ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 143, № 1
апрель, 2005

© 2005 г. В. Ю. Лазур*, А. К. Рейтий*, В. В. Рубиш*

МЕТОД ВКБ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА СО СКАЛЯРНО-ВЕКТОРНОЙ СВЯЗЬЮ

Построена рекуррентная схема нахождения ВКБ-разложений для решений уравнения Дирака во внешнем центрально-симметричном поле со скалярно-векторной лоренцовой структурой потенциалов взаимодействия. Получены квазиклассические формулы для радиальных функций в классически разрешенной и запрещенной областях, найдены условия их сшивания при переходе через точки поворота. Проведено обобщение правила квантования Бора–Зоммерфельда на релятивистский случай, когда частица спина $1/2$ взаимодействует со скалярным и электростатическим внешними полями одновременно. В квазиклассическом приближении получено общее выражение для ширины квазистационарных уровней, известное ранее лишь для электростатических потенциалов барьерного типа (формула Гамова). Показано, что для потенциалов кулоновского и осцилляторного типов полученное правило квантования точно воспроизводит энергетический спектр. На примере потенциала воронки продемонстрировано, что предложенная версия метода ВКБ не только расширяет возможности аналитического исследования спектра энергий и волновых функций, но и обеспечивает приемлемую точность вычислений даже для состояний с $n_r \backsim 1$.

Ключевые слова: уравнение Дирака, лоренц-структура потенциала взаимодействия, метод ВКБ, эффективный потенциал, условие квантования, ширина уровня, потенциальные модели.

1. ВВЕДЕНИЕ

Релятивистские водородоподобные (ВП) атомы и тяжело-легкие кварк-антикварковые ($Q\bar{q}$) системы, являющиеся их КХД-аналогами, представляют собой идеальные объекты для исследований, позволяющие подвергать результаты квантовой теории очень точной экспериментальной проверке. Особую роль в развитии релятивистской теории связанных состояний играет уравнение Дирака. Из этого уравнения следует наличие спина и спинового момента у электрона (позитрона), кварка (антикварка). Оно также позволяет учесть спин-орбитальные и спин-спиновые взаимодействия в ВП-атомах и $Q\bar{q}$-системах и, соответственно, предсказать тонкую и сверхтонкую структуру уравнений энергии. Уравнение Дирака с радиационными поправками [1], [2], предложенное Швингером, позволяет учитывать многократное взаимодействие частицы с собственным и внешними полями.

*Ужгородский национальный университет, Ужгород, Украина. E-mail: lazur@univ.uzhgorod.ua

Важное место в современной релятивистской теории связанных состояний занимает метод эффективного уравнения Дирака. В этом методе возможен последовательный переход от двухчастичной теории к приближению внешнего поля [3]. Как следует из результатов работ [3], [4], такая возможность реализуется и имеет практические преимущества в случае ВП-атомов и $Q\bar{q}$-систем. Однако в большинстве задач, в которых физически оправданна концепция внешнего поля [4], попытки найти точные решения уравнения Дирака с более или менее реалистичными потенциалами взаимодействия пока наталкиваются на непреодолимые трудности. Для отыскания решений чаще всего применяются либо численные, либо асимптотические методы. Во многих теоретических и прикладных вопросах именно возможность получить асимптотическое решение позволяет провести наиболее полный анализ задачи. Поэтому едва ли есть необходимость подробно объяснять важность создания и развития асимптотических методов решения уравнения Дирака.

Квазиклассическое приближение Вентцеля–Крамера–Бриллюэна (ВКБ) является одним из основных и наиболее универсальных асимптотических методов решения задач квантовой механики и математической физики (см., например, [5]–[9]), для которых неизвестны или слишком громоздки точные решения. В отличие от теории возмущений это приближение не связано с малостью взаимодействия и поэтому имеет более широкую область применимости, позволяя исследовать качественные закономерности в поведении и свойствах квантово-механических систем. В частности, ординарный метод ВКБ [5]–[9] (для уравнения Шредингера) успешно использовался для атома водорода в постоянных электрическом и магнитном внешних полях (см., например, [5], [10] и указанные там ссылки), для ряда модельных потенциалов [11], в квантово-механической задаче двух кулоновских центров [12] и др. Обсуждение современного состояния этого метода, различных его вариантов и приложений в нерелятивистской теории атомов и молекул, квантовой химии, в задачах теории столкновений и т.д. можно найти в [13], [14].

Успешное применение приближения ВКБ к различным задачам нерелятивистской физики стимулировало распространение данного метода и на релятивистские системы, описываемые уравнением Дирака. В порядке исторической справки укажем, что предельный переход от уравнения Дирака во внешнем поле к уравнению Гамильтона–Якоби для классической релятивистской частицы впервые рассмотрел Паули [15] и затем более подробно ряд авторов [16]. Задача построения квазиклассических решений уравнения Дирака в общем многомерном случае была решена Масловым в рамках метода канонического оператора [17].

Теория квазиклассического приближения для уравнения Дирака в сильном ($E_0 > 2m_ec^2$, где E_0 – энергия связи электрона) внешнем поле начала систематически разрабатываться в тесной связи с проблемой глубоких уровней [18]–[21], имеющей фундаментальное значение для квантовой электродинамики (критический заряд ядра Z_c и спонтанное рождение позитронов из вакуума при $Z > Z_c$, см. [22]–[25]). Применение метода ВКБ к релятивистской кулоновской задаче с зарядом $Z > 137$ базировалось в ранних работах [18]–[21] на квадрировании уравнения Дирака (метод эффективного потенциала [22], [23]). Такой подход весьма близок к обычной схеме получения разложений

ВКБ [5]–[9] и хорошо работает в докритической области $Z \leqslant Z_c,\ E_0 \geqslant -m_e c^2$ (т.е. там, где спонтанное рождение позитронов еще невозможно). Однако для состояний с энергией $E < -m_e c^2$ подстановка $\chi(r) = (mc^2 + E - V)^{-1/2} F(r)$, используемая в данном методе, становится сингулярной в точке $r = r_g$ такой, что $V(r_g) = mc^2 + E$ (рассматривается потенциал притяжения: $V(r) < 0,\ 0 < r < \infty$). Вследствие этого обычные квазиклассические формулы [5]–[9] теряют смысл вблизи точки $r = r_g$ из-за расходимости фазовых интегралов. Разные авторы [18]–[21] преодолевали эту трудность по-разному, иногда весьма остроумно [19], [21], но окончательное и полное решение дано только в [26], [27]. Выяснилось, что указанная трудность носит чисто формальный характер, так как исходное уравнение Дирака не является сингулярным в точке $r = r_g$. Более того, сингулярность при $r = r_g$ вообще не возникает, если применять приближение ВКБ не к уравнению второго порядка для $\chi(r)$, а непосредственно к исходной системе Дирака для радиальных волновых функций F и G. Полученные на этом пути квазиклассические формулы для решений уравнения Дирака в сильном внешнем поле имеют многочисленные приложения в теории тяжелых и сверхтяжелых атомов [28].

Однако в последние годы возник значительный интерес к изучению поведения квантовых систем фермионов в присутствии вместе взятых электромагнитного (векторного) и скалярного внешних полей. Такие системы обладают рядом необычных черт, существенно отличных от тех, которые свойственны фермионам в присутствии одного лишь электромагнитного поля. Так, например, в отличие от электромагнитного, скалярное поле действует одинаково как на частицы, так и на античастицы. Поэтому картина уровней энергии фермионов, взаимодействующих со скалярным и векторным (например, кулоновским) полем одновременно, может существенно отличаться от привычной нам картины спектра релятивистской кулоновской задачи.

Дополнительные стимулы к изучению подобных задач появились недавно в физике элементарных частиц. Речь идет о моделях строения смешанных мезонов (КХД-аналогов ВП-атомов), состоящих, например, из одного легкого антикварка $\bar{q}$ и одного тяжелого кварка Q ($Q\bar{q}$-мезоны; см. [29], [30]). Рассматривая в пределе бесконечно тяжелого кварка Q уравнение Дирака как уравнение для одного легкого антикварка $\bar{q}$, можно изучить (подобно картине ВП-атомов) ряд таких важных аспектов теории тяжело-легких кварк-антикварковых систем, как релятивистскую динамику легкого антикварка $\bar{q}$ во внешнем поле тяжелого кварка Q, лоренц-структуру дальнодействующей (запирающей) части $Q\bar{q}$-взаимодействия, тонкую структуру спектра смешанных мезонов, влияние на спектр спонтанного нарушения киральной симметрии и т.д. Как известно из КХД [29], [30], на малых расстояниях в силу свойства асимптотической свободы основной вклад в $Q\bar{q}$-взаимодействие дает обычный кулоновский потенциал одноглюонного обмена $V(r) = -4\alpha_V/3r$, где α_V – константа сильного взаимодействия. С ростом расстояния основным становится скалярное запирающее взаимодействие (конфайнмент), "точный" вид которого пока не установлен. Основанные на первых принципах КХД расчеты на решетках [31] выделяют на больших расстояниях линейный (скалярный) конфайнмент $S(r) = \sigma r$, где σ – натяжение струны. Все прочие взаимодействия, разумеется, важны при более тонком описании свойств мезонов, но они являются малыми взаимодействиями по сравнению со скалярным потенциалом, который обеспечивает конфайнмент кварков внутри мезонов (см. более подробно [31]).

