з параметром Хюрста $H \in (0,1)$:

$$B_H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x_n t)}{x_n} X_n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(y_n t)}{y_n} Y_n, \qquad t \in [0,1],$$

де X_n, Y_n — незалежні послідовності незалежних гауссових випадкових величин, $\mathsf{E}\,X_n = \mathsf{E}\,Y_n = 0, n \ge 1$;

$$\operatorname{Var} X_n = 2c_H^2 x_n^{-2H} J_{1-H}^{-2}(x_n), \tag{2}$$

$$\operatorname{Var} Y_n = 2c_H^2 y_n^{-2H} J_{-H}^{-2}(y_n); \tag{3}$$

$c_H^2 = \pi^{-1}\Gamma(1+2H)\sin \pi H$; J_ν, $\nu \ne -1, -2, \ldots$ — функція Бесселя першого роду порядку ν; (x_n) — зростаюча послідовність додатніх нулів функції Бесселя J_{-H}; (y_n) — зростаюча послідовність додатніх нулів функції Бесселя J_{1-H}.

Нехай, далі (ξ_n), (η_n) — незалежні послідовності незалежних випадкових величин, $\mathsf{E}\,\xi_n = \mathsf{E}\,\eta_n = 0$, $\mathsf{E}\,\xi_n^4 = 3(\mathsf{E}\,\xi_n^2)^2$, $\mathsf{E}\,\eta_n^4 = 3(\mathsf{E}\,\eta_n^2)^2$, $\operatorname{Var}\xi_n = \operatorname{Var} X_n$, $\operatorname{Var}\eta_n = \operatorname{Var} Y_n$.

Тоді випадковий процес

$$\xi(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(x_n t)}{x_n}\xi_n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos(y_n t)}{y_n}\eta_n,\qquad t\in[0,1],\tag{4}$$

має коваріаційну функцію (1) та прирости першого порядку класу K_1. Для довільного $t\in[0,1]$ доведемо збіжність в $L_4(\Omega)$ першого ряду в правій частині (4). Збіжність другого ряду доводиться аналогічно. Нехай $1\le N<M$. Внаслідок нерівності Гельдера для $p=\frac{4}{3}$, $q=4$, $\forall\lambda\in(0,\frac{1}{4})$ маємо:

$$\left|\sum_{n=N}^{M}\frac{\sin x_n t}{x_n}\xi_n\right|\le\sum_{n=N}^{M}\frac{1}{x_n^{1-\lambda}}\frac{|\xi_n|}{x_n^{\lambda}}\le\left(\sum_{n=N}^{M}\frac{1}{x_n^{4(1-\lambda)/3}}\right)^{3/4}\left(\sum_{n=N}^{M}\frac{\xi_n^4}{x_n^{4\lambda}}\right)^{1/4}.$$

Оскільки для довільного $p>0$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}1/x_n^{1+p}$ збіжний [13], а $\frac{4}{3}(1-\lambda)>1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}1/x_n^{4(1-\lambda)/3}$ збіжний для $\lambda<\frac{1}{4}$. Далі,

$$\mathsf{E}\left|\sum_{n=N}^{M}\frac{\sin x_n t}{x_n}\xi_n\right|^4\le\left(\sum_{n=N}^{M}\frac{1}{x_n^{4(1-\lambda)/3}}\right)^3\mathsf{E}\left(\sum_{n=N}^{M}\frac{\xi_n^4}{x_n^{4\lambda}}\right).$$

Так як $\mathsf{E}\,\xi_n^4=3(\mathsf{E}\,\xi_n^2)^2$, то

$$\mathsf{E}\left(\sum_{n=N}^{M}\frac{\xi_n^4}{x_n^{4\lambda}}\right)=3\sum_{n=N}^{M}\frac{(\mathsf{E}\,\xi_n^2)^2}{x_n^{4\lambda}}=3\sum_{n=N}^{M}\frac{4c_H^4}{x_n^{4\lambda+4H}J_{1-H}^4(x_n)}.$$

Враховуючи, що $J_{1-H}^2(x_n)\sim\frac{2}{\pi x_n}$, $n\to\infty$ [13], отримаємо

$$\frac{1}{x_n^{4\lambda+4H}J_{1-H}^4(x_n)}\sim\frac{\pi^2}{4}\frac{x_n^2}{x_n^{4\lambda+4H}}=\frac{\pi^2}{4}\frac{1}{x_n^{4\lambda+4H-2}}.$$

При $H>\frac{1}{2}$ знайдеться $\lambda<\frac{1}{4}$ таке, що $4\lambda+4H-2>1$. Враховуючи, що для довільного $p>0$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}1/x_n^{1+p}<+\infty$, отримаємо збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(x_n^{4\lambda+4H}J_{1-H}^4(x_n)\right)^{-1}.$$

