УДК 519.21

Б. В. Довгай (Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ГІПЕРБОЛІЧНЕ РІВНЯННЯ З ОРЛІЧЕВОЮ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ

A nonhomogeneous hyperbolic equation with zero initial and boundary conditions and Orlicz right side is considered. The conditions for existence of solution of this problem in the form of uniformly convergent in probability series are found.

Розглядається неоднорідне гіперболічне рівняння з нульовими початковими і граничними умовами та Орлічевою правою частиною. Отримані умови існування розв'язку цієї задачі у вигляді рівномірно збіжного за ймовірністю ряду.

1. Вступ. Робота присвячена крайовій задачі математичної фізики для неоднорідного гіперболічного рівняння з випадковою строго Орлічевою правою частиною та нульовими початковими і граничними умовами. В [1] були отримані умови існування розвязку такої задачі для рівняння з φ-субгауссовою правою частиною. В цій роботі знаходяться достатні умови існування з імовірністю одиниця розв'язку гіперболічного рівняння зі строго Орлічевим випадковим полем в правій частині, який можна зобразити у вигляді двічі неперервно диференційовного рівномірно збіжного за ймовірністю ряду.

2. Випадкові процеси з простору Орліча.

Означення 1 ([2]). *Парна неперервна опукла функція $U(x)$ називається $\mathbb{C}$-функцією, якщо $U(0)=0$ і $U(x)$ зростає при $x>0$.*

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ – стандартний імовірнісний простір.

Означення 2 ([2]). *Простором Орліча $L_U(\Omega)$ випадкових величин, породженим $\mathbb{C}$-функцією $U(x)$, називається такий простір випадкових величин $\xi=\xi(\omega)$, $\omega\in\Omega$, що для кожної $\xi\in L_U(\Omega)$ існує така константа r_ξ, що $\mathsf{E}U\left(\frac{\xi}{r_\xi}\right)<\infty$.*

Простір Орліча $L_U(\omega)$ є банаховим простором відносно норми

$$\|\xi\|_{L_U}=\inf\left\{r>0:\ \mathsf{E}U\left(\frac{\xi}{r}\right)\le 1\right\}.$$

Означення 3 ([2]). *Випадковий процес $X=\{X(t),\ t\in T\}$, де T – деяка параметрична множина, належить простору Орліча $L_U(\Omega)$, якщо для всіх $t\in T$ випадкова величина $X(t)$ належить $L_U(\Omega)$.*

Лема 1 ([2]). *Якщо $\xi\in L_U(\Omega)$, то для будь-якого $x>0$ виконується нерівність*

$$\mathrm{P}\left\{|\xi|\ge x\right\}\le\frac{1}{U\left(\frac{x}{\|\xi\|_{L_U}}\right)}.$$

Означення 4 ([2]). *$\mathbb{C}$-функція $U(x)$ підпорядкована $\mathbb{C}$-функції $V(x)$ ($U\prec V$), якщо існують $x_0\ge 0$ та $C>0$ такі, що при $|x|>x_0$ має місце нерівність $U(x)\le V(Cx)$.*

Означення 5 ([3]). *Нехай $U(x)$ – така $\mathbb{C}$-функція, що $V(x) = x^2$ підпорядкована функції $U(x)$. Сім'я Δ випадкових величин ξ, $\mathsf{E}\xi = 0$, з простору Орліча $L_U(\Omega)$ називається строго Орлічевою, якщо існує стала C_Δ така, що для скінченної кількості випадкових величин $\xi_i \in \Delta$, $i \in I$ та для будь-яких $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i \in I$ виконується нерівність*

$$\left\|\sum_{i\in I}\lambda_i\xi_i\right\|_{L_U} \le C_\Delta\left(\mathsf{E}\left(\sum_{i\in I}\lambda_i\xi_i\right)^2\right)^{1/2}.$$

Зауваження 1 ([3]). *Стала C_Δ називається визначальною сталою сім'ї Δ.*

Зауваження 2 ([3]). *Оскільки $\mathbb{C}$-функція $V(x) = x^2$ підпорядкована функції $U(x)$, то існує така стала $B > 0$, що виконується нерівність*

$$\left(\mathsf{E}\left(\sum_{i\in I}\lambda_i\xi_i\right)^2\right)^{1/2} \le B\left\|\sum_{i\in I}\lambda_i\xi_i\right\|_{L_U}.$$

Теорема 1 ([3]). *Нехай Δ – строго Орлічева сім'я випадкових величин. Тоді лінійне замикання сім'ї Δ в просторі $L_U(\Omega)$ є строго Орлічевою сім'єю з тією ж самою визначальною сталою.*

Означення 6 ([3]). *Випадковий процес $X = \{X(t),\ t \in T\}$ з простору Орліча $L_U(\Omega)$ називається строго Орлічевим, якщо сім'я випадкових величин $\{X(t),\ t \in T\}$ є строго Орлічевою.*

Теорема 2. *Нехай (T_1, O_1, μ_1), (T_2, O_2, μ_2) — вимірні простори з σ-скінченими мірами, $T = T_1 \times T_2$, $O = O_1 \times O_2$, $\mu = \mu_1 \times \mu_2$. Нехай $X = \{X(t_1, t_2), (t_1, t_2) \in T\}$ — строго Орлічевий випадковий процес, $f(t_1, t_2)$, $(t_1, t_2) \in T$ — вимірна функція в (T, O, μ). Нехай для кожного $t_1 \in T_1$ існує інтеграл в середньому квадратичному*

$$\xi(t_1) = \int_T f(t_1, t_2)X(t_1, t_2)d\mu_2(t_2).$$

Тоді випадковий процес $\xi(t_1)$, $t_1 \in T_1$ є строго Орлічевим випадковим процесом з тією ж самою визначальною сталою.