Заметим, наконец, что уравнение Дирака со смешанной (скалярно-векторной) лоренц-структурой потенциалов взаимодействия интересно также с точки зрения его возможных приложений в теории адронных атомов [32]. В принципе не исключено, что это же уравнение может оказаться полезным и для описания эффектов в физике твердого тела (например, в двухзонных полупроводниках [33]).

Учитывая, что в будущем интерес к подобным исследованиям несомненно будет расти, представляется актуальным распространение предложенной Масловым [17] и развитой в работах [26], [27] техники построения решений ВКБ уравнения Дирака во внешнем электромагнитном поле на случай спинорного уравнения со смешанной скалярно-векторной связью. Можно ожидать, что такой подход окажется плодотворным и при описании поведения квантовых систем фермионов во внешних полях со смешанной лоренц-структурой потенциалов взаимодействия, для которых точные решения уравнения Дирака либо не существуют, либо слишком громоздки.

Настоящая статья построена следующим образом. В разделе 2 с помощью известной техники левых и правых собственных векторов соответствующей однородной системы построена рекуррентная схема поиска разложений ВКБ для решений уравнения Дирака во внешнем центрально-симметричном поле со смешанной скалярно-векторной лоренц-структурой потенциалов взаимодействия. На этой основе в разделе 3 получены квазиклассические формулы для радиальных функций F и G в классически разрешенной и запрещенной областях, найдены условия их сшивания при переходе через точки поворота. Там же проведено обобщение правила квантования Бора–Зоммерфельда на релятивистский случай, когда частица спина $1/2$ взаимодействует со скалярным и электростатическим внешними полями одновременно. В квазиклассическом приближении получено общее выражение для ширины квазистационарных уровней, известное ранее лишь для электростатических потенциалов барьерного типа. В разделе 4 показано, что для некоторых модельных потенциалов (кулоноподобного и осцилляторного) со скалярно-векторной структурой полученное нами правило квантования точно воспроизводит энергетический спектр. На примере потенциала воронки показано, что используемая версия метода ВКБ не только расширяет возможности аналитического исследования спектра энергий и волновых функций, но и обеспечивает вполне приемлемую точность вычислений даже для состояний с радиальным квантовым числом $n_r \backsim 1$.

2. РЕКУРРЕНТНАЯ СХЕМА ПОСТРОЕНИЯ ВКБ-РАЗЛОЖЕНИЙ

Задача описания движения релятивистской частицы спина $1/2$ в эффективном поле, состоящем из статического скалярного и электрического внешних полей, сводится в нашей постановке к решению уравнения Дирака со смешанной скалярно-векторной связью ($c = \hbar = 1$)

$$\left[\alpha\widehat{\mathbf{p}} + \beta\bigl(m + S(\mathbf{r})\bigr) + V(\mathbf{r})\right]\Psi = E\Psi. \tag{1}$$

Здесь $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и β – стандартные матрицы Дирака, $\widehat{\mathbf{p}} = -i\boldsymbol{\nabla}_r$ – оператор импульса, E и m – полная энергия и масса покоя частицы, $S(r)$ – скалярный лоренц-потенциал, а потенциал $V(r)$ является нулевой (временно́й) компонентой 4-вектора A_μ: $\mathbf{A} = 0,\ V(r) = -eA_0(r),\ e > 0$.

Получим формулы квазиклассического приближения для уравнения Дирака (1), ограничившись классом потенциалов с центральной симметрией: $S(\mathbf{r}) = S(r),\ \ V(\mathbf{r}) = V(r)$. В соответствии с этим будем искать волновую функцию Ψ стационарных состояний(в стандартном представлении) в виде

$$\Psi = r^{-1}\begin{pmatrix} F(r)\Omega_{jlM}(\mathbf{n}) \\ iG(r)\Omega_{jl'M}(\mathbf{n}) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где Ω_{jlM} – шаровой спинор [2], j и M – полный угловой момент и его проекция, соответственно $(j = l \pm 1/2),\ l$ – орбитальный момент $(l + l' = 2j),\ \mathbf{n} = \mathbf{r}/r$. После отделения угловых переменных вектора $\mathbf{n}$ в уравнении (1) приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для радиальных волновых функций F и G

$$\begin{aligned} &\frac{dF}{dr} + \frac{\tilde{k}}{r}F - \frac{1}{\hbar}\big[\big(E - V(r)\big) + \big(m + S(r)\big)\big]G = 0, \\ &\frac{dG}{dr} - \frac{\tilde{k}}{r}G + \frac{1}{\hbar}\big[\big(E - V(r)\big) - \big(m + S(r)\big)\big]F = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь в явном виде восстановлена зависимость от постоянной Планка $\hbar$ и использованы следующие новые обозначения:

$$\tilde{k} = \hbar k, \qquad k = \begin{cases} -(l+1) & \text{для} \quad j = l + 1/2 \quad (l = 0, 1, \dots) \\ l & \text{для} \quad j = l - 1/2 \quad (l = 1, 2, \dots), \end{cases} \tag{4}$$

так что $|k| = j + 1/2 = 1, 2, \dots$. Знак k, наряду с $\hbar j$, $\hbar M$ и энергией E, является интегралом движения для дираковской частицы в произвольном центральном поле.

Систему (3) можно свести к уравнению второго порядка, исключив одну из неизвестных радиальных функций, но при построении формальных асимптотических решений удобнее оперировать непосредственно с самой системой. Запишем ее в матричной форме (штрих означает производную по r)

$$\chi' = \frac{1}{\hbar}D\chi, \qquad \chi = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} -\tilde{k}/r & m + S(r) + E - V(r) \\ m + S(r) - E + V(r) & \tilde{k}/r \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Эта система содержит естественный малый параметр $\hbar$, и задача заключается в асимптотическом интегрировании этой системы при $\hbar \to 0$.

Приведем алгоритм построения формальных асимптотических решений. Следуя стандартной схеме асимптотической теории систем линейных дифференциальных уравнений [34], будем искать решение системы (5) в виде асимптотического ряда по степеням $\hbar$:

$$\chi(r) = \exp\left\{\int^r y(r')\,dr'\right\}\sum_{n=0}^{\infty}\hbar^n\varphi^{(n)}(r), \tag{6}$$

$$y(r) = \hbar^{-1}y_{-1}(r) + y_0(r) + \hbar y_1(r) + \cdots, \qquad \varphi^{(n)}(r) = \begin{pmatrix} \varphi_F^{(n)}(r) \\ \varphi_G^{(n)}(r) \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где верхняя (нижняя) компонента $\varphi_F^{(n)}$ $\left(\varphi_G^{(n)}\right)$ вектора $\varphi^{(n)}$ отвечает радиальной функции F (G). Подставляя разложение (6) в (5) и приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях $\hbar$, получим бесконечную систему рекуррентных уравнений для неизвестных скалярных $y_n(r)$ и векторных $\varphi^{(n)}(r)$ функций

$$(D - y_{-1}I)\varphi^{(0)} = 0, \tag{8}$$

$$(D - y_{-1}I)\varphi^{(n+1)} = \varphi^{(n)\prime} + \sum_{k=0}^{n} y_{n-k}\varphi^{(k)}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots\,. \tag{9}$$

Здесь 0, I – нулевая и единичная (2×2)-матрицы. Из уравнения (8) следует, что $y_{-1}(r)$ должно быть собственным значением, а $\varphi^{(0)} \equiv \varphi_i$ – одним из собственных (правых) векторов матрицы $D(r)$. Собственные значения $y_{-1} \equiv \lambda_i$ являются корнями характеристического уравнения $\det(D - y_{-1}I) = 0$:

$$y_{-1} \equiv \lambda_i = \pm q, \qquad q = \sqrt{\big(m + S(r)\big)^2 - \big(E - V(r)\big)^2 + \left(\frac{k}{r}\right)^2}\,. \tag{10}$$

Тогда соответствующие правые собственные векторы φ_i в покомпонентной форме записи равны

$$\varphi_i = A_1 \begin{pmatrix} m + S + E - V \\ \lambda_i + kr^{-1} \end{pmatrix} = A_2 \begin{pmatrix} \lambda_i - kr^{-1} \\ m + S - E + V \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Здесь и в дальнейшем $\hbar = c = 1$; индекс i принимает два значения $\pm$, ассоциированные с двумя значениями функции $\lambda_i(r) = \pm q(r)$; $A_1(r)$ и $A_2(r)$ – нормировочные множители, которые фиксируем позже по соглашению.