Отже,

$$\mathsf{E}\left(\sum_{n=N}^{M}\frac{\sin x_n t}{x_n}\xi_n\right)^4\to0,\qquad N,M\to\infty,$$

і тому, внаслідок критерію Коші, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(\sin x_n t/x_n)\xi_n$ збіжний в $L_4(\Omega)$. Доведемо, що $\sum_{n=1}^{\infty}(\sin x_n t/x_n)\xi_n$ є процесом з приростами першого порядку класу K_1. Нехай

$$X(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(t)\xi_n,\qquad t\in[0,1],$$

де $\varphi_n(t)=\sin x_n t/x_n$, $n\ge1$. Для довільних відрізків $[s,t],[u,v]\subset[0,1]$ без спільних внутрішніх точок покладемо

$$X_{1,N}=\sum_{n=1}^{N}\rho_n\xi_n,\quad \text{де } \rho_n=\varphi_n(t)-\varphi_n(s),$$

$$X_{2,N}=\sum_{n=1}^{N}\tau_n\xi_n,\quad \text{де } \tau_n=\varphi_n(v)-\varphi_n(u),\quad n\ge1.$$

Доведемо, що

$$\mathsf{E}\,(X_{1,N}\pm X_{2,N})^4=3\left(\mathsf{E}\,(X_{1,N}\pm X_{2,N})^2\right)^2.\tag{5}$$

Оскільки $X_{1,N} \pm X_{2,N} = \sum_{n=1}^{N} \mu_n \xi_n$, де $\mu_n = \rho_n \pm \tau_n$, $1 \le n \le N$, то

$$\mathsf{E}\left(\sum_{n=1}^{N} \mu_n \xi_n\right)^4 = \sum_{n=1}^{N} \mu_n^4 \,\mathsf{E}\,\xi_n^4 + 6 \sum_{\substack{n,m=1 \\ n<m}}^{N} \mu_n^2 \mu_m^2 \,\mathsf{E}\,\xi_n^2 \,\mathsf{E}\,\xi_m^2$$

$$= 3\left(\sum_{n=1}^{N} \mu_n^4 \left(\mathsf{E}\,\xi_n^2\right)^2 + 2 \sum_{\substack{n,m=1 \\ n<m}}^{N} \mu_n^2 \mu_m^2 \,\mathsf{E}\,\xi_n^2 \,\mathsf{E}\,\xi_m^2\right)$$

$$= 3\left(\sum_{n=1}^{N} \mu_n^2 \,\mathsf{E}\,\xi_n^2\right)^2 = 3\left(\mathsf{E}\left(\sum_{n=1}^{N} \mu_n \xi_n\right)^2\right)^2.$$

Нехай $X_i = \lim_{N\to\infty} X_{i,N}$ в $L_4(\Omega)$, де $i = 1, 2$. Після граничного переходу при $N \to \infty$ в (5) одержимо $\mathsf{E}\,(X_1 \pm X_2)^4 = 3\left(\mathsf{E}\,(X_1 \pm X_2)^2\right)^2$. Отже, випадковий процес $X(t)$ є процесом з приростами першого порядку класу K_1. Аналогічно, випадковий процес $Y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} ((1 - \cos y_n t)/y_n)\eta_n$, $t \in [0, 1]$, є процесом з приростами першого порядку класу K_1. Тоді, випадковий процес $\xi(t) = X(t) + Y(t)$, $t \in [0, 1]$ є процесом з приростами першого порядку класу K_1. Дійсно, для $X_1 = X(t) - X(s)$, $X_2 = X(v) - X(u)$ та $Y_1 = Y(t) - Y(s)$, $Y_2 = Y(v) - Y(u)$ маємо:

$$\mathsf{E}\left((X_1 + Y_1) \pm (X_2 + Y_2)\right)^4 = \mathsf{E}\left((X_1 \pm X_2) + (Y_1 \pm Y_2)\right)^4$$

$$= 3\left(\left(\mathsf{E}\,(X_1 \pm X_2)^2\right)^2 + 2\,\mathsf{E}\,(X_1 \pm X_2)^2 \,\mathsf{E}\,(Y_1 \pm Y_2)^2 + \left(\mathsf{E}\,(Y_1 \pm Y_2)^2\right)^2\right)$$

$$= 3\left(\mathsf{E}\,(X_1 \pm X_2)^2 + \mathsf{E}\,(Y_1 \pm Y_2)^2\right)^2 = 3\left(\mathsf{E}\left((X_1 \pm X_2) + (Y_1 \pm Y_2)\right)^2\right)^2$$

$$= 3\left(\mathsf{E}\left((X_1 + Y_1) \pm (X_2 + Y_2)\right)^2\right)^2.$$

Аналогічно, доводиться, що випадковий процес $\xi(t) = X(t) + Y(t)$, $t \in [0, 1]$, є процесом з приростами другого порядку класу K_1.

