

УДК 517.91, 621.3.011.72

Т. М. Сопронюк (Чернівецький нац. ун-т)

МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ З ПЕРЕМИКАННЯМИ ЗА ДОПОМОГОЮ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

While analysing circles with switching a transition is carried out from the model, described by the differential equation with a broken right part to the model with an unbroken right part having an impulse action at the fixed moments of time. In the environment of MathCad by means of such a model a chart describing the behavior of the electric circle with switching has been built.

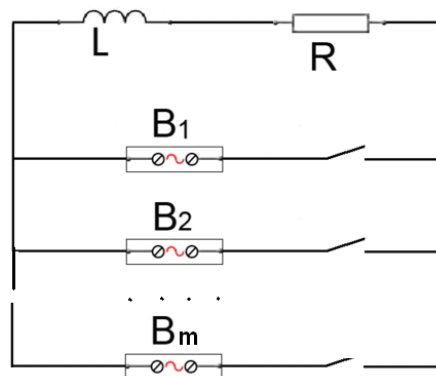
При аналізі електричних кіл з перемиканнями здійснено перехід від моделі, що описується диференціальним рівнянням з розривною правою частиною, до моделі з неперервною правою частиною із імпульсною дією у фіксовані моменти часу. У середовищі MathCad за допомогою такої моделі побудовано графік, який описує поведінку електричного кола з перемиканнями.

При моделювання еволюції реальних процесів, в тому числі і в електротехніці, часто виникають швидкі збурення, довжиною яких можна знехтувати. Такі явища виникають, наприклад, при перемиканнях в електротехнічних системах.

Традиційний підхід до аналізу подібних схем полягає у побудові моделі, яка описується диференціальним рівнянням з розривною правою частиною [1].

У даній статті пропонується поставити у відповідність такій моделі допоміжне диференціальне рівняння з неперервною правою частиною та імпульсною дією [2, 3] у моменти часу, в які відбувається перемикання.

Розглянемо електротехнічну систему, що складається з лінійних індуктивності L та опору R і в певні проміжки часу по чергово живиться від одного з джерел електрорушійної сили B_1, B_2, \dots, B_m , залежно від положення перемикача.



Будемо вважати, що перемикання відбуваються в моменти часу τ_j , $j = 1, 2, \dots$. Припустимо, що $\tau_0 = 0$ – початковий момент часу і

$$\tau_1 > \theta = \text{const}, \quad \tau_{j+1} - \tau_j > \theta, \quad j = 1, 2, \dots$$

Тоді процеси, що відбуваються в електричному колі з синусоїдальним струмом і перемиканнями, можна задати моделлю, яка описується лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням із розривною в точках τ_j , $j = 1, 2, \dots$,

правою частиною.

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} = e(t), \tag{1}$$

$$e(t) = \begin{cases} E_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1), \tau_{km} < t < \tau_{km+1}, \\ E_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2), \tau_{km+1} < t < \tau_{km+2}, \\ \dots \\ E_m \sin(\omega_m t + \varphi_m), \tau_{km+m-1} < t < \tau_{km+m}. \end{cases}, \quad k = 0, 1, \dots$$

За законом комутації на шукану функцію накладаються умови

$$i(0) = 0, \quad i(\tau_j + 0) = i(\tau_j - 0), \quad j = 1, 2, \dots$$

У випадку $m = 2$ для моделі з розривною правою частиною і трьох моментів часу, в яких почергово відбувається перемикання, у статті [1] обчислено значення миттєвого струму $i(t)$ для проміжків часу $[0, \tau_1], [\tau_1, \tau_2], [\tau_2, \tau_3]$.

Аналізуючи отримані в [1] результати, зазначимо, що при необхідності обчислення значення $i(t)$ при подальших перемиканнях модель з розривною правою виявляється мало придатною у зв'язку з громізкістю обчислень. Для порівняння наведемо формули обчислення миттєвого струму при $t \in [\tau_0, \tau_1]$