Поскольку матрица $D(r)$ не является симметричной, то наряду с правыми собственными векторами мы должны ввести также левые собственные векторы $\check{\varphi}_i$. Последние определяются условиями

$$\check{\varphi}_i(D - \lambda_i I) = 0, \tag{12}$$

$$\check{\varphi}_i = B_1(m + S - E + V, \lambda_i + kr^{-1}) = B_2(\lambda_i - kr^{-1}, m + S + E - V). \tag{13}$$

К этому нужно добавить, что $\check{\varphi}_i$ не совпадает с φ_i^{T}; при этом левые и правые собственные векторы матрицы $D(r)$ ортогональны:

$$(\check{\varphi}_i, \varphi_j) = \sum_{\alpha=1}^{2} (\check{\varphi}_i)_\alpha (\varphi_j)_\alpha = \mathrm{const}\,\delta_{ij}. \tag{14}$$

Как обычно, δ_{ij} есть символ Кронекера.

Для определения функции $y_0(r)$ используем уравнение (9) при $n = 0$, положим в нем $\varphi^{(0)} = \varphi_i$ и умножим обе части слева на вектор-строку $\check{\varphi}_i$. Тогда в силу (12) левая часть итогового равенства обратится в нуль, и мы получим уравнение для $y_0(r)$, из которого следует, что

$$y_0(r) = -\frac{(\check{\varphi}_i, \varphi_i')}{(\check{\varphi}_i, \varphi_i)}. \tag{15}$$

Как мы видели выше (см. (11), (13)), собственные векторы φ_i, $\check{\varphi}_i$ определяются с точностью до произвольных множителей $A_{1,2}$ и $B_{1,2}$. Этот произвол можно устранить, наложив на $\varphi_i, \check{\varphi}_i$ естественное условие

$$(\check{\varphi}_i, \varphi_i') = (\check{\varphi}_i', \varphi_i). \tag{16}$$

В этом случае интеграл в (6) вычисляется в замкнутом виде:

$$\int^r y_0(r')\,dr' = \ln\bigl[(\check{\varphi}_i, \varphi_i)^{-1/2}\bigr]. \tag{17}$$

Тогда искомое квазиклассическое решение системы (5) таково:

$$\chi_i = (\check{\varphi}_i, \varphi_i)^{-1/2} \exp\biggl\{\int^r \lambda_i(r')\,dr'\biggr\}\varphi_i. \tag{18}$$

Продолжив эти построения, можно последовательно найти и все остальные члены $y_1, y_2, \ldots,\ \varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \ldots$ в разложении (6). Но формулы для них оказываются громоздкими, поэтому в приложениях используется, как правило, только главный член (18) разложения (6), соответствующий известному выражению $\psi \sim p^{-1/2}\exp\left\{i\int^r p(r')\,dr'\right\}$ обычной нерелятивистской квазиклассики [5]. На самом деле, здесь существенным моментом является тот факт, что формальное разложение (6) по степеням $\hbar$ в общем случае не сходится, а представляет собой так называемый асимптотический ряд, несколько первых членов которого дают хорошее приближение к точному решению, если только параметр разложения $\hbar$ достаточно мал.

Наконец, нам осталось показать, что условие (16) всегда можно удовлетворить надлежащим выбором нормировочных множителей $A_{1,2}$ и $B_{1,2}$ в формулах (11), (13). Так, подстановка (11), (13) в (16) приводит к уравнению

$$\frac{A_1 B_1' - A_1' B_1}{A_1 B_1} = -\frac{(m+S)V' + (E-V)S'}{q(q \pm kr^{-1})}, \tag{19}$$

откуда и из представления (18) приходим к следующему результату для главного члена асимптотики радиальных функций χ_i в подбарьерной области:

$$\chi_\pm = \left[2q\left(q \pm \frac{k}{r}\right)\right]^{-1/2} \times \\ \times \exp\biggl\{\pm\int^r q\,dr + \frac{1}{2}\int^r \frac{(m+S)V' + (E-V)S'}{q(q \pm kr^{-1})}\,dr\biggr\} \begin{pmatrix} m+S+E-V \\ kr^{-1} \pm q \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Если исходить из второй формы записи собственных векторов φ_i и $\check{\varphi}_i$ (с нормировочными множителями A_2 и B_2 в формулах (11) и (13)), то после аналогичных построений придем к следующему представлению ВКБ:

$$\chi_\pm = \left[2q\left(q \mp \frac{k}{r}\right)\right]^{-1/2} \times \\ \times \exp\biggl\{\pm\int^r q\,dr - \frac{1}{2}\int^r \frac{(m+S)V' + (E-V)S'}{q(q \mp kr^{-1})}\,dr\biggr\} \begin{pmatrix} \pm q - kr^{-1} \\ m+S-E+V \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Прежде чем обсуждать смысл полученных формул, следует отметить, что в классически запрещенных областях, где $q(r) > 0$, функции $y_{-1}(r)$ и $y_0(r)$ вещественнозначны. Знаки плюс (минус) в (20) и (21) соответствуют решению, экспоненциально возрастающему (убывающему) с ростом r. Для убывающего решения (знак минус) следует использовать формулу (20) при $k < 0$ и формулу (21) при $k > 0$; для возрастающего решения – наоборот. Простой и часто эффективный способ выбора удобной формы записи решений основан на требовании положительности величины $Q_\pm = q \pm k/r$ в классически запрещенной области. При другом выборе решения не исключена возможность появления в выражениях для F и G неопределенности типа $0/0$ в точке $r = r_g$, где величина $Q_\pm$ обращается в нуль. Эта фиктивная сингулярность делает невозможным прямое использование формул (20) и (21) в окрестности точки r_g. В связи с этим получение квазиклассических формул для F и G, свободных от сингулярностей, потребовало бы раскрытия указанной неопределенности в точке r_g, что, в свою очередь, требует дополнительных довольно громоздких вычислений.

Перейдем теперь к приложениям предложенного выше варианта метода ВКБ к конкретным физическим задачам. Обычно квазиклассическое приближение используется в случае дискретного спектра и несколько реже – для вычисления волновых функций непрерывного спектра и в теории рассеяния [5]–[9], [13]. Однако во многих областях физики встречаются потенциалы с барьером, для которых вместо дискретных уровней возникают квазистационарные состояния (резонансы) с комплексной энергией $E = E_r - i\Gamma/2$. В следующем разделе мы рассмотрим эту задачу в квазиклассическом приближении, которое позволяет найти для положения резонанса E_r и его ширины Γ общие выражения, справедливые для произвольных гладких потенциалов $V(r)$ и $S(r)$ барьерного типа.

3. МЕТОД ВКБ ДЛЯ ПОДБАРЬЕРНЫХ РЕЗОНАНСОВ

В этом разделе мы вкратце рассмотрим применение метода ВКБ к одной важной проблеме, связанной с изучением распадающихся (квазистационарных) состояний квантовых объектов [35]. Такие состояния вводятся, как известно, по аналогии с обычными стационарными состояниями дискретной части спектра собственных значений дираковского гамильтониана $\widehat{H}$. На комплексной плоскости энергий E им отвечают полюсы стационарной функции Грина [35] $G(E) = (E - \widehat{H} + i\eta)^{-1}$.

Введение комплексных уровней энергии нарушает, однако, один из основных постулатов квантовой теории, согласно которому спектр собственных значений любого эрмитового оператора должен быть действительным, а соответствующие собственные функции – нормированными. Аналитические продолжения стационарных решений в комплексную плоскость энергий имеют, следовательно, принципиально новый смысл. Они дают простейшую и наиболее удобную аппроксимацию нестационарных решений в основной области изменения переменных, т.е. там, где точные волновые функции $\widetilde{\Psi}(\mathbf{r}, t)$ наиболее близки к функциям стационарных связанных состояний, $\widetilde{\Psi}(\mathbf{r}, t) \approx \Psi_n(\mathbf{r}) \times \exp(-iE_n t)$, $\operatorname{Im} E_n \ll \operatorname{Re} E_n$.

Уточнение области применимости исходных представлений теории квазистационарных состояний и совершенствование расчетных методов длительное время составляли основную задачу исследований этого направления. Эта задача остается актуальной и сейчас, особенно в приложениях к конкретным системам. В качестве примеров здесь можно привести такие фундаментальные задачи атомной и ядерной физики, как ионизация атомных систем под действием внешнего электромагнитного поля [10], [36], распад радиоактивных ядер или нестабильных частиц [37], реакции отрыва электрона при низкоэнергетических соударениях атомных частиц [38] и т.д. Вместе с тем сама логика развития теории распадных состояний диктует, очевидно, постановку целого ряда качественно новых задач, аналогичных тем, которые ранее решались только в нерелятивистском приближении. Естественным путем возникают вопросы о влиянии на свойства распадающихся квазистационарных состояний самых различных физических факторов – релятивизма и спин-орбитального взаимодействия, внешних полей со смешанной лоренц-структурой потенциалов взаимодействия, адиабатически медленного изменения параметров и т.д. Результаты, полученные при решении подобных задач, представляют интерес для квантовой механики неабелевой частицы во внешнем калибровочном поле Янга–Милса [39], при рассмотрении вакуумной оболочки сверхкритических атомов [18]–[24], для описания эффектов спонтанного рождения позитронов при медленных столкновениях тяжелых ядер [23]–[28], а также с точки зрения исследования решений уравнения Дирака в сильных внешних полях.