3. Сильно консистентна оцінка параметра H

Для випадковго процесу $\{\xi(t), t \in [0, 1]\}$ введемо такі позначення:

$$\xi_{k,n}^{(1)} = \xi\left(\frac{k+1}{a_n}\right) - \xi\left(\frac{k}{a_n}\right),$$

$$\xi_{k,n}^{(2)} = \xi\left(\frac{k+1}{a_n}\right) - 2\xi\left(\frac{k+0.5}{a_n}\right) + \xi\left(\frac{k}{a_n}\right), \qquad 0 \le k \le a_n - 1.$$

Розглянемо наступні послідовності бакстерівських сум:

$$S_n^{(i)} = \sum_{k=0}^{a_n - 1} \left(\xi_{k,n}^{(i)}\right)^2, \qquad \hat{S}_n^{(i)} = a_n^{2H-1} S_n^{(i)}, \qquad i = 1, 2.$$

Для оцінки дисперсії бакстерівських сум $\hat{S}_n^{(i)}$, $i = 1, 2$, ми застосуємо наступну лему.

Лема 3.1 ([15]). *Нехай випадковий вектор (ξ, η) належить класу K. Тоді виконується наступна нерівність:*

$$\mathsf{E}\left(\xi^2 \eta^2\right) \le 2\left(\mathsf{E}\,\xi\eta\right)^2 + \mathsf{E}\,\xi^2 \,\mathsf{E}\,\eta^2 + \frac{1}{2}\left(\left(\mathsf{E}\,\xi^2\right)^2 - \frac{1}{3}\,\mathsf{E}\,\xi^4\right) + \frac{1}{2}\left(\left(\mathsf{E}\,\eta^2\right)^2 - \frac{1}{3}\,\mathsf{E}\,\eta^4\right).$$

Із цієї леми випливає, що для випадкового процесу $\{\xi(t), t \in [0,1]\}$ з приростами першого та другого порядку класу K_1 випадкові вектори (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2) із означення 2.2 задовольняють нерівність:

$$\mathsf{E}\left(\xi_i^2 \eta_i^2\right) \leq 2\left(\mathsf{E}(\xi_i \eta_i)\right)^2 + \mathsf{E}\,\xi_i^2\, \mathsf{E}\,\eta_i^2, i = 1, 2. \tag{6}$$

Лема 3.2. *Нехай* $H^* \in (0,1)$. *Тоді*

$$\sup_{H \in (0, H^*]} \operatorname{Var} \hat{S}_n^{(1)} \leq \begin{cases} \frac{2}{a_n}\left(3 + 2\zeta(4 - 4H^*)\right), & \text{якщо } H^* \in (0, \frac{3}{4}); \\ \frac{2}{a_n}\left(3 + 2\left(1 + \ln a_n\right)\right)), & \text{якщо } H^* = \frac{3}{4}; \\ \frac{2}{a_n}\left(3 + 2\frac{a_n^{4H^*-3}}{4H^*-3}\right), & \text{якщо } H^* \in (\frac{3}{4}, 1), \end{cases}$$

де

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \qquad s > 1. \tag{7}$$

Доведення. Маємо:

$$\operatorname{Var} \hat{S}_n^{(1)} = a_n^{4H-2} \operatorname{Var} S_n^{(1)};$$

$$\operatorname{Var} S_n^{(1)} = \mathsf{E}\left(S_n^{(1)} - \mathsf{E}\,S_n^{(1)}\right)^2 = \mathsf{E}\left(\sum_{k=0}^{a_n-1}\left(\xi_{k,n}^{(1)}\right)^2 - \sum_{k=0}^{a_n-1}\mathsf{E}\left(\xi_{k,n}^{(1)}\right)^2\right)^2$$

$$= \mathsf{E}\left(\sum_{k,j=0}^{a_n-1}\left(\left(\xi_{k,n}^{(1)}\right)^2 - \mathsf{E}\left(\xi_{k,n}^{(1)}\right)^2\right)\left(\left(\xi_{j,n}^{(1)}\right)^2 - \mathsf{E}\left(\xi_{j,n}^{(1)}\right)^2\right)\right)$$

$$= \sum_{k,j=0}^{a_n-1}\left(\mathsf{E}\left(\xi_{k,n}^{(1)}\right)^2\left(\xi_{j,n}^{(1)}\right)^2 - \mathsf{E}\left(\xi_{k,n}^{(1)}\right)^2 \mathsf{E}\left(\xi_{j,n}^{(1)}\right)^2\right).$$