Теорема 2 випливає з теореми 1.

Означення 7 ([2]). *Будемо говорити, що $\mathbb{C}$-функція U задовольняє g-умову, якщо існують такі сталі $z_0 \ge 0$, $K > 0$, $A > 0$, що для всіх $x \ge z_0$, $y \ge z_0$ виконується нерівність*

$$U(x)U(y) \le AU(Kxy).$$

Теорема 3 ([4]). *Нехай $\mathbb{R}^k$ — k-вимірний простір, $d(t, s) = \max_{1\le i\le k} |t_i - s_i|$, $T = \{0 \le t_i \le T_i,\ i = 1, 2, \dots, k\}$, $T_i > 0$, $X_n = \{X_n(t), t \in T\}$, $n \ge 1$ – послідовність випадкових процесів, що належать простору Орліча $L_U(\Omega)$, де для функції U виконується g-умова. Нехай виконуються умови:*

1) $X_n(t) \to X(t)$ *при* $t \in T$ *та* $n \to \infty$ *за ймовірністю.*

2)

$$\sup_{n=\overline{1,\infty}} \sup_{d(t,s)\le h} \|X_n(t) - X_n(s)\|_{L_U} \le \sigma(h),$$

де $\sigma = \{\sigma(h),\ h > 0\}$ *– така неперервна монотонно зростаюча функція, що* $\sigma(h) \to 0$ *при* $h \to 0$.

3) *для деякого* $\varepsilon > 0$*:*

$$\int_0^{\varepsilon} U^{(-1)}\left(\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{T_i}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1\right)\right) du < \infty,$$

де $\sigma^{(-1)}(u)$ *— функція, обернена до* $\sigma(u)$.

Тоді процеси $X_n(t)$ *неперервні з імовірністю одиниця та збігаються за ймовірністю в просторі Банаха неперервних функцій з рівномірною нормою* $C(T)$.

3. Гіперболічне рівняння зі строго Орлічевою випадковою правою частиною.

Нехай $T > 0$ — деяка стала, функції $p(x)$ та $\rho(x),\ x \in [0,\pi]$ —двічі неперервно диференційовні, $p(x) > 0,\ \rho(x) > 0$; $q(x),\ x \in [0,\pi]$ – неперервно диференційовна функція така, що $q(x) \ge 0,\ \xi(x,t),\ x \in [0,\pi],\ t \in [0,T]$ — вибірково неперервне з імовірністю 1 випадкове поле.

Розглянемо першу крайову задачу для неоднорідного гіперболічного рівняння з нульовими початковими та крайовими умовами

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x)u - \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\rho(x)\xi(x,t),\ x \in [0,\pi],\ t \in [0,T] \qquad (1)$$

$$u|_{t=0} = 0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0; \qquad (2)$$

$$u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=\pi} = 0. \qquad (3)$$

Розглянемо задачу Штурма-Ліувілля

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{dX}{dx}\right) - qX + \lambda\rho X = 0, \qquad (4)$$

$$X(0) = X(\pi) = 0. \qquad (5)$$

Нехай $X_n(x)$ — ортонормовані з вагою ρ власні функції цієї задачі, а λ_n — відповідні власні значення. Будемо вважати, що λ_n занумеровані в порядку зростання. Завдяки обмеженням на $p,\ q,\ \rho$ всі власні значення додатні і нуль не є власним значенням [5].

Позначимо $\mu_n = \sqrt{\lambda_n}$.

Теорема 4 ([1]). *Для того, щоб з імовірністю 1 існував розв'язок задачі* $(1)-(3)$ *в області* $0 \le x \le \pi$, $0 \le t \le T$ *($T > 0$ — деяка константа), який можна зобразити у вигляді неперервно диференційовного ряду (один та два рази по x і один та два рази по t)*

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \frac{1}{\mu_n} \int_0^t \sin \mu_n (t-u) \zeta_n(u)\, du, \tag{6}$$

де

$$\zeta_n(t) = \int_0^{\pi} \xi(x,t) X_n(x) \rho(x)\, dx, \tag{7}$$

так щоб збігалися рівномірно за ймовірністю в області $[0,\pi]\times[0,T]$ *ряд* $u(x,t)$, *а також ряди, отримані почленним диференціюванням ряду* $u(x,t)$ *один та два рази по x і один та два рази по t, тобто ряди*