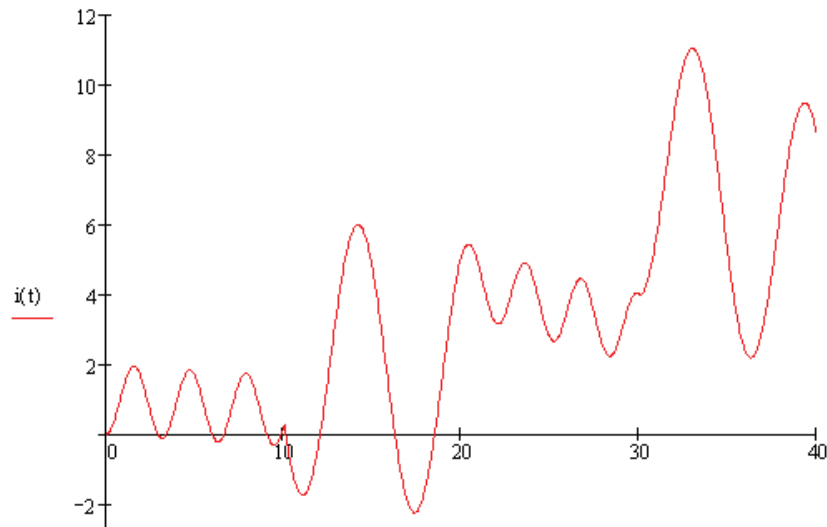
$$i(t) = \frac{E_1}{R^2 + L^2\omega_1^2} \left[(L\omega_1 \cos \varphi_1 - R \sin \varphi_1) e^{-\frac{R}{L}t} + (R \sin(\omega_1 t + \varphi_1) - \omega_1 L \cos(\omega_1 t + \varphi_1)) \right]$$

і при $t \in [\tau_2, \tau_3]$

$$i(t) = \frac{E_1}{R^2 + L^2\omega_1^2} (L\omega_1 \cos \varphi_1 - R \sin \varphi_1) e^{-\frac{R}{L}t} + \left[\frac{E_1}{R^2 + L^2\omega_1^2} (R \sin(\omega_1 \tau_1 + \varphi_1) - \omega_1 L \cos(\omega_1 \tau_1 + \varphi_1)) - \frac{E_2}{R^2 + L^2\omega_2^2} (R \sin(\omega_2 \tau_1 + \varphi_2) - \omega_2 L \cos(\omega_2 \tau_1 + \varphi_2)) \right] e^{-\frac{R}{L}(t-\tau_1)} + \left[\frac{E_1}{R^2 + L^2\omega_1^2} (R \sin(\omega_1 \tau_2 + \varphi_1) - \omega_1 L \cos(\omega_1 \tau_2 + \varphi_1)) - \frac{E_2}{R^2 + L^2\omega_2^2} (R \sin(\omega_2 \tau_2 + \varphi_2) - \omega_2 L \cos(\omega_2 \tau_2 + \varphi_2)) \right] e^{-\frac{R}{L}(t-\tau_2)} + \frac{E_1}{R^2 + L^2\omega_1^2} (R \sin(\omega_1 t + \varphi_1) - \omega_1 L \cos(\omega_1 t + \varphi_1)).$$

У роботах [2, 3] нами запропоновано застосування допоміжної моделі з неперервною правою частиною і імпульсною дією у фіксовані моменти часу при $m = 2$.

Наведемо графік, побудований у системі MathCad, миттєвого струму $i(t)$ при деяких параметрах і $t \in [0, 40]$. Перемикання відбуваються у моменти часу $\tau_1 = 10, \tau_2 = 20, \tau_3 = 30$.



Для побудови допоміжної моделі використаємо частинний розв'язок $n(t)$ неоднорідного рівняння (1).

$$n(t) = n_i(t), \quad t \in [k\tau_{i-1}, k\tau_i], \quad i = 1, \dots, m, \quad k = 0, 1, \dots,$$

$$n_i(t) = \frac{E_i R}{R^2 + L^2 \omega_i^2} \sin(\omega_i t + \varphi_i) - \frac{L E_i \omega_i}{R^2 + L^2 \omega_i^2} \cos(\omega_i t + \varphi_i)$$

і зробимо заміну

$$i(t) = x(t) + n(t),$$

Така заміна дає можливість замість диференціального рівняння із розривною правою частиною досліджувати іншу модель, що описується лінійним однорідним рівнянням із фіксованими моментами імпульсної дії.

$$R x(t) + L \frac{dx(t)}{dt} = 0, \quad t \neq \tau_j, \quad j = 1, 2, \dots$$

$$x(0) = -n_1(0),$$

$$\Delta x|_{t=\tau_j} = \begin{cases} n_1(\tau_j) - n_2(\tau_j), j = km + 1, \\ n_2(\tau_j) - n_3(\tau_j), j = km + 2, \\ \dots \\ n_m(\tau_j) - n_1(\tau_j), j = km + m. \end{cases}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Розв'язавши це рівняння, застосовуючи загальний розв'язок однорідного рівняння

$$X(t) = C e^{-\frac{R}{L}t}, \quad C = \text{const},$$

повернемося до шуканої функції $i(t)$.