Внаслідок нерівності (6),

$$\operatorname{Var} S_n^{(1)} \leq 2\sum_{k,j=0}^{a_n-1}\left(\mathsf{E}\,\xi_{k,n}^{(1)}\xi_{j,n}^{(1)}\right)^2.$$

Далі,

$$\mathsf{E}\,\xi_{k,n}^{(1)}\xi_{j,n}^{(1)} = \frac{1}{2}\left|\frac{(k-j)+1}{a_n}\right|^{2H} - \left|\frac{k-j}{a_n}\right|^{2H} + \frac{1}{2}\left|\frac{(k-j)-1}{a_n}\right|^{2H}, \qquad 0 \leq k, j \leq a_n - 1.$$

Покладемо $v_l := (l+1)^{2H} - 2l^{2H} + (l-1)^{2H}$, $l \geq 1$. Тоді

$$\operatorname{Var} S_n^{(1)} \leq 2\left(a_n^{1-4H} + \frac{a_n^{-4H}}{2}\sum_{\substack{k,j=0,\\ k<j}}^{a_n-1} v_{j-k}^2\right) \leq 2a_n^{1-4H}\left(1 + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{a_n-1} v_l^2\right).$$

Оскільки $v_1^2 = \left(2^{2H} - 2\right)^2 \leq 4$ при $H \in (0,1)$, то $\operatorname{Var} S_n^{(1)} \leq 2a_n^{1-4H}\left(3 + \frac{1}{2}\sum_{l=2}^{a_n-1} v_l^2\right)$. Далі, так як v_l — приріст другого порядку функції $f(x) = x^{2H}$, $x \geq 1$, на відрізку $[l-1, l+1]$, то з формули для приросту n-го порядку при $n = 2$ [9, с. 244] випливає, що $v_l = 2H(2H-1)\theta_l^{2H-2}$, де $\theta_l \in (l-1, l+1)$. Враховуючи, що $\sup_{H\in(0,1)} |2H(2H-1)| = 2$, отримаємо

$$v_l^2 \leq \frac{4}{(l-1)^{4-4H}}, \qquad l \geq 2,$$

звідки

$$\operatorname{Var} S_n^{(1)} \leq 2a_n^{1-4H}\left(3 + 2\sum_{l=2}^{a_n-1}\frac{1}{(l-1)^{4-4H}}\right).$$

Таким чином

$$\operatorname{Var}\hat{S}_n^{(1)} \le \frac{2}{a_n}\left(3 + 2\sum_{l=2}^{a_n-1}\frac{1}{(l-1)^{4-4H}}\right)$$

і

$$\sup_{H\in(0,H^*]}\operatorname{Var}\hat{S}_n^{(1)} \le \frac{2}{a_n}\left(3 + 2\sum_{l=2}^{a_n-1}\frac{1}{(l-1)^{4-4H^*}}\right). \tag{8}$$

Оскільки

$$\sum_{l=1}^{a_n}\frac{1}{l^{4-4H^*}} \le \begin{cases}\zeta(4-4H^*), & H^*\in(0,\frac{3}{4});\\ 1+\ln a_n, & H^*=\frac{3}{4};\\ \frac{a_n^{4H^*-3}}{4H^*-3}, & \text{якщо } H^*\in\left(\frac{3}{4},1\right),\end{cases}$$

де $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}$, $s>1$, то із нерівності (8) отримуємо твердження леми. Лема доведена. □

Теорема 3.1. $\hat{S}_n^{(1)} \to 1$ *з ймовірністю одиниця при* $n\to\infty$.

Доведення.

$$\mathsf{E}\,\hat{S}_n^{(1)} = a_n^{2H-1}a_n\,\mathsf{E}\left(\xi_{0,n}^{(1)}\right)^2 = 1, \qquad n\ge 1. \tag{9}$$

З леми 3.2 та припущення про збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-\alpha}$ для довільного $\alpha>0$ випливає, що для довільного $H\in(0,1)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Var}\hat{S}_n^{(1)}<+\infty$. Враховуючи (9), отримуємо твердження теореми. □

Лема 3.3. *Для довільного* $H\in(0,1)$

$$\operatorname{Var}\hat{S}_n^{(2)} \le \frac{2}{a_n}\left(9+\frac{c}{2}+\frac{c_*^2}{2}\zeta(4)\right),$$

де $\zeta(4)=\pi^4/90$,

$$c = \sup_{H\in(0,1)}\left(\frac{6\cdot 2^{2H}-4-4\cdot 3^{2H}+2^{4H}}{2^{2H}}\right)^2,$$

$$c_* = \sup_{H\in(0,1)}\left|\frac{2H(2H-1)(2H-2)(2H-3)}{2^4}\right|.$$

Доведення. Маємо:

$$\operatorname{Var}\hat{S}_n^{(2)} = a_n^{4H-2}\operatorname{Var}S_n^{(2)}.$$

Як і у доведенні леми 3.2, отримаємо нерівність

$$\operatorname{Var}S_n^{(2)} \le 2\sum_{k,j=0}^{a_n-1}\left(\mathsf{E}\,\xi_{k,n}^{(2)}\xi_{j,n}^{(2)}\right)^2.$$