3.1. Структура решений ВКБ. Возвращаясь к асимптотикам ВКБ (20) и (21), видим, что фигурирующая там величина $q(r)$ совпадает (с точностью до множителя $i=\sqrt{-1}\,$) с радиальным импульсом классической релятивистской частицы. Если записать эту величину в виде $q=\sqrt{2m(U-\overline{E}\,)}$, то выражению (10) отвечает эффективная энергия $\overline{E}=(E^2-m^2)/(2m)$ и эффективный потенциал (ЭП) для радиального движения

$$U(r,E)=\frac{E}{m}V+S+\frac{S^2-V^2}{2m}+\frac{k^2}{2mr^2}. \tag{22}$$

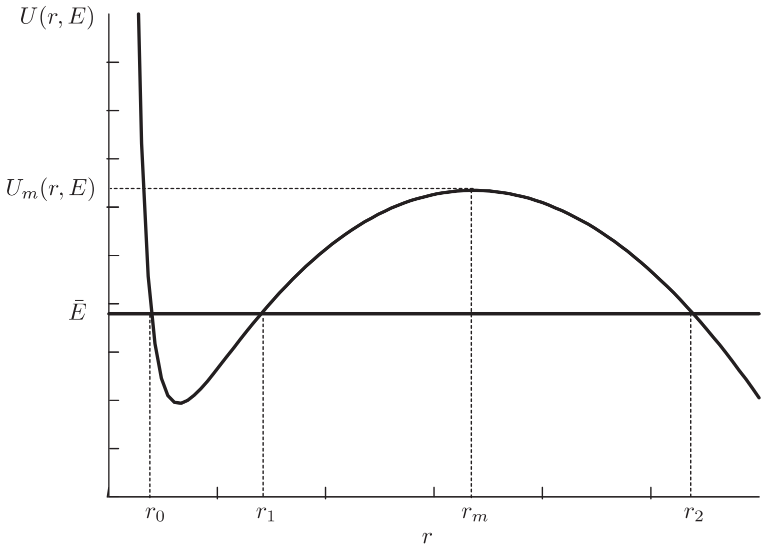
Дальнейший анализ существенно зависит от вида ЭП $U(r,E)$ и расположения точек поворота (нулей функции $q(r)$ на полуоси $0<r<\infty$). Для описания явлений, связанных с образованием и распадом квазистационарных состояний, выделим класс потенциалов $V(r)$ и $S(r)$, для которых ЭП $U(r,E)$ имеет вид ямы, отделенной от внешней области потенциальным барьером. Ниже мы будем считать, что $V(r)$ и $S(r)$ не имеют особенностей при $0<r<\infty$ и подчиняются следующим условиям (в предельной точке $r=0$):

$$\lim r^{1+\delta}V(r)=0,\qquad \lim r^{1+\delta}S(r)=0\quad \text{при}\ \ r\to 0\ \ \text{и}\ \ \delta>0. \tag{23}$$

Для потенциалов со степенным поведением на малых расстояниях

$$V(r)\sim r^{-\beta_1},\qquad S(r)\sim r^{-\beta_2},\qquad \beta_i\leqslant 1,\qquad r\to 0, \tag{24}$$

эти условия исключают "падение на центр" [2], [23]. Для скалярных потенциалов $S(r)$, более сингулярных, чем r^{-1}, слагаемое с центробежным потенциалом в выражении (22) не играет существенной роли, и асимптотика решений F и G при $r\to 0$ не зависит от k.



Вид эффективного потенциала $U(r,E)$ барьерного типа; r_0, r_1, r_2 – корни квазиимпульса (10)

Если $V(r)$ и $S(r)$ удовлетворяют условиям (23), то ЭП $U(r,E)$ имеет при $r=0$ полюс второго порядка. Качественный ход ЭП $U(r,E)$ барьерного типа и положение точек поворота r_j при $\overline{E} < U_m$ (U_m – вершина потенциального барьера) представлены на рисунке.

В квазиклассическом приближении волновая функция квазистационарного состояния имеет разную асимптотическую форму в следующих областях: I) потенциальная яма $r_0 < r < r_1$; II) подбарьерная область $r_1 < r < r_2$; III) классически разрешенная область $r > r_2$ с квазидискретным энергетическим спектром [5]. Границами между разными областями – точками поворота r_j $(j = 0,1,2)$ – здесь служат корни уравнения $\overline{E} = U(r,E)$. Не входя в детали вычислений, выпишем главные члены асимптотики решений системы Дирака (3) в каждой из трех указанных областей.

I. В классически разрешенной области $r_0 < r < r_1$ асимптотики ВКБ радиальных функций F и G имеют осциллирующий характер:

$$\begin{aligned} F(r) &= C_1^{\pm}\left[\frac{E-V+m+S}{p(r)}\right]^{1/2}\cos\Theta_1, \\ G(r) &= C_1^{\pm}\,\mathrm{sgn}\,k\left[\frac{E-V-m-S}{p(r)}\right]^{1/2}\cos\Theta_2, \end{aligned} \tag{25}$$

при этом согласно (10)

$$p(r) = \left[\big(E-V(r)\big)^2 - \big(m+S(r)\big)^2 - \left(\frac{k}{r}\right)^2\right]^{1/2} \tag{26}$$

– квазиклассический импульс для радиального движения частицы, $\operatorname{sgn} k$ – знак k, а фазы Θ_1 и Θ_2 задаются равенствами

$$\Theta_1(r) = \int_{r_1}^{r} \left(p + \frac{kw}{pr} \right) dr + \frac{\pi}{4}, \qquad \Theta_2(r) = \int_{r_1}^{r} \left(p + \frac{k\widetilde{w}}{pr} \right) dr + \frac{\pi}{4}, \tag{27}$$

$$w = \frac{1}{2} \left(\frac{V' - S'}{m + S + E - V} - \frac{1}{r} \right), \qquad \widetilde{w} = \frac{1}{2} \left(\frac{V' + S'}{m + S - E + V} + \frac{1}{r} \right). \tag{28}$$

Кроме того, мы обозначаем (в формулах (25) и во всех приводимых ниже представлениях решений ВКБ) константы нормировки C_j, относящиеся к состояниям с $k > 0$, верхним индексом $+$, а относящиеся к состояниям с $k < 0$ – индексом $-$.

В естественном предположении достаточно малой ширины уровня Γ волновую функцию квазистационарного состояния можно нормировать на одну частицу, локализованную в области потенциальной ямы I (см. по этому поводу [5]–[7]):

$$\int_{r_0}^{r_1} (F^2 + G^2)\, dr = 1.$$

При этом быстро осциллирующие функции $\cos^2 \Theta_1(r)$ и $\cos^2 \Theta_2(r)$ следует заменить их средним значением, равным $1/2$; тогда для нормировочных констант $C_1^{\pm}$ в (25) получаем

$$|C_1^{\pm}| = \left\{ \int_{r_0}^{r_1} \frac{E - V(r)}{p(r)}\, dr \right\}^{-1/2} = \left(\frac{2}{T} \right)^{1/2}. \tag{29}$$

В этом выражении величина T совпадает с периодом радиальных колебаний классической релятивистской частицы с энергией E в потенциальной яме I. Отметим, что в точке поворота $r = r_1$ выполняется равенство $E - V(r_1) = \left[\bigl(m + S(r_1)\bigr)^2 + k^2/r_1^2 \right]^{1/2}$, поэтому величина $E - V$ положительна в области I.

II. В подбарьерной области $r_1 < r < r_2$ величина p принимает чисто мнимые значения, $p = iq$, $p^2(r) < 0$, а функции $q(r)$ и $y_0(r)$ – вещественные. При этом решение ВКБ осциллирующего типа (25) продолжается здесь решением, экспоненциально убывающим с расстоянием в глубь классически запрещенной области II. Для состояний с $k > 0$ (на достаточном удалении от точек поворота r_1 и r_2) имеем

$$\begin{aligned} \chi = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = \\ = \frac{C_2^{+}}{\sqrt{qQ}} \exp\left\{ - \int_{r_2}^{r} \left[q + \frac{(m+S)V' + (E-V)S'}{2qQ} \right] dr \right\} \begin{pmatrix} -Q \\ m + S - E + V \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{30}$$

Такое же решение для состояний с $k < 0$ записывается в виде

$$\chi = \frac{C_2^{-}}{\sqrt{qQ}} \exp\left\{ - \int_{r_2}^{r} \left[q - \frac{(m+S)V' + (E-V)S'}{2qQ} \right] dr \right\} \begin{pmatrix} m + S + E - V \\ -Q \end{pmatrix}. \tag{31}$$

В двух последних формулах $Q = q + |k|r^{-1}$, а функция $q(r)$ дается формулой (10).