Очевидно, що використовуючи запропонований підхід, можна легко побудувати графіки, задавши будь-яку кількість і послідовність перемикачів, будь-які моменти імпульсної дії та параметри моделі.

Розглянемо далі приклад, в якому задамо такі штучні параметри моделі, щоби наочно продемонструвати вплив перемикачів на значення миттєвого струму. Розрахунки проведемо у системі MathCad. Часовий проміжок $t \in [0, 60]$ включатиме у себе 5 перемикачів, $m = 3$.

```

L := 50      R := 2
E1 := 100   E2 := 200   E3 := 150
w1 := 2     w2 := 1     w3 := 1.5
Phi1 := 0   Phi2 := 1.5   Phi3 := 1

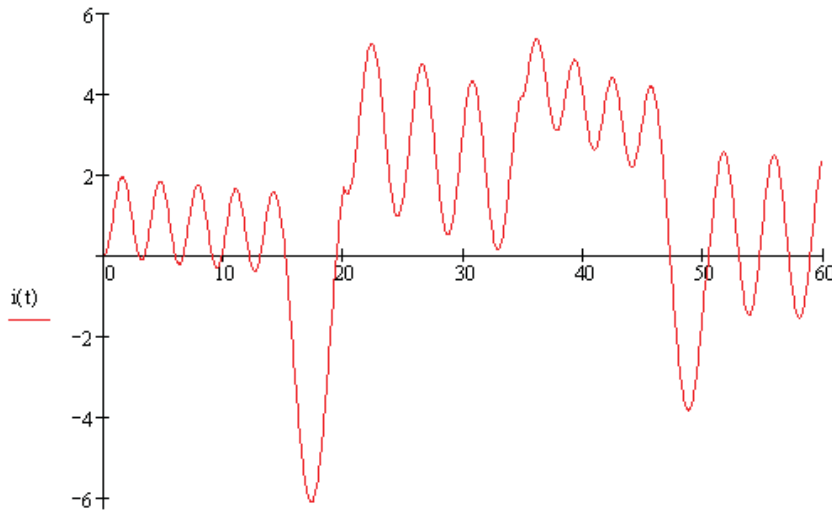
Index(1,m) := | for i ∈ 0..1 - 1
                v1 ← mod(i,m) + 1
                v
                |

tau := (0 15 20 35 45 50 60)^T      k := rows(tau)      Ind := Index(k,rows(w) - 1)
Ind^T = (1 2 3 1 2 3 1)

n(i,t) := (E_i * R) / (R^2 + L^2 * (w_i)^2) * sin(w_i * t + Phi_i) - (L * E_i * w_i) / (R^2 + L^2 * (w_i)^2) * cos(w_i * t + Phi_i)

X(t,c) := c * e^(-R/L * t)      C(XD,t) := XD * e^(R/L * t)      I(j) := n(Ind_{j-1},tau_j) - n(Ind_j,tau_j)

n(t) := for j ∈ 0..k - 1
         return n(Ind_j,t) if (t > tau_j) ^ (t <= tau_{j+1})
x(t) := | return X(t,-n(1,0)) if t <= tau_1
         for j ∈ 1..k - 1
         return X(t,C(x(tau_j) + I(j),tau_j)) if (t > tau_j) ^ (t <= tau_{j+1})
i(t) := x(t) + n(t)
    
```



Отже, можна зробити висновок, що теорія диференціальних рівнянь [4] дає зручний інструмент для аналізу електричних кіл з перемиканнями.

1. Шидловська Н.А., Кравченко О.П. Аналіз електричних кіл з перемиканнями за допомогою теорії диференціальних рівнянь з імпульсною дією // Пр. Ін-ту електродинаміки НАН України : зб. наук. пр. – К.: ІЕД НАНУ.– 2005. – № 2 (11).– Ч2, 2005. – С. 3–6.
2. Сопролюк Т.М. Математичне моделювання систем з імпульсною дією / Т.М. Сопролюк // X-я Крымская Международная Математическая школа «Метод функций Ляпунова и его приложения»: междуна. мат. конф., 13-18 сентября 2010 г.: тезисы докл. — Симферополь «ДИАЙПИ» 2010. — С. 130.
3. Петришин Р.І., Сопролюк Т. М. Наближені методи розв'язування диференціальних рівнянь з імпульсною дією: навч. посібник. — Чернівці: Чернівецький національний ун-т, 2010. — 200 с.
4. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.— К.: Вища школа, 1987.— 288 с.

Одержано 28.10.2011