Далі,

$$\mathsf{E}\left(\xi_{k,n}^{(2)}\xi_{j,n}^{(2)}\right) = \frac{1}{2}\left(-\left|\frac{(k-j)-1}{a_n}\right|^{2H} + 4\left|\frac{(k-j)-1/2}{a_n}\right|^{2H} - 6\left|\frac{k-j}{a_n}\right|^{2H}\right.$$
$$\left. + 4\left|\frac{(k-j)+1/2}{a_n}\right|^{2H} - \left|\frac{(k-j)+1}{a_n}\right|^{2H}\right),$$

$$0\le k,j\le a_n-1.$$

При $k=j$ маємо $\mathsf{E}\big(\xi_{k,n}^{(2)}\big)^2 = \mathsf{E}\big(\xi_{0,n}^{(2)}\big)^2 = a_n^{-2H}(2^{2-2H}-1)$.

Покладемо

$$w_l := \left(|l-1|^{2H} - 4|l - \frac{1}{2}|^{2H} + 6l^{2H} - 4|l + \frac{1}{2}|^{2H} + |l+1|^{2H} \right), \qquad l \geq 1.$$

При $l = 1$ одержимо $w_1 = (6 \cdot 2^{2H} - 4 - 4 \cdot 3^{2H} + 2^{4H})/(2^{2H})$. Тоді

$$\begin{aligned}\operatorname{Var} S_n^{(2)} &\leq 2 \left(a_n^{1-4H}(2^{2-2H}-1)^2 + \frac{a_n^{-4H}}{2} \sum_{\substack{k,j=0,\\ k<j}}^{a_n-1} w_{j-k}^2 \right) \\ &\leq 2 \Bigg(a_n^{1-4H}(2^{2-2H}-1)^2 \\ &\quad + \frac{a_n^{1-4H}}{2} \left(\frac{6 \cdot 2^{2H} - 4 - 4 \cdot 3^{2H} + 2^{4H}}{2^{2H}} \right)^2 + \frac{a_n^{1-4H}}{2} \sum_{l=2}^{a_n-1} w_l^2 \Bigg).\end{aligned}$$

Оскільки $\sup_{H \in (0,1)} (2^{2-2H}-1)^2 = 9$, то

$$\operatorname{Var} S_n^{(2)} \leq 2a_n^{1-4H} \left(9 + \frac{c}{2} + \frac{1}{2} \sum_{l=2}^{a_n-1} w_l^2 \right),$$

де

$$c = \sup_{H \in (0,1)} \left(\frac{6 \cdot 2^{2H} - 4 - 4 \cdot 3^{2H} + 2^{4H}}{2^{2H}} \right)^2. \tag{10}$$

Далі, w_l — приріст четвертого порядку функції $f(x) = x^{2H}$, $x \geq 1$, на відрізку $[l-1, l+1]$, тому з формули для приросту n-го порядку при $n = 4$ [9, с. 244] одержимо, що

$$w_l = \frac{2H(2H-1)(2H-2)(2H-3)}{2^4} \theta_l^{2H-4},$$

де $\theta_l \in (l-1, l+1)$. Враховуючи, що

$$c_* = \sup_{H \in (0,1)} \left| \frac{2H(2H-1)(2H-2)(2H-3)}{2^4} \right|, \tag{11}$$

отримаємо

$$w_l^2 \leq c_*^2 \frac{1}{(l-1)^{8-4H}}, \qquad l \geq 2,$$

звідки

$$\operatorname{Var} S_n^{(2)} \leq 2a_n^{1-4H} \left(9 + \frac{c}{2} + \frac{c_*^2}{2} \sum_{l=2}^{a_n-1} \frac{1}{(l-1)^{8-4H}} \right) \leq 2a_n^{1-4H} \left(9 + \frac{c}{2} + \frac{c_*^2}{2} \zeta(4) \right),$$

де $\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-4} = \frac{\pi^4}{90} = 1.08232323\ldots$. Таким чином, $\sup_{H \in (0,1)} \operatorname{Var} \hat{S}_n^{(2)} \leq$ $\leq \frac{2}{a_n}(9 + \frac{c}{2} + \frac{c_*^2}{2}\zeta(4))$. Лема доведена. □

Теорема 3.2. $\hat{S}_n^{(2)} \to 2^{2-2H} - 1$ *з ймовірністю одиниця при* $n \to \infty$.