III. Во “внешней” классически разрешенной области $r > r_2$ квазистационарному состоянию отвечает расходящаяся волна:

$$\chi = \frac{C_3^+}{\sqrt{pP}} \exp\left\{ \int_{r_2}^{r} \left[ip + \frac{(m+S)V' + (E-V)S'}{2pP} \right] dr \right\} \begin{pmatrix} iP \\ m+S-E+V \end{pmatrix}. \qquad (32)$$

Это выражение следует использовать при рассмотрении состояний с $k > 0$, при этом $P = p + i|k|r^{-1}$, а радиальный импульс $p(r)$ снова положителен. Аналогичное выражение для состояний с $k < 0$ выглядит следующим образом:

$$\chi = \frac{C_3^-}{\sqrt{pP}} \exp\left\{ \int_{r_2}^{r} \left[ip - \frac{(m+S)V' + (E-V)S'}{2pP} \right] dr \right\} \begin{pmatrix} m+S+E-V \\ iP \end{pmatrix}. \qquad (33)$$

3.2. Формулы связи решений ВКБ. Полученные в п. 3.1 квазиклассические формулы аппроксимируют искомое решение системы Дирака (3) при всех r, за исключением малых окрестностей точек поворота r_j, $j = 0, 1, 2$. Единое решение системы (3) на всем интервале значений r можно получить путем обхода (в плоскости комплексной переменной r) точек поворота r_j и установления связи между коэффициентами $C_j^{\pm}$ квазиклассических решений (25)–(33), построенных в разных областях. Строгое математическое рассмотрение проблемы связи решений ВКБ требует, вообще говоря, учета возможности сближения полюса второго порядка в точке $r = 0$ и точки поворота r_0, точек поворота r_0 и r_1 (узкая яма, глубокие подбарьерные резонансы с энергией вблизи дна потенциальной ямы) и наличия точек перегиба эффективной потенциальной энергии $U(r, E)$. В задачах, связанных с описанием квазистационарных состояний с большими квантовыми числами, появляются дополнительные трудности, возникающие каждый раз, когда приходится учитывать сближение (друг с другом) точек поворота r_1 и r_2 (узкий барьер, ридберговские состояния атомов с энергий, близкой к вершине барьера: $E_r \to U_m$) и смещение точек поворота r_1, r_2 в комплексную плоскость (комплексные потенциалы, надбарьерные резонансы, лежащие выше классического порога ионизации: $E_r > U_m$). Мы не будем, однако, касаться этого круга значительно более сложных, но одновременно и более интересных задач; их рассмотрение выходит за рамки настоящей работы и может явиться предметом специального исследования. Здесь будет разобран только наиболее типичный случай, когда все три точки поворота r_j, $j = 0, 1, 2$, сильно разделены и их можно исследовать независимо друг от друга. Более точно, будем предполагать выполненными условия $\left| \int_{r_j}^{r_{j+1}} p(r)\, dr \right| \gg 1$, $j = 0, 1$. (Как правило, именно с такой ситуацией мы будем иметь дело в рассматриваемых в следующем разделе физических задачах.) Тогда для обхода таких точек и сшивания решений ВКБ можно пользоваться стандартными приемами [5]–[8]. Один из них, предложенный Цваном и Штюкельбергом и развиваемый впоследствии в целом ряде работ, использует факт скачкообразного изменения коэффициентов $C_j^{\pm}$ (явление Стокса) асимптотического представления решения в окрестности точки поворота r_j при переходе через линию Стокса $\mathrm{Re} \int_{r_j}^{r} p(r')\, dr' = 0$ и требование однозначности точного решения при обходе по замкнутому контуру вокруг рассматриваемой точки поворота.

Другой возможный прием состоит в том, что вблизи точек поворота r_j, $j=1,2$, система Дирака (3) сводится к уравнению второго порядка (типа нерелятивистского уравнения Шредингера) с потенциалом, линейно зависящим от $r-r_j$, решение которого описывается так называемой функцией Эйри. Затем указанное точное решение сшивается с казиклассическим по обе стороны от точки поворота r_j. Поскольку детали обоих методов достаточно полно изложены во многих литературных источниках, мы ограничимся здесь лишь указанием рецепта решения проблемы сшивания разложений ВКБ и в качестве заключительного результата приведем итоговые формулы связи между коэффициентами $C_j^{\pm}$ квазиклассических решений уравнения Дирака для рассматриваемой нами задачи с тремя изолированными точками поворота. Итак,

1) сохраняют силу обычные [5]–[8] формулы связи решений ВКБ слева и справа от точки поворота r_j, если в асимптотических формах вида (30), (31) и (32), (33) следить за поведением в окрестности рассматриваемой точки поворота только главных множителей $p^{-1/2}\exp\bigl\{\pm\int_{r_j}^{r} p\,dr\bigr\}$, сингулярных при $r\to r_j$;

2) построенные согласно этому рецепту формулы связи между коэффициентами $C_j^{\pm}$ квазиклассических решений (25)–(33) в областях I–III имеют вид

$$C_2^{\pm} = -iC_3^{\pm} = \mp\frac{C_1^{\pm}}{2}\left[\frac{E-V(r_1)+m+S(r_1)}{|k|r_1^{-1}}\right]^{\pm\frac{1}{2}}\times \\ \times\exp\biggl\{-\int_{r_1}^{r_2}\left[q\pm\frac{(m+S)V'+(E-V)S'}{2qQ}\right]dr\biggr\}. \tag{34}$$

Хотя полученные квазиклассические формулы (25)–(34) имеют весьма сложную аналитическую структуру, их применение к конкретным задачам не вызывает принципиальных затруднений, так как все величины, входящие в F и G, определены через одномерные квадратуры.

3.3. Уравнения для энергии квазистационарных уровней. Как уже отмечалось в п. 3.1, при определении квазистационарных состояний обычно требуют, чтобы решение уравнения Дирака на бесконечности представляло собой расходящуюся волну (2), (32), (33); это соответствует частице, вылетающей в конце концов из системы при ее распаде [5]. Условие отсутствия сходящейся компоненты в асимптотическом выражении для волновой функции квазистационарного состояния отбирает комплексные собственные значения энергии $E=E_r-i\Gamma/2$, где E_r – положение, а Γ – ширина резонанса, соответствующего квазистационарному состоянию. Величина Γ положительна и определяет вероятность распада в единицу времени: $W=\Gamma/\hbar$.

Выведем условие, определяющее положение квазистационарных уровней в квазиклассическом случае. Пренебрегая проницаемостью барьера в области $r_1<r<r_2$ и полагая, что слева и справа от потенциальной ямы $r_0<r<r_1$ остаются только экспоненциально убывающие решения ВКБ, находим из (25) условие квантования

$$\int_{r_0}^{r_1}\left(p+\frac{kw}{pr}\right)dr = \left(n_r+\frac{1}{2}\right)\pi, \qquad n_r=0,1,2,\ldots, \tag{35}$$

где через n_r обозначено радиальное квантовое число. Это уравнение определяет вещественную часть энергии уровня E_r. Оно отличается от обычного квазиклассического условия квантования Бора–Зоммерфельда [5] релятивистским выражением для импульса $p(r)$ и включением поправки $\sim w(r)$, учитывающей спин-орбитальное взаимодействие и приводящей к расщеплению уровней с разным знаком квантового числа k.

Как следует из выражения (28) для $w(r)$, за тонкое расщепление уровней целиком ответственна разность $V' - S'$, в которой аддитивные вклады за счет скалярного $(-S')$ и векторного (V') вариантов взаимодействия имеют противоположные знаки. Причина этого состоит, конечно, в том, что знак спин-орбитального взаимодействия зависит от лоренцовой структуры потенциалов взаимодействия. Это, кстати, можно рассматривать как отражение того обстоятельства, что в векторном поле спины частиц ориентируются в направлении $[\mathbf{F}_\text{в}\mathbf{p}]$ где $\mathbf{F}_\text{в} = -\mathbf{n}\, dV/dr$ – сила, действующая на частицу, $\mathbf{p}$ – ее импульс, $\mathbf{n}$ – единичный вектор по направлению вектора $\mathbf{r}$. В скалярном поле спины частиц ориентируются в направлении $-[\mathbf{F}_\text{c}\mathbf{p}]$, где $\mathbf{F}_\text{c} = -\mathbf{n}\, dS/dr$. Это рассуждение дает наглядное объяснение того факта, что в скалярном поле уровень $j = 3/2,\ l = 1$ лежит ниже уровня $j = 1/2,\ l = 1$, а в векторном поле – наоборот.

Мы увидим в дальнейшем (раздел 4), что в более общем случае взаимодействия частицы со скалярным и векторным полем одновременно величина и характер спин-орбитального расщепления уровней существенно зависит от относительной роли указанных взаимодействий. Таким образом, сведения о положении и тонком расщеплении уровней, в совокупности, могут уже выявить роль $S(r)$ и $V(r)$ по отдельности.