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \int_0^t \cos \mu_n (t-u) \zeta_n(u) du, \tag{8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n'(x) \frac{1}{\mu_n} \int_0^t \sin \mu_n (t-u) \zeta_n(u) du, \tag{9}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \left[\zeta_n(t) - \mu_n \int_0^t \sin \mu_n (t-u) \zeta_n(u) du \right], \tag{10}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n''(x) \frac{1}{\mu_n} \int_0^t \sin \mu_n (t-u) \zeta_n(u) du, \tag{11}$$

достатньо, щоб рівномірно за ймовірністю в області $[0,\pi]\times[0,T]$ *збігалися ряди*

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \zeta_n(t), \tag{I}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n X_n(x) \int_0^t \zeta_n(u) \sin \mu_n (t-u) du. \tag{II}$$

Лема 2. *Існує стала $L > 0$ така, що*

$$|X_k(x_1) - X_k(x_2)| \le L\mu_k^2 |x_1 - x_2|, \ x_1, \ x_2 \in [0,\pi].$$

Доведення. Згідно припущень на функції p, q, ρ [5] власні функції $X_n(x)$ та власні числа λ_n є власними функціями та власними числами інтегрального рівняння

$$X(x) = \lambda \int_0^{\pi} G(x,s) \rho(s) X(s) ds, \tag{12}$$

де $G(x,s)$ — функція впливу крайової задачі

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{dX}{dx}\right)-qX=0,$$
$$X(0)=X(\pi)=0,$$

визначена рівністю $G(x,s)=\begin{cases}\frac{1}{\Delta}u(x)v(s), & x\le s;\\ \frac{1}{\Delta}u(s)v(x), & x\ge s.\end{cases}$ Тут Δ — деяка стала, а $u(x)$, $v(x)$ — двічі неперервно диференційовні функції.

Тобто

$$X_k(x)=\mu_k^2\int\limits_0^\pi G(x,s)\rho(s)X_k(s)ds.$$

Тоді

$$|X_k(x_1)-X_k(x_2)|=\left|\mu_k^2\int\limits_0^\pi\left(G(x_1,s)-G(x_2,s)\right)\rho(s)X_k(s)ds\right|\le$$

$$\le\mu_k^2\int\limits_0^\pi\left|G(x_1,s)-G(x_2,s)\right||\rho(s)||X_k(s)|ds\le\mu_k^2C_XC_\rho\int\limits_0^\pi\left|G(x_1,s)-G(x_2,s)\right|ds,$$

де

$$C_X=\sup_{k\ge1}\sup_{0\le x\le\pi}|X_k(x)|,\ C_\rho=\sup_{0\le x\le\pi}|\rho(x)|.$$

Позначимо

$$C_v'=\sup_{0\le x\le\pi}|v'(x)|,\ C_u'=\sup_{0\le x\le\pi}|u'(x)|,\ C_v=\sup_{0\le x\le\pi}|v(x)|,\ C_u=\sup_{0\le x\le\pi}|u(x)|.$$

Нехай для визначеності $0\le x_2\le x_1\le\pi$.

Розглянемо інтеграл

$$I=\int\limits_0^\pi|G(x_1,s)-G(x_2,s)|ds=I_1+I_2+I_3,$$

де

$$I_1=\int\limits_0^{x_2}|G(x_1,s)-G(x_2,s)|ds,$$
$$I_2=\int\limits_{x_2}^{x_1}|G(x_1,s)-G(x_2,s)|ds,$$
$$I_3=\int\limits_{x_1}^{\pi}|G(x_1,s)-G(x_2,s)|ds.$$

Маємо

$$I_1 = \frac{1}{|\Delta|}\int\limits_0^{x_2} |u(s)(v(x_1)-v(x_2))|ds \leq \frac{1}{|\Delta|}\int\limits_0^{x_2} C_uC_v'|x_1-x_2|ds \leq$$

$$\leq \frac{\pi}{|\Delta|}C_uC_v'|x_1-x_2|,$$

$$I_2 = \frac{1}{|\Delta|}\int\limits_{x_2}^{x_1} |u(s)v(x_1)-u(x_2)v(s))|ds \leq \frac{1}{|\Delta|}\int\limits_{x_2}^{x_1} 2C_uC_v ds \leq \frac{2C_uC_v}{|\Delta|}|x_1-x_2|,$$

$$I_3 = \frac{1}{|\Delta|}\int\limits_{x_1}^{\pi} |v(s)(u(x_1)-u(x_2))|ds \leq \frac{\pi}{|\Delta|}C_vC_u'|x_1-x_2|.$$

Тобто

$$I \leq K|x_1-x_2|,$$

де

$$K = \frac{C_uC_v' + 2C_uC_v + C_vC_u'}{|\Delta|}.$$

Зрозуміло, що ця нерівність має місце і при $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \pi$.