Доведення.

$$\mathsf{E}\, \hat{S}_n^{(2)} = a_n^{2H-1} a_n \,\mathsf{E} \left(\xi_{0,n}^{(2)} \right)^2 = 2^{2-2H} - 1.$$

Із леми 3.3 та збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-1}$ випливає, що для довільного $H \in (0,1)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Var} \hat{S}_n^{(2)} < +\infty$. Теорему доведено. □

Із теорем 3.1 та 3.2 випливає наступний наслідок.

Наслідок 3.1.
$$\frac{S_n^{(2)}}{S_n^{(1)}} = \frac{\hat{S}_n^{(2)}}{\hat{S}_n^{(1)}} \to 2^{2-2H} - 1, \qquad H \in (0,1), \tag{12}$$
з ймовірністю одиниця при $n \to \infty$.

Покладемо
$$\theta(H) := 2^{2-2H} - 1, \qquad H \in (0,1). \tag{13}$$
Функція
$$\varphi(\theta) = 1 - \frac{1}{2}\log_2(\theta + 1), \qquad \theta \in (0,3) \tag{14}$$
— обернена до функції $\theta(H)$, $H \in (0,1)$.

Теорема 3.3. *Статистика*
$$\hat{H}_n = 1 - \frac{1}{2}\log_2(\theta_n + 1), \qquad n \geq 1,$$
де $\theta_n = S_n^{(2)}/S_n^{(1)}$, $n \geq 1$, *є сильно консистентною оцінкою параметра* H.

Доведення. Оскільки функція (14) обернена до функції (13), то із збіжності (12) випливає, що $\hat{H}_n \to H$ з ймовірністю одиниця при $n \to \infty$. □

4. Довірчі інтервали

Лема 4.1. *Нехай* $\{X_k \mid 0 \leq k \leq a_n, a_n \in N\}$, $\{Y_k \mid 0 \leq k \leq a_n, a_n \in N\}$ *— набори випадкових величин з нульовим середнім та скінченими моментами 4-го порядку такі, що:*
$$\mathsf{E}\, X_k = \mathsf{E}\, Y_k = 0, \qquad \mathsf{E}\, X_k^2 = \mathsf{E}\, X_0^2, \qquad \mathsf{E}\, Y_k^2 = \mathsf{E}\, Y_0^2, \qquad 0 \leq k \leq a_n;$$
$$S_1 = \sum_{k=0}^{a_n} X_k^2, \qquad S_2 = \sum_{k=0}^{a_n} Y_k^2, \qquad \theta = \frac{\mathsf{E}\, X_0^2}{\mathsf{E}\, Y_0^2}.$$
Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ *має місце нерівність:*
$$\mathsf{P}\left\{\left|\frac{S_1}{S_2} - \theta\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{\operatorname{Var} Q_1}{(\mathsf{E}\, Q_1)^2} + \frac{\operatorname{Var} Q_2}{(\mathsf{E}\, Q_2)^2},$$
де $Q_1 = (\theta - \varepsilon)\, S_2 - S_1$, $Q_2 = S_1 - (\theta + \varepsilon)\, S_2$.

Доведення. Маємо:
$$\begin{aligned}\mathsf{P}\left\{\left|\frac{S_1}{S_2} - \theta\right| \geq \varepsilon\right\} &= \mathsf{P}\left\{|S_1 - \theta S_2| \geq \varepsilon S_2\right\} \\ &= \mathsf{P}\left\{S_1 - \theta S_2 \leq -\varepsilon S_2\right\} + \mathsf{P}\left\{S_1 - \theta S_2 \geq \varepsilon S_2\right\} \\ &= \mathsf{P}\left\{Q_1 \geq 0\right\} + \mathsf{P}\left\{Q_2 \geq 0\right\}.\end{aligned}$$
Зауважимо, що
$$\begin{aligned}\mathsf{E}\, Q_1 &= (\theta - \varepsilon)\, \mathsf{E}\, S_2 - \mathsf{E}\, S_1 = (\theta - \varepsilon)\,(a_n + 1)\, \mathsf{E}\, Y_0^2 - (a_n + 1)\, \mathsf{E}\, X_0^2 \\ &= (a_n + 1)(\theta - \varepsilon - \theta) = -\varepsilon(a_n + 1)\, \mathsf{E}\, Y_0^2 < 0;\end{aligned}$$
$$\mathsf{E}\, Q_2 = (a_n + 1)\, \mathsf{E}\, X_0^2 - (\theta + \varepsilon)\,(a_n + 1)\, \mathsf{E}\, Y_0^2 = -\varepsilon(a_n + 1)\, \mathsf{E}\, Y_0^2 < 0.$$
Оцінимо зверху ймовірність $\mathsf{P}\{Q_1 \geq 0\}$ за допомогою нерівності Чебишева:
$$\mathsf{P}\{Q_1 \geq 0\} = \mathsf{P}\{Q_1 - \mathsf{E}\, Q_1 \geq -\mathsf{E}\, Q_1\} \leq \mathsf{P}\{|Q_1 - \mathsf{E}\, Q_1| \geq -\mathsf{E}\, Q_1\} \leq \frac{\operatorname{Var} Q_1}{(\mathsf{E}\, Q_1)^2}.$$
Аналогічно оцінюється зверху ймовірність $\mathsf{P}\{Q_2 \geq 0\}$. □