В связи с учетом в условии квантования (35) лишь спин-орбитальной поправки и пренебрежением поправкой за счет спин-спиновой связи необходимо сделать следующее пояснение. Разумеется, если действовать формально, то с помощью развитой в предыдущем разделе рекуррентной техники можно было бы получить для энергии уровня E_r и более точное уравнение, которое наряду со спин-орбитальной учитывает еще и поправку на спин-спиновое взаимодействие. Напомним, что для включения такой поправки в (35) нам пришлось бы вычислять функции $y_1(r)$ и $\varphi^{(1)}(r)$, т.е. члены порядка $\hbar$ в квазиклассическом разложении (6). Однако такое уточнение условия квантования (35) вряд ли имеет смысл, так как учет спин-спинового взаимодействия (в отличие от спин-орбитального) явился бы превышением точности квазиклассического расчета. Ниже (раздел 4) мы покажем это на примере кулоновского и осцилляторного потенциалов; для этих потенциалов формула квантования (35) точно воспроизводит энергетический спектр.

Перейдем к вычислению ширины уровня $\Gamma = 2\,\mathrm{Im}\,E$. Для этого умножим первое уравнение системы (3) на G^*, второе (после предварительного перехода к комплексно-сопряженным величинам G^*, F^* и $E^* = E_r + i\Gamma/2$) – на F, сложим их и проинтегрируем по переменной r от 0 до ∞. Интеграл по r от $G^*F' + G^{*'}F = (G^*F)'$ легко вычисляется в общем виде; при этом следует учесть, что на нижнем пределе интегрирования (при $r = 0$) произведение G^*F обращается в нуль и нетривиальный вклад дает только верхний предел интегрирования ($r = \infty$). В итоговом равенстве большинство полученных членов вещественны, и, взяв всюду мнимые части, мы сразу же придем к искомому результату:

$$\Gamma = -2\,\mathrm{Im}\big[G^*(r)F(r)\big]\Big|_{r\to\infty}. \tag{36}$$

Этот результат для ширины резонанса Γ можно получить также и прямым вычислением потока частиц, уходящих на бесконечность, при нормировке на одну частицу в области $r_0 < r < r_1$. Используя теперь асимптотические представления (32), (33) радиальных функций F и G правее точки поворота r_2, а также формулы связи (34) между константами нормировки $C_j^{\pm}$ в областях I–III, находим в главном приближении ВКБ для ширины уровня Γ следующее выражение:

$$\Gamma = \frac{\Gamma_0}{T}\exp\bigg\{-2\int_{r_1}^{r_2} q(r)\,dr\bigg\}, \tag{37}$$

где

$$\Gamma_0 = \exp\bigg\{2k\int_{r_1}^{r_2}\frac{w}{rq}\,dr\bigg\}, \tag{38}$$

а период радиальных колебаний T определен в (29).

Отметим, что полученная квазиклассическая формула (37) является релятивистским обобщением хорошо известной формулы Гамова для ширины квазистационарного уровня. Нетривиальным моментом такого обобщения является изменение выражения для периода колебаний T и появление в предэкспоненте выражения (37) дополнительного множителя Γ_0, который зависит от знака квантового числа k и обязан своим происхождением спин-орбитальной связи в смеси скалярного $S(r)$ и векторного $V(r)$ потенциалов взаимодействия. В нерелятивистском случае этот множитель практически не отличается от единицы и формула (37) допускает наглядную интерпретацию. Именно, $1/T$ есть число ударов в единицу времени частицы (локализованной внутри области I) о внутреннюю стенку ($r = r_1$) потенциального барьера $r_1 < r < r_2$, а экспоненциальный множитель $\exp\big\{-2\int_{r_1}^{r_2} q\,dr\big\}$ соответствует вероятности прохождения через этот барьер при каждом ударе.

Итак, формулы (35), (37) представляют собой основной итог проведенного исследования: они определяют спектр квазистационарных состояний спинорной частицы ($s = 1/2$) в ЭП $U(r,E)$ барьерного типа.

Во избежание недоразумений здесь важно подчеркнуть, что когда мы говорим о потенциале барьерного типа (или, эквивалентно, потенциале с барьером), то имеем в виду не исходные потенциалы $V(r)$ и $S(r)$, непосредственно входящие в систему уравнений Дирака (3), а порождаемый ими (согласно выражению (22)) энергозависящий ЭП $U(r,E)$. В несколько более общей (чем при определении (22)) постановке ЭП возникает при квадрировании уравнения Дирака, т.е. при сведении системы уравнений (3) к (одному) математически эквивалентному уравнению второго порядка (шредингеровского типа); при этом к выражению (22) для $U(r,E)$ добавляются небольшие спиновые поправки, содержащие функцию $w(r)$. В нерелятивистском случае $U(r,E) \approx S(r) + V(r)$; если же энергия связи уровня $E_b = m - E_r$ сравнима с энергией покоя m, различие между потенциалами U и $S + V$ становится весьма существенным.

В заключение данного раздела отметим, что при выключенном скалярном поле ($S = 0$) полученные здесь квазиклассические формулы для E_r и Γ полностью согласуются с известными результатами [26], [27] для этих же характеристик резонансов в чисто векторном поле $V(r) = -eA_0(r)$.

Переходя к конкретным приложениям рассмотренного метода, апробируем сначала правило квантования (35) на модельных потенциалах, для которых все вычисления проводятся аналитически.

4. СРАВНЕНИЕ С ТОЧНЫМИ РЕШЕНИЯМИ

Рассмотрим несколько примеров потенциалов $V(r)$ и $S(r)$, для которых квазиклассическое условие квантования (35) дает точные значения всех уровней энергии, включая и основное состояние.

Пример 1. Начнем с одной из простейших задач – вычисления спектра релятивистских связанных состояний в смеси скалярного $S(r)$ и векторного $V(r)$ потенциалов притяжения кулоновского вида:

$$V(r) = -\frac{\xi}{r}, \qquad S(r) = -\frac{\xi'}{r}. \tag{39}$$

Здесь ξ и ξ' – электростатическая и скалярная константы связи, соответственно. Эта задача часто используется в качестве модельного приближения при релятивистском описании спектров "экзотических" ВП-систем, например, лептоатомов, взаимодействие между составными частями которых осуществляется путем обмена квантами двух типов полей [40], [41]. Именно, если кулоновское взаимодействие $V(r) = -\xi/r$ обусловлено обменом виртуальным фотоном (квантом электромагнитного поля), то ответственное за скалярную связь взаимодействие лептона с ядром $S(r) = -\xi'/r$ может быть вызвано обменом виртуальной нейтральной частицей со спином 0. Главным кандидатом на эту роль является скалярный σ-мезон, в пользу существования которого в теории есть серьезные аргументы (см., например, [42] и имеющиеся там ссылки). К тому же сравнительно недавно появились сообщения [43] двух экспериментальных групп о наблюдении аномально широкого скалярного резонанса в каскадах нелептонных распадов тяжелых (D, B и J/Ψ) мезонов. Обратим еще внимание на то, что обнаруженный скалярный мезон обладает сравнительно большой массой ($M_\sigma = 390$ МэВ [43], [44]), поэтому отвечающий обмену такой частицей скалярный потенциал $S(r)$ на самом деле является короткодействующим (типа потенциала Юкавы). Тем не менее, как было отмечено в [40], [41], уже в рамках такой сравнительно простой модели со скалярно-векторным вариантом взаимодействия, как рассматриваемая модель (39), можно выявить многие интересные особенности энергетического спектра лептоатомов, которые сохраняются и при рассмотрении более реалистичной модели. Дальнейшие физические детали рассматриваемой модели (39) можно найти в [40], [41].

С помощью обозначений

$$\lambda = (m^2 - E^2)^{1/2}, \qquad \gamma = (k^2 - \xi^2 + \xi'^2)^{1/2} \tag{40}$$

выражения (26), (28) для $p(r)$ и $w(r)$ можно записать в виде

$$p(r)=\frac{\lambda}{r}\sqrt{(r-r_0)(r_1-r)},\qquad w(r)=-\frac{m+E}{2\bigl[\xi-\xi'+(m+E)r\bigr]},\tag{41}$$

где точки поворота r_0 и r_1 определяются формулами

$$r_{0,1}=\frac{1}{\lambda^2}\left[\xi E+\xi' m\mp\sqrt{(\xi E+\xi' m)^2-\lambda^2\gamma^2}\,\right].\tag{42}$$

В этих обозначениях условие квантования (35) приобретает вид

$$\begin{aligned}\lambda\int_{r_0}^{r_1}\sqrt{(r-r_0)(r_1-r)}\,\frac{dr}{r}-\frac{k(m+E)}{2\lambda}\int_{r_0}^{r_1}\frac{dr}{\bigl[\xi-\xi'+(m+E)r\bigr]\sqrt{(r-r_0)(r_1-r)}}=\\ =\left(n_r+\frac{1}{2}\right)\pi,\qquad n_r=0,1,2,\ldots\,.\end{aligned}\tag{43}$$