Тоді для всіх $x_1,\ x_2 \in [0,\pi]$:

$$|X_k(x_1) - X_k(x_2)| \leq L\mu_k^2|x_1-x_2|,$$

де

$$L = KC_XC_\rho = \frac{C_uC_v' + 2C_uC_v + C_vC_u'}{|\Delta|}C_XC_\rho.$$

Лема 3 ([4])**.** *Нехай функція $Z_\lambda(u),\ \lambda > 0,\ u \in [0,+\infty)$ задовольняє умови:*

1) Існує стала $B > 0$ така, що $\sup\limits_{u\in[0,+\infty)} |Z_\lambda(u)| \leq B$.

2) Існує стала $C > 0$ така, що для всіх $u, v \in [0,+\infty)$:

$$|Z_\lambda(u) - Z_\lambda(v)| \leq C\lambda|u-v|.$$

Нехай $\varphi(\lambda),\ \lambda > 0$ – неперервна зростаюча функція, $\varphi(\lambda) > 0$ при всіх $\lambda > 0$, $\varphi(\lambda) \to \infty,\ \lambda \to \infty$, така, що функція $\dfrac{\lambda}{\varphi(\lambda)}$ є зростаючою при $\lambda > v_0$, де стала $v_0 \geq 0$.

Тоді для всіх $v > 0$ та $u > 0$ виконується наступна нерівність

$$|Z_\lambda(u) - Z_\lambda(v)| \leq \max\{C, 2B\}\frac{\varphi(\lambda+v_0)}{\varphi\left(\frac{1}{|u-v|}+v_0\right)}.$$

Лема 4. *Нехай в* (1)–(3) $\xi(x,t)$ *– центроване строго Орлічеве випадкове поле з простору* $L_U(\Omega)$, *вибірково неперервне з імовірністю одиниця,* U *задовольняє* g*-умову. Якщо*

$$C_{k,m}=\sup_{\substack{0\le t\le T\\ 0\le s\le T}}|\mathsf{E}\zeta_k(t)\zeta_m(s)|,$$

де $\zeta_k(t)$ *визначено в* (7), *та збігається ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}C_{k,m}\mu_k\mu_m\varphi(\mu_k^2+v_0)\varphi(\mu_m^2+v_0)<\infty,$$

то

$$\sup_{n\ge1}\sup_{\substack{|t-s|\le h\\ |x-y|\le h\\ x,y\in[0,\pi]\\ t,s\in[0,T]}}\left(\mathsf{E}\left|S_n^{II}(x,t)-S_n^{II}(y,s)\right|^2\right)^{1/2}\le F_1\left(\varphi\left(\frac{1}{h}+v_0\right)\right)^{-1},$$

де

$$S_n^{II}(x,t)=\sum_{k=1}^{n}\mu_kX_k(x)\int\limits_0^t\zeta_k(u)\sin\mu_k(t-u)du$$

є частковими сумами ряду (II),

$$F_1=T\max\{L,2C_X\}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\mu_k\mu_mC_{k,m}\varphi(\mu_k^2+v_0)\varphi(\mu_m^2+v_0)\right)^{1/2}+ \tag{13}$$

$$+C_X\Bigg(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\mu_k\mu_mC_{k,m}\big(4T^2\varphi(\mu_k+v_0)\varphi(\mu_m+v_0)+$$
$$+2T\max\{1,2T\}\varphi(\mu_k+v_0)\varphi(1+v_0)$$
$$+2T\max\{1,2T\}\varphi(\mu_m+v_0)\varphi(1+v_0)+(\max\{1,2T\})^2\varphi^2(1+v_0)\big)\Bigg)^{1/2},$$

C_X, L *– сталі визначені в лемі 2,* $\varphi(\lambda)$, $\lambda>0$ *– неперервна зростаюча функція,* $\varphi(\lambda)>0$ *при всіх* $\lambda>0$, $\varphi(\lambda)\to\infty$, $\lambda\to\infty$, *така, що функція* $\dfrac{\lambda}{\varphi(\lambda)}$ *є зростаючою при* $\lambda>v_0$, *де стала* $v_0\ge0$.

Доведення. Для $|t-s|\le h$, $|x-y\le h$, $n\ge1$ виконується наступне нерівність

$$\left(\mathsf{E}\left|\sum_{k=1}^{n}\mu_kX_k(x)\int\limits_0^t\zeta_k(u)\sin\mu_k(t-u)du-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\sum_{k=1}^{n}\mu_kX_k(y)\int\limits_0^s\zeta_k(u)\sin\mu_k(s-u)du\right|^2\right)^{1/2}=$$

$$= \Bigg(\mathsf{E} \Bigg| \sum_{k=1}^{n} \mu_k (X_k(x) - X_k(y)) \int\limits_0^t \zeta_k(u) \sin \mu_k (t-u) du +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \mu_k X_k(y) \left(\int\limits_0^t \zeta_k(u) \sin \mu_k (t-u) du - \int\limits_0^s \zeta_k(u) \sin \mu_k (s-u) du \right) \Bigg|^2 \Bigg)^{1/2} \leq$$

$$\leq A_1 + A_2,$$

де

$$A_1 = \left(\mathsf{E} \left| \sum_{k=1}^{n} \mu_k (X_k(x) - X_k(y)) \int\limits_0^t \zeta_k(u) \sin \mu_k (t-u) du \right|^2 \right)^{1/2} =$$

$$A_2$$

$$= \left(\mathsf{E} \left| \sum_{k=1}^{n} \mu_k X_k(y) \left(\int\limits_0^t \zeta_k(u) \sin \mu_k (t-u) du - \int\limits_0^s \zeta_k(u) \sin \mu_k (s-u) du \right) \right|^2 \right)^{1/2}.$$