За допомогою леми 4.1 спочатку побудуємо довірчий інтервал для параметра $\theta = 2^{2-2H} - 1$, $H \in (0,1)$. Нехай $1 - p \in (0,1)$ — заданий рівень довіри. Додатне число $\gamma_n(p)$ визначимо так, щоб:

$$\mathsf{P}\left\{|\theta_n - \theta| \geq \gamma_n(p)\right\} < p.$$

З цією метою покладемо

$$Q_1 = (\theta - \gamma_n(p))\,\hat{S}_n^{(1)} - \hat{S}_n^{(2)}, \qquad Q_2 = \hat{S}_n^{(2)} - (\theta + \gamma_n(p))\,\hat{S}_n^{(1)},$$

де поки що $\gamma_n(p)$ не визначено. Для математичних сподівань випадкових величин Q_1, Q_2 маємо:

$$\mathsf{E}\,Q_1 = \mathsf{E}\,Q_2 = -\gamma_n(p).$$

Для оцінки зверху дисперсій випадкових величин Q_1, Q_2 використаємо нерівність $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$, $a, b \in \mathbf{R}$. Маємо

$$\operatorname{Var} Q_1 \leq 2\left(\theta - \gamma_n(p)\right)^2 \operatorname{Var} \hat{S}_n^{(1)} + 2 \operatorname{Var} \hat{S}_n^{(2)},$$

$$\operatorname{Var} Q_2 \leq 2\left(\theta + \gamma_n(p)\right)^2 \operatorname{Var} \hat{S}_n^{(1)} + 2 \operatorname{Var} \hat{S}_n^{(2)}.$$

Оцінки для $\operatorname{Var} \hat{S}_n^{(1)}$, $\operatorname{Var} \hat{S}_n^{(2)}$ отримані у лемах 3.2, 3.3. Нагадаємо, що $\theta \in (0,3)$.

Будемо підбирати $\gamma_n(p)$ так, щоб

$$\frac{\operatorname{Var} Q_1}{(\mathsf{E}\,Q_1)^2} \leq \frac{2\left(\theta - \gamma_n(p)\right)^2 \operatorname{Var} \hat{S}_n^{(1)} + 2 \operatorname{Var} \hat{S}_n^{(2)}}{\gamma_n^2(p)} \leq \frac{p}{2}, \tag{15}$$

$$\frac{\operatorname{Var} Q_2}{(\mathsf{E}\,Q_2)^2} \leq \frac{2\left(\theta + \gamma_n(p)\right)^2 \operatorname{Var} \hat{S}_n^{(1)} + 2 \operatorname{Var} \hat{S}_n^{(2)}}{\gamma_n^2(p)} \leq \frac{p}{2}. \tag{16}$$

Для $H^* \in (0,1)$ покладемо

$$\alpha_n = \begin{cases} \frac{4}{a_n}\left(3 + 2\zeta(4 - 4H^*)\right), & H^* \in (0, \frac{3}{4}); \\ \frac{4}{a_n}\left(3 + 2\left(1 + \ln a_n\right)\right), & H^* = \frac{3}{4}; \\ \frac{4}{a_n}\left(3 + 2\frac{a_n^{4H^*-3}}{4H^*-3}\right), & H^* \in \left(\frac{3}{4}, 1\right), \end{cases}$$

$$\beta_n = \frac{4}{a_n}\left(9 + \frac{c}{2} + \frac{c_*}{2}\zeta(4)\right),$$

де c, c_*, $\zeta(s)$, $s > 1$, визначені рівностями (10), (11) та (7) відповідно.

Із лем 3.2, 3.3 випливає, що

$$\alpha_n \geq 2 \sup_{H\in(0,H^*]} \operatorname{Var} \hat{S}_n^{(1)}, \qquad \beta_n \geq 2 \sup_{H\in(0,H^*]} \operatorname{Var} \hat{S}_n^{(2)}.$$

При $H \in (0, H^*]$ нерівність (16) є наслідком нерівності

$$\frac{\left(3 + \gamma_n(p)\right)^2 \alpha_n + \beta_n}{\gamma_n^2(p)} \leq \frac{p}{2}.$$

Розв'язуючи цю нерівність відносно $\gamma_n(p)$ за умови $\frac{p}{2} - \alpha_n > 0$, що справджується для всіх достатньо великих n, отримаємо

$$\gamma_n(p) \geq \frac{3\alpha_n + \sqrt{\frac{D}{4}}}{\left(\frac{p}{2} - \alpha_n\right)},$$

де

$$D = 36\alpha_n^2 + 4\left(\frac{p}{2} - \alpha_n\right)(9\alpha_n + \beta_n).$$

Покладемо

$$\gamma_n(p) = \frac{3\alpha_n + \sqrt{\frac{D}{4}}}{\left(\frac{p}{2} - \alpha_n\right)}. \tag{17}$$

Звідси випливає наступна теорема.