Нам будет удобно обозначить посредством I_1 и I_2 первый и второй интегралы в этой формуле, соответственно. Вычисление каждого из них можно произвести в три этапа. Сначала с помощью замены переменной интегрирования $r=\bigl[(r_1-r_0)x+(r_1+r_0)\bigr]/2$ квадратичные формы под знаком радикалов в I_1 и I_2 приводятся к диагональному виду. Затем с помощью второй подстановки $y=\bigl[(1-x)/(1+x)\bigr]^{1/2}$ подынтегральные выражения в I_1 и I_2 приводятся к рациональному виду, при этом

$$I_1=\lambda\frac{(r_1-r_0)^2}{r_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y^2}{(1+y^2)^2(y^2+a^2)}\,dy,\tag{44}$$

$$I_2=-\frac{k}{2}\sqrt{\frac{m+E}{m-E}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\bigl[\xi-\xi'+r_1(m+E)\bigr]\bigl[\xi-\xi'+r_0(m+E)\bigr]}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{y^2+1},\tag{45}$$

где $a^2=r_1/r_0$. Данные интегралы можно вычислить с помощью теоремы о вычетах. Для этого путь интегрирования в обоих интегралах (44), (45) следует замкнуть полуокружностью бесконечно большого радиуса, расположенной в верхней полуплоскости комплексной переменной y, и учесть, что полюсы подынтегрального выражения в (44) находятся в точках $y=ia$ и $y=i$, причем последний является полюсом второго порядка. В свою очередь функция под знаком интеграла (45) имеет в верхней полуплоскости единственный простой полюс в точке $y=i$. Вычислив в (44), (45) интегралы по вычетам подынтегральных функций, окончательно получим

$$\begin{aligned}&\frac{\pi}{2}\left\{\lambda r_0\left(\sqrt{\frac{r_1}{r_0}}-1\right)^2-\right.\\&\qquad\left.-\sqrt{\frac{m+E}{m-E}}\,\frac{k}{\sqrt{(\xi-\xi')^2+(\xi-\xi')(m+E)(r_0+r_1)+r_0r_1(m+E)^2}}\right\}=\\&=\left(n_r+\frac{1}{2}\right)\pi.\end{aligned}$$

После упрощения это дает уравнение для определения собственных значений энергии:

$$\frac{\xi E+\xi' m}{\sqrt{m^2-E^2}}-\gamma-\frac{1}{2}\operatorname{sgn}k=n_r+\frac{1}{2}. \tag{46}$$

Решая это уравнение относительно E, находим

$$E=m\left\{\frac{-\xi\xi'}{\xi^2+(N+\gamma)^2}\mp\left[\left(\frac{\xi\xi'}{\xi^2+(N+\gamma)^2}\right)^2-\frac{\xi'^2-(N+\gamma)^2}{\xi^2+(N+\gamma)^2}\right]^{1/2}\right\}, \tag{47}$$

причем $N=n_r+(1+\operatorname{sgn}k)/2=n-|k|,\ k=\mp(j+1/2)$ для состояний с $j=l\pm 1/2$, а $n=1,2,\dots$ – главное квантовое число. Эта формула совпадает (при всех значениях n_r и k) с известным точным выражением (см. [40, с. 186]) для спектра спинорного уравнения (1) со скалярным и электростатическим потенциалами кулоновского типа (39), хотя по квазиклассическому способу получения этой формулы она формально применима лишь для $n_r\gg 1$.

Проанализируем вкратце результаты, следующие из (47) в некоторых наиболее важных случаях.

А. Рассмотрим сначала положение, когда внешнее электростатическое поле выключено ($\xi=0$) и, таким образом, выражение для дискретных уровней энергии (47) принимает вид

$$E_\pm=\pm m\sqrt{1-\frac{\xi'^2}{(n-|k|+\gamma)^2}}, \tag{48}$$

где теперь $\gamma=\sqrt{k^2+\xi'^2}$. Эта формула показывает, что уравнение Дирака со скалярной связью при $S(r)=-\xi'/r$ имеет две симметрично расположенные (относительно нулевого уровня $E=0$) ветви энергетического спектра массивных фермионов в соответствии с двумя возможными значениями квадратного корня (48). Более определенно, положительный знак корня в формуле (48) соответствует спектру энергии частицы, а отрицательный – спектру энергии античастицы, взятой со знаком минус. Мы видим, таким образом, что специфика рассматриваемого спинорного уравнения (1) со скалярной связью проявляется в том, что оно описывает одновременно поведение частиц и античастиц. При этом внутри каждой ветви спектра порядок следования уровней энергии, начиная от основного состояния, таков: $1S_{1/2}, 2P_{3/2}, 2S_{1/2}$ и $2P_{1/2}, 3S_{1/2}$ и т.д.

Отметим еще, что с ростом константы скалярной связи ξ' энергетическая щель между спектрами частиц и античастиц уменьшается, причем в пределе $\xi'\to\infty$ уровни энергии асимптотически стремятся к нулевому значению ($E_\pm\to\pm 0$), никогда не достигая его. Поэтому ни рождения пар, ни столкновения уровней частиц и античастиц здесь не происходит, т. е. дираковский вакуум при скалярной связи устойчив.

Б. Рассмотрим теперь, что происходит, когда выключено внешнее скалярное поле. Полагая в (47) $\xi'=0$, получаем известную формулу Зоммерфельда [2] для тонкой структуры уровней водородоподобного атома

$$E_{nj}=m\left[1+\frac{\xi^2}{\left(n-|k|+\gamma\right)^2}\right]^{-1/2}. \tag{49}$$

Здесь $\gamma = \sqrt{k^2 - \xi^2}$, $\xi = Z\alpha = Z/137$, Z – заряд ядра, а α – постоянная тонкой структуры. Вторая ветвь спектра энергии, отвечающая отрицательному знаку перед корнем (47), отброшена, так как в рассматриваемом частном случае $\xi' = 0$ она приводит к посторонним решениям исходного уравнения (46): при $E < 0$ и $\xi' = 0$ левая часть (46) отрицательна, а правая положительна. С этим математическим обстоятельством связан тот хорошо известный факт, что в дискретном спектре уравнения Дирака с векторной связью нет связанных состояний для античастиц при заданном условии $V(r) < 0$, несмотря на эффективное притяжение $U(r, E) \sim -V^2/(2m)$ на малых расстояниях, которое имеет место как для частиц, так и для античастиц. Как вытекает из (49), всякий уровень дискретного спектра в кулоновском поле ядра Z возникает только из верхнего континуума и монотонно опускается с ростом Z до нуля. При $\xi = |k|$ параметр γ в (49) имеет корневую особенность, приводящую к комплексным значениям энергии E_{nj} при дальнейшем продолжении (49) на область $\xi > |k| = j+1/2$. Подробное обсуждение вопросов, связанных с указанной особенностью, содержится в обзорах [23], [24] и монографиях [18], [25], [40], [41]. Известно, что при учете конечных размеров ядра отмеченная аномалия исчезает, и связанные состояния электрона в сильном поле обрезанного (на малых расстояниях $r \leqslant 10^{-12}$ см.) кулоновского потенциала существуют вплоть до Z_c, где Z_c – значение заряда Z, при котором энергия рассматриваемого состояния достигает границы нижнего (позитронного) континуума – m. Для первых четырех уровней $1S_{1/2}$, $2P_{1/2}$, $2S_{1/2}$, $2P_{3/2}$ расчеты дают следующие значения величины критического заряда Z_c: 172, 185, 245 и 255, соответственно [24]. Существенно, что при $Z < Z_c$ ($1S_{1/2}$) электронные и позитронные состояния не перепутываются; для уравнения Дирака с векторной связью нет "позитронных уровней", которые возникали бы из нижнего континуума. Таким образом, при $Z < Z_c$ спектр уравнения Дирака в поле ядра полностью определен. Очевидно, что явления, возникающие при $Z > Z_c$, имеют существенно многочастичный характер, и их следует описывать в рамках теоретико-полевого формализма [25], [45].

Итак, на основании всего сказанного выше заключаем следующее: так как рассматриваемое здесь кулоновское поле ядра по-разному действует на частицы и античастицы (притягивает электроны и отталкивает позитроны), то спектры энергий для частиц (электронов) и античастиц (позитронов) несимметричны. Именно в этом заключается принципиальное отличие этого случая от предыдущего – взаимодействия массивных фермионов со скалярным внешним полем кулоновского типа (39); влияние последнего сводится к тому, что изменяется только масса (которая одинакова для обоих типов ферми-частиц – электронов и позитронов). Это означает, что, в отличие от электростатического, скалярное поле действует одинаково как на частицы, так и на соответствующие им античастицы (и именно поэтому дискретные спектры электронов и позитронов симметричны для уравнения Дирака со скалярной связью).