Позначимо

$$R_{k,m}(t,s) = \int\limits_0^t \int\limits_0^s \sin \mu_k (t-u) \sin \mu_m (s-v) \mathsf{E} \zeta_k(u) \zeta_m(v) dv du.$$

Тоді

$$A_1^2 \leq \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \mu_k \mu_m |X_k(x) - X_k(y)| |X_m(x) - X_m(y)| |R_{k,m}|.$$

З лем 2, 3 випливає, що

$$|X_k(x) - X_k(y)| \leq \max\{L, 2C_x\} \frac{\varphi(\mu_k^2 + v_0)}{\varphi\left(\frac{1}{|x-y|} + v_0\right)}.$$

Крім того,

$$|R_{k,m}(t,s)| \leq C_{k,m} \int\limits_0^t \int\limits_0^s |\sin \mu_k (t-u) \sin \mu_m (s-v)| dv du \leq T^2 C_{k,m}.$$

Отже,

$$A_1^2 \leq T^2 (\max\{L, 2C_X\})^2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \mu_k \mu_m C_{k,m} \varphi(\mu_k^2 + v_0) \varphi(\mu_m^2 + v_0) \left(\varphi\left(\frac{1}{h} + v_0\right) \right)^{-2},$$

$$A_2^2 \leq \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \mu_k \mu_m |X_k(y)| |X_m(y)| \times$$

$$\times \Bigg| \mathsf{E} \left(\int\limits_0^t \zeta_k(u) \sin \mu_k (t-u) du - \int\limits_0^s \zeta_k(u) \sin \mu_k (s-u) du \right) \times$$

$$\times\left(\int_0^t \zeta_m(v)\sin\mu_m(t-v)dv - \int_0^s \zeta_m(v)\sin\mu_m(s-v)dv\right)\Bigg|.$$

Нехай для визначеності $s \le t$. Тоді

$$\int_0^t \zeta_k(u)\sin\mu_k(t-u)du - \int_0^s \zeta_k(u)\sin\mu_k(s-u)du =$$

$$= \int_0^s \zeta_k(u)\left(\sin\mu_k(t-u) - \sin\mu_k(s-u)\right)du + \int_s^t \zeta_k(u)\sin\mu_k(t-u)du.$$

Отже,

$$A_2^2 \le C_X^2 \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \mu_k\mu_m d_{k,m}(s,t),$$

де

$$d_{k,m}(s,t) =$$

$$= \Bigg|\mathsf{E}\left(\int_0^s \zeta_k(u)(\sin\mu_k(t-u) - \sin\mu_k(s-u))du + \int_s^t \zeta_k(u)\sin\mu_k(t-u)du\right)\times$$

$$\times\left(\int_0^s \zeta_m(v)(\sin\mu_m(t-v) - \sin\mu_m(s-v))dv + \int_s^t \zeta_m(v)\sin\mu_m(t-v)dv\right)\Bigg| \le$$

$$\le \int_0^s\int_0^s |\mathsf{E}\zeta_k(u)\zeta_m(v)||\sin\mu_k(t-u) - \sin\mu_k(s-u)|\times$$

$$\times|\sin\mu_m(t-v) - \sin\mu_m(s-v)|dvdu+$$

$$+\int_0^s\int_s^t |\mathsf{E}\zeta_k(u)\zeta_m(v)||\sin\mu_k(t-u) - \sin\mu_k(s-u)||\sin\mu_m(t-v)|dvdu+$$

$$+\int_s^t\int_0^s |\mathsf{E}\zeta_k(u)\zeta_m(v)||\sin\mu_k(t-u)||\sin\mu_m(t-v) - \sin\mu_m(s-v)|dvdu+$$

$$+\int_s^t\int_s^t |\mathsf{E}\zeta_k(u)\zeta_m(v)||\sin\mu_k(t-u)||\sin\mu_m(t-v)|dvdu.$$

За лемою 3 ($Z_1(u) = u,\ u \in [0,T],\ \lambda = 1,\ C = 1,\ B = T$):

$$\int_s^t |\sin\mu_k(t-u)|du \le |t-s| \le \max\{1, 2T\}\frac{\varphi(1+v_0)}{\varphi\left(\frac{1}{|t-s|} + v_0\right)}.$$

Крім того,

$$|\sin\mu_k(t-u)-\sin\mu_k(s-u)|\leq 2\left|\sin\frac{\mu_k}{2}(t-s)\right|\leq \mu_k|t-s|.$$

Тому за лемою 3 ($Z_{\mu_k}(t)=\sin\mu_k(t-u),\ B=1,\ \lambda=\mu_k,\ C=1$):

$$|\sin\mu_k(t-u)-\sin\mu_k(s-u)|\leq 2\frac{\varphi(\mu_k+v_0)}{\varphi\left(\frac{1}{|t-s|}+v_0\right)}$$