Теорема 4.1. *Нехай* $H \in (0, H^*]$, *де* $H^* \in (0,1)$ *– фіксовано і* $\frac{p}{2} - \alpha_n > 0$. *Тоді інтервал* $(H_{n,l}, H_{n,r})$, *де*

$$H_{n,l} = \varphi\big(\min(\theta_n + \gamma_n(p), \theta(H^*))\big), \qquad H_{n,r} = \varphi\big(\max(0, \theta_n - \gamma_n(p))\big),$$

$\theta_n = S_n^{(2)}/S_n^{(1)}$, *функція* $\varphi(H)$ *визначена рівністю* (14), $\gamma_n(p)$ *обчислюється за формулою* (17), *є довірчим інтервалом для параметра* H *з рівнем довіри* $1-p$.

Зауважимо, що $\gamma_n(p) = O\left(\sqrt{\alpha_n}\right)$, $n \to \infty$.

5. Висновки

В роботі отримано бакстерівську оцінку невідомого параметра H коваріаційної функції (1) випадкового процесу з приростами першого та другого порядку класу K_1. Також знайдено неасимптотичні довірчі інтервали.

Література

1. Е. П. Бесклинская, Ю. В. Козаченко, *Сходимость в нормах пространства Орлича и теоремы Леви–Бакстера*, Теория вероятн. и матем. статист. **36** (1986), 3–6.
2. В. В. Булдыгин, Ю. В. Козаченко, *Метрические характеристики случайных величин и процессов*, "ТВіМС", Киев, 1998.
3. Е. Г. Гладышев, *Новая предельная теорема для случайных процессов с гауссовскими приращениями*, Теория вероятн. и применен. **6** (1961), 57–66.
4. Ю. В. Козаченко, О. О. Курченко, *Оцінювання параметрів гауссівських однорідних випадкових полів*, УМЖ **52** (2000), № 8, 1082–1088.
5. С. М. Краснитский, *О некоторых предельных теоремах для случайных полей с гауссовскими разностями m-го порядка*, Теория вероятн. и матем. статист. **5** (1971), 71–80.
6. О. О. Курченко, *Одна сильно консистентна оцінка параметра Хюрста дробового броунівського руху*, Теорія ймовір. та матем. статист. **67** (2002), 45–54.
7. О. О. Курченко, *Теорема бакстерівського типу для строго субгауссових випадкових полів*, Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка. Математика. Механіка **5** (2009), 35–38.
8. Р. Є. Майборода, *Асимптотична нормальність бакстерівських оцінок параметрів нестаціонарних процесів*, Теорія ймовір. та матем. статист. **53** (1995), 97–102.
9. Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, т. 1, "Наука", Москва, 1969.
10. G. Baxter, *A strong limit theorem for Gaussian processes*, Proc. Amer. Math. Soc. **7** (1956), no. 3, 522–527.
11. S. M. Berman, *A version of Levy–Baxter theorem for Gaussian processes*, Proc. Amer. Math. Soc. **18** (1967), 1051–1055.
12. J-C. Breton, I. Nourdin, and G. Peccati, *Exact confidence intervals for the Hurst parameter of a fractional Brownian motion*, Electronic Journal of Statistics **3** (2009), 416–425.
13. K. Dzhaparidze and J. H. van Zanten, *A series expansion of fractional Brownian motion*, Probability Theory and Related Fields **130** (2004), no. 1, 39–55.
14. T. Kawada, *The Levy–Baxter theorem for Gaussian random fields*, Proc. Amer. Math. Soc. **53** (1975), 463–469.
15. Y. V. Kozachenko and O. O. Kurchenko, *Levy–Baxter theorems for one class of non-Gaussian stochastic processes*, Random Oper. Stoch. Equ. **4** (2011), 313–326.
16. P. Levy, *Le mouvement Brownian plan*, Amer J. Math. **62** (1940), 487–550.

Кафедра теорії ймовірностей та математичної статистики, механіко-математичний факультет, Київський Національний університет ім. Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 6, Київ 03127, Україна

Адреса електронної пошти: olja_sunjavska@ua.fm.

Надійшла 07/11/2012