Отже,

$$\int\limits_0^s|\sin\mu_k(t-u)-\sin\mu_k(s-u)|du\leq 2T\frac{\varphi(\mu_k+v_0)}{\varphi\left(\frac{1}{|t-s|}+v_0\right)}.$$

Тоді

$$d_{k,m}(s,t)\leq C_{k,m}\big(4T^2\varphi(\mu_k+v_0)\varphi(\mu_m+v_0)+2T\max\{1,2T\}\varphi(\mu_k+v_0)\varphi(1+v_0)+$$
$$+2T\max\{1,2T\}\varphi(\mu_m+v_0)\varphi(1+v_0)+(\max\{1,2T\})^2\varphi^2(1+v_0)\big)\frac{1}{\varphi^2\left(\frac{1}{|t-s|}+v_0\right)}.$$

Зрозуміло, що для $t\geq s$ така нерівність теж виконується. Отже,

$$A_2^2\leq C_X^2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}C_{k,m}\mu_k\mu_m\big(4T^2\varphi(\mu_k+v_0)\varphi(\mu_m+v_0)+$$
$$+2T\max\{1,2T\}\varphi(\mu_k+v_0)\varphi(1+v_0)+$$
$$+2T\max\{1,2T\}\varphi(\mu_m+v_0)\varphi(1+v_0)+(\max\{1,2T\})^2\varphi^2(1+v_0)\big)\frac{1}{\varphi^2\left(\frac{1}{h}+v_0\right)}.$$

Лема 5. *Нехай $\xi(x,t)$ – центроване строго Орлічеве випадкове поле з простору $L_U(\Omega)$ з визначальною сталою C_Δ, вибірково неперервне з імовірністю одиниця, U задовольняє g-умову. Нехай $\varphi(x)$ – функція, для якої виконуються умови леми 3. Припустимо збігається ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}C_{k,m}\mu_k\mu_m\varphi(\mu_k^2+v_0)\varphi(\mu_m^2+v_0)<\infty,\qquad(14)$$

і крім того виконується умова: для довільного $\varepsilon>0$

$$\int\limits_0^{\varepsilon}U^{(-1)}\left(\left(\frac{\pi}{2}\left(\varphi^{(-1)}\left(\frac{C_\Delta F_1}{v}\right)-v_0\right)+1\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{T}{2}\left(\varphi^{(-1)}\left(\frac{C_\Delta F_1}{v}\right)-v_0\right)+1\right)\right)dv<\infty,\qquad(15)$$

де F_1 задана (13).

Тоді ряд (II) *збігається рівномірно за ймовірністю в області* $[0,\pi]\times[0,T]$, *$T>0$ – довільна стала.*

Доведення. Згідно з теоремами 1, 2 всі суми $S_n^{II}(x,t)$ є строго Орлічевими випадковими полями з тою ж визначальною сталою C_Δ, тому

$$\left\|S_n^{II}(x,t)-S_n^{II}(y,s)\right\|_{L_U}\le C_\Delta\left(\mathsf{E}\left(S_n^{II}(x,t)-S_n^{II}(y,s)\right)^2\right)^{1/2}.$$

Розглянемо ряд

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\mu_n\mu_k X_n(x)X_k(x)\int_0^t\int_0^t \sin\mu_n(t-u)\sin\mu_k(t-v)\mathsf{E}\zeta_n(u)\zeta_k(v)dvdu\right|\le$$

$$\le\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\mu_n\mu_k|X_n(x)||X_k(x)|\int_0^t\int_0^t|\sin\mu_n(t-u)\sin\mu_k(t-v)||\mathsf{E}\zeta_n(u)\zeta_k(v)|dvdu\le$$

$$\le C_X^2T^2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\mu_n\mu_k C_{n,k}<\infty$$

за умовою (14).

Із збіжності цього ряду випливає збіжність ряду (II), тобто збіжність послідовності $\{S_n^{II}(x,t)\}$ в середньому квадратичному, а отже і за ймовірністю при всіх $(x,t)\in[0,\pi]\times[0,T]$. Отже виконується умова 1 теореми 3.

З леми 4 випливає виконання умови 2 теореми 3 для

$$\sigma_{II}(h)=C_\Delta F_1\left(\varphi\left(\frac{1}{h}+v_0\right)\right)^{-1}.$$

І, нарешті, умова (15) забезпечує виконання умови 3 теореми 3, оскільки

$$\sigma_{II}^{(-1)}(t)=\frac{1}{\varphi^{(-1)}\left(\frac{C_\Delta F_1}{t}\right)-v_0}.$$

Тому твердження леми 5 випливає з теореми 3.

Лема 6. *Нехай*

$$C_{k,m}=\sup_{\substack{0\le t\le T\\0\le s\le T}}|\mathsf{E}\zeta_k(t)\zeta_m(s)|,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}C_{k,m}\varphi(\mu_k^2+v_0)\varphi(\mu_m^2+v_0)<\infty.$$

Припустимо існують такі сталі $b_{k,m}>0$, для яких виконується умова

$$\left|\mathsf{E}\big(\zeta_k(t)-\zeta_k(s)\big)\big(\zeta_m(t)-\zeta_m(s)\big)\right|\le b_{k,m}\varphi^{-2}\left(\frac{1}{|t-s|}+v_0\right)$$

та

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}b_{k,m}<\infty.$$

Тоді

$$\sup_{n\geq 1}\sup_{\substack{|t-s|\leq h\\|x-y|\leq h\\x,y\in[0,\pi]\\t,s\in[0,T]}}\left(\mathsf{E}\left|S_n^I(x,t)-S_n^I(y,s)\right|^2\right)^{1/2}\leq F_2\left(\varphi\left(\frac{1}{h}+v_0\right)\right)^{-1},$$

де

$$S_n^I(x,t)=\sum_{k=1}^{n}X_k(x)\zeta_k(t)$$

є частковими сумами ряду (I),

$$F_2=\max\{L,2C_X\}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}C_{k,m}\varphi(\mu_k^2+v_0)\varphi(\mu_m^2+v_0)\right)^{1/2}+ \tag{16}$$

$$+C_X\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}b_{k,m}\right)^{1/2},$$

C_X, L – сталі визначені в лемі 2, $\varphi(\lambda)$, $\lambda>0$ – неперервна зростаюча функція, $\varphi(\lambda)>0$ при всіх $\lambda>0$, $\varphi(\lambda)\to\infty$, $\lambda\to\infty$, така, що функція $\dfrac{\lambda}{\varphi(\lambda)}$ є зростаючою при $\lambda>v_0$, де стала $v_0\geq 0$.

Доведення. Нехай $|t-s|\leq h$, $|x-y|\leq h$, $n\geq 1$. Тоді

$$\left(\mathsf{E}\left|\sum_{k=1}^{n}X_k(x)\zeta_k(t)-\sum_{k=1}^{n}X_k(y)\zeta_k(s)\right|^2\right)^{1/2}=$$

$$=\left(\mathsf{E}\left|\sum_{k=1}^{n}\big(X_k(x)-X_k(y)\big)\zeta_k(t)+\sum_{k=1}^{n}X_k(y)\big(\zeta_k(t)-\zeta_k(s)\big)\right|^2\right)^{1/2}\leq B_1+B_2,$$

де

$$B_1=\left(\mathsf{E}\left|\sum_{k=1}^{n}\big(X_k(x)-X_k(y)\big)\zeta_k(t)\right|\right)^{1/2},\quad B_2=\left(\mathsf{E}\left|\sum_{k=1}^{n}X_k(y)\big(\zeta_k(t)-\zeta_k(s)\big)\right|^2\right)^{1/2}.$$

Маємо

$$B_1^2=\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\big(X_k(x)-X_k(y)\big)\big(X_m(x)-X_m(y)\big)\mathsf{E}\zeta_k(t)\zeta_m(t)\leq$$

$$\leq\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\big|X_k(x)-X_k(y)\big|\big|X_m(x)-X_m(y)\big|C_{k,m}\leq$$

$$\leq (\max\{L, 2C_X\})^2 \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} C_{k,m}\varphi(\mu_k^2+v_0)\varphi(\mu_m^2+v_0)\varphi^{-2}\left(\frac{1}{h}+v_0\right),$$

$$B_2^2 \leq \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} |X_k(y)||X_m(y)|\left|\mathsf{E}\big(\zeta_k(t)-\zeta_k(s)\big)\big(\zeta_m(t)-\zeta_m(s)\big)\right| \leq$$

$$\leq C_X^2 \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} b_{k,m}\varphi^{-2}\left(\frac{1}{h}+v_0\right).$$

Лема 7. *Нехай $\xi(x,t)$ – центроване строго Орлічеве випадкове поле з простору $L_U(\Omega)$ з визначальною сталою C_Δ, вибірково неперервне з імовірністю одиниця, U задовольняє g-умову. Нехай $\varphi(x)$ – функція, для якої виконуються умови леми 3. Припустимо збігається ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} C_{k,m}\varphi(\mu_k^2+v_0)\varphi(\mu_m^2+v_0) < \infty \tag{17}$$

і крім того виконується умова: для довільного $\varepsilon > 0$

$$\int_0^{\varepsilon} U^{(-1)}\Bigg(\left(\frac{\pi}{2}\left(\varphi^{(-1)}\left(\frac{C_\Delta F_2}{v}\right)-v_0\right)+1\right)\times$$
$$\times\left(\frac{T}{2}\left(\varphi^{(-1)}\left(\frac{C_\Delta F_2}{v}\right)-v_0\right)+1\right)\Bigg)dv < \infty, \tag{18}$$

де F_2 задана (16),
та існують такі сталі $b_{k,m} > 0$, що

$$\left|\mathsf{E}\big(\zeta_k(t)-\zeta_k(s)\big)\big(\zeta_m(t)-\zeta_m(s)\big)\right| \leq b_{k,m}\varphi^{-2}\left(\frac{1}{|t-s|}+v_0\right)$$

і

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} b_{k,m} < \infty.$$

Тоді ряд (I) *збігається рівномірно за ймовірністю в області* $[0,\pi]\times[0,T]$*,* $T>0$ *– довільна стала.*

Доведення. Лема 7 випливає з теореми 3 та леми 6, оскільки

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} X_k(x)X_m(x)\mathsf{E}\zeta_k(t)\zeta_m(s)\right| \leq C_X^2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} C_{k,m} < \infty$$

за умовою (17), а для

$$\sigma_I(h) = C_\Delta F_2\left(\varphi\left(\frac{1}{h}+v_0\right)\right)^{-1}$$

обернена

$$\sigma_I^{(-1)}(t) = \frac{1}{\varphi^{(-1)}\left(\frac{C_\Delta F_2}{t}\right)-v_0}$$

і умова (18) забезпечує виконання умови 3 теореми 3.

Теорема 5. *Нехай в (1) $\xi(x,t)$ – центроване строго Орлічеве випадкове поле з простору $L_U(\Omega)$ з визначальною сталою C_Δ, вибірково неперервне з імовірністю одиниця, U задовольняє g-умову. Нехай $\varphi(\lambda)$, $\lambda > 0$ – неперервна зростаюча функція, $\varphi(\lambda) > 0$ при всіх $\lambda > 0$, $\varphi(\lambda) \to \infty$, $\lambda \to \infty$, така, що функція $\dfrac{\lambda}{\varphi(\lambda)}$ є зростаючою при $\lambda > v_0$, де стала $v_0 \geq 0$. Припустимо виконуються умови:*

1) *Збігається ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} C_{k,m}\mu_k\mu_m\varphi(\mu_k^2+v_0)\varphi(\mu_m^2+v_0) < \infty,$$

де

$$C_{k,m} = \sup_{\substack{0\leq t\leq T\\ 0\leq s\leq T}} |\mathsf{E}\zeta_k(t)\zeta_m(s)|,$$

$$\zeta_k(t) = \int\limits_0^\pi \xi(x,t)X_k(x)\rho(x)\,dx.$$

2) *Для довільного $\varepsilon > 0$*

$$\int\limits_0^\varepsilon U^{(-1)}\Bigg(\left(\frac{\pi}{2}\left(\varphi^{(-1)}\left(\frac{F_3}{v}\right)-v_0\right)+1\right)$$
$$\times\left(\frac{T}{2}\left(\varphi^{(-1)}\left(\frac{F_3}{v}\right)-v_0\right)+1\right)\Bigg)dv < \infty,$$

де $F_3 = C_\Delta \max\{F_1, F_2\}$, F_1 та F_2 визначені (13) та (16).

3) *Існують такі сталі $b_{k,m} > 0$, що*

$$\left|\mathsf{E}\big(\zeta_k(t)-\zeta_k(s)\big)\big(\zeta_m(t)-\zeta_m(s)\big)\right| \leq b_{k,m}\varphi^{-2}\left(\frac{1}{|t-s|}+v_0\right)$$

і

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} b_{k,m} < \infty.$$

Тоді ряд (6) збігається рівномірно за ймовірністю в області $[0,\pi]\times[0,T]$ ($T > 0$ – деяка стала), рівномірно за ймовірністю збігаються ряди (8)-(11) отримані з (6) почленним диференціюванням один та два рази по t і один та два рази по x та з імовірністю одиниця задача (1)–(3) має розв'язок, який можна зобразити у вигляді ряду (6).

Доведення. Твердження теореми 5 випливає з лем 5 і 7 та теореми 4.

4. Висновки.

В роботі розглянуто крайову задачу математичної фізики для неоднорідного гіперболічного рівняння з випадковою строго Орлічевою правою частиною та нульовими початковими і граничними умовами. Знайдено достатні умови існування з імовірністю одиниця розв'язку цієї задачі, який можна зобразити у вигляді двічі неперервно диференційовного рівномірно збіжного за ймовірністю ряду.

1. Dovgay B.V., Kozachenko Yu.V. The condition for application of Fourie method to the solution of nonhomogeneous string oscillation equation with φ-subgaussian right hand side // Random operators and stochastic equations, – 2005, – Vol. 13, No. 3, – pp. 281–296.
2. Buldygin V.V., Kozachenko Yu.V. Metric characterization of random variables and random processes. – Kiev: "TBiMC"; English transl., Amer. Math. Soc., Providence, RI, – 2000. – 257 p.
3. E. Barrasa de la Krus and Yu. V. Kozachenko. Boundary-value problem for equations of mathematical physics with strictly Orlicz random initial conditions // Random operators and stochastic equations. – 1995. – Vol. 3, No. 3. – P. 201 – 220.
4. Yu.V. Kozachenko and K.I. Veresh. Boundary-value problems for equations of mathematical phisics with Orlicz random initial conditions // Theory of Probability and Math. Statistics. – 2009. – No. 80. – P. 63 – 75.
5. *Положий Г.Н.* Уравнения математической физики. – Москва: Высшая школа, 1964. – 559 с.

Одержано 19.09.2011