B. Остановимся еще на одном важном частном случае, реализующемся при $\xi = \xi'$. В этой ситуации $\gamma = |k|$, $n - |k| + \gamma = n$ и выражение (47) заметно упрощается:

$$E_\pm = m\left[\frac{-\xi^2}{\xi^2 + n^2} \pm \frac{n^2}{\xi^2 + n^2}\right]. \tag{50}$$

В этом выражении ветвь спектра $E_- = -m$, отвечающую нижнему знаку (минус), следует отбросить, так как в рассматриваемом частном случае $\xi = \xi'$ она приводит к нарушению равенства (46). Тогда оставшаяся в (50) ветвь спектра дает энергию частицы

$$E_+ = m\left[1 - \frac{2\xi^2}{\xi^2 + n^2}\right]. \tag{51}$$

Отсюда следует, что при увеличении константы связи ξ энергетическая щель $\Delta = m + E_+$ между связанным состоянием и нижним континуумом уменьшается. Тем не менее в пределе $\xi \to \infty$ уровни энергии не входят в нижний континуум, а лишь асимптотически приближаются к его границе, никогда не достигая значения $E = -m$. При частном значении $\xi = 1$ энергия нижнего уровня $n = 1$ становится равной нулю.

Рассмотрим вопрос о применимости квазиклассического приближения к рассматриваемому здесь составному полю кулоновского типа (39). Чтобы получить количественную оценку, преобразуем выражение (41) для квазиклассического импульса $p(r)$ к виду

$$p(r) = \frac{\gamma}{r}\sqrt{\left(\frac{r}{r_0} - 1\right)\left(1 - \frac{r}{r_1}\right)}, \tag{52}$$

где γ определяется прежним выражением (40). Тогда условие применимости квазиклассического рассмотрения принимает вид

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{p}\right) = \gamma^{-1}\left(\frac{r}{r_{\min}} - 1\right)\left[\left(\frac{r}{r_0} - 1\right)\left(1 - \frac{r}{r_1}\right)\right]^{-3/2} \ll 1 \tag{53}$$

и выполняется тем лучше, чем больше γ. Здесь $r_{\min} = 2/(r_0^{-1} + r_1^{-1})$ – та точка, в которой эффективный потенциал (22) достигает минимума. При выполнении условия $\xi' > \xi$ (что соответствует случаю сильного скалярного поля) решение системы Дирака (3) для рассматриваемых потенциалов (39) имеет квазиклассический вид во всей области изменения переменной r, за исключением узких интервалов, непосредственно примыкающих к точкам поворота r_0 и r_1. Если же $\xi \gg \xi'$, то ситуация аналогична случаю сильного кулоновского поля в теории сверхкритических атомов [26], [27].

При $\gamma \gg 1$ в области $r < r_1$ в эффективном потенциале (22) важную роль (доминирующую при $r \to 0$) играет центробежный потенциал $\gamma^2/(2mr^2)$. В этой области импульс $p(r) \sim \gamma/r$, а отношение двух слагаемых под знаком интеграла в (35) имеет порядок $k\gamma^{-2}rw(r) \sim (\xi' - \xi)^{-1}$. Поскольку квазиклассическое приближение для волновой функции имеет при $\xi' \gg \xi \sim 1$ точность порядка $(\xi' - \xi)^{-2}$ (см. [18]), то спин-орбитальные члены (как поправки порядка $(\xi' - \xi)^{-1}$) должны быть удержаны.

Пример 2. Найдем спектр энергий релятивистской частицы массы m и спина $1/2$ в смеси скалярного и векторного потенциалов осцилляторного вида

$$S(r) = V(r) = \omega\frac{r^2}{4}, \qquad \omega > 0. \tag{54}$$

Решение спектральной задачи для уравнения Дирака с указанными потенциалами представляет определенный теоретический интерес для спектроскопии адронов [31], [46].

Ясно, что составленная только из потенциалов осцилляторного типа (54) модель межкваркового $Q\bar{q}$-взаимодействия не учитывает кулоновское притяжение на малых расстояниях, отвечающее взаимодействию свободных кварков. Однако в области больших r она учитывает эффективное натяжение струны, обеспечивающее конфайнмент кварков внутри адронов. Кроме того, для этой простой модели $Q\bar{q}$-взаимодействия уравнение Дирака допускает точное решение, что само по себе представляет определенный интерес.

Для потенциалов (54) получаем

$$p(r) = \frac{\beta}{\sqrt{2}\,r}\left[(r^2 - r_0^2)(r_1^2 - r^2)\right]^{1/2}, \qquad w(r) = -\frac{1}{2r}, \tag{55}$$

$\beta = \sqrt{\omega(E+m)}$, а точки поворота r_0 и r_1 определяются формулами

$$r_{0,1} = \frac{1}{\sqrt{\omega}}\left[E - m \mp \sqrt{(E-m)^2 - 2k^2\omega^2\beta^{-2}}\right]^{1/2}. \tag{56}$$

Заменим в (35) импульс $p(r)$ и функцию $w(r)$ их явными выражениями (55) и перейдем к интегрированию по новой переменной $x = r^2$. В результате указанных преобразований правило квантования (35) приобретает вид

$$\frac{\beta}{2^{3/2}}\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{(x-x_0)(x_1-x)}\,\frac{dx}{x} - \frac{k}{2^{3/2}\beta}\int_{x_0}^{x_1}\frac{dx}{x\sqrt{(x-x_0)(x_1-x)}} = \left(n_r + \frac{1}{2}\right)\pi, \tag{57}$$

где $n_r = 0, 1, 2, \ldots$, а новые границы области интегрирования определяются по формулам $x_0 = r_0^2,\ x_1 = r_1^2$.

Вычисление интегралов квантования может быть проведено с помощью теории вычетов аналогично случаю интегралов I_1, I_2 в формуле (43). Поскольку все необходимые для такого вычисления технические детали мы уже и так достаточно подробно описали выше, приведем здесь только окончательный результат:

$$\frac{\beta(E-m)}{2^{3/2}\omega} - \frac{|k|}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sgn} k = n_r + \frac{1}{2}. \tag{58}$$

Если ввести обозначение $\mathcal{K} = |k| + (1 + \operatorname{sgn} k)/2$ и заменить параметр β его явным выражением, то последнее равенство можно переписать в виде

$$(E-m)\sqrt{2(E+m)} - (4n_r + 2\mathcal{K} + 1)\sqrt{\omega} = 0. \tag{59}$$

Решая это уравнение относительно E, мы найдем собственные значения энергии как функции от квантовых чисел n_r и $\mathcal{K}$:

$$E_{n_r,\mathcal{K}} = \frac{2m + 8\cdot 2^{2/3}m^2A^{-1/3} + 2^{1/3}A^{1/3}}{6}, \tag{60}$$

где введены обозначения

$$A = -B + \sqrt{B^2 - 1024m^6}\,, \qquad B = 32m^3 - 27\omega(1 + 2\mathcal{K} + 4n_r)^2.$$

Условие применимости полученного квазиклассического выражения (60) есть $n_r \gg 1$. Как будет показано в приложении, при точном решении уравнения Дирака со скалярным $S(r)$ и векторным $V(r)$ потенциалами осцилляторного типа (54) энергия стационарных состояний выражается формулой (60) для всех значений n_r.

Как видно из (60), каждое из состояний характеризуется двумя квантовыми числами n_r и $\mathcal{K}$. Энергия зависит только от комбинации $2n_r + \mathcal{K} = \Lambda$ квантовых чисел, поэтому $\Lambda = 1, 2, 3, \ldots$ можно назвать главным квантовым числом. Каждое значение $\Lambda \geqslant 3$ может осуществляться несколькими комбинациями значений n_r и $\mathcal{K}$, следовательно, энергетические уровни (60) со значением $\Lambda \geqslant 3$ являются вырожденными.

Пример 3. Получим спектр энергий уравнения Дирака для безмассового фермиона во внешнем скалярном поле с комбинированным потенциалом типа “воронки”

$$S(r) = -\frac{\xi'}{r} + \sigma r, \qquad \sigma > 0; \qquad V(r) = 0. \tag{61}$$

Специфика рассматриваемой модели с таким скалярным взаимодействием проявляется, в частности, в спонтанно нарушенной киральной симметрии в первоначально симметричной системе. Дело в том, что для безмассовой частицы ($m = 0$) уравнение Дирака (1) с чисто векторной связью (при $S(\mathbf{r}) = 0$) инвариантно по отношению к глобальному преобразованию волновой функции $\Psi \to \exp(i\alpha'\gamma_5)\Psi$, $\widetilde{\Psi} \to \widetilde{\Psi}\exp(i\alpha'\gamma_5)$. С точки зрения спектра киральная симметрия проявляется в вырождении всех состояний по четности; более определенно, массы состояний 0^+ и 0^- (или 1^+ и 1^-) одинаковы.

Инвариантность относительно глобальных преобразований не исчерпывает всех своих свойств симметрии безмассового уравнения Дирака. Легко проверить, что в киральном пределе ($m = 0$) система уравнений (3) инвариантна относительно более общих преобразований вида [29]

$$E \to E, \quad k \to -k, \quad S \to -S, \quad V \to V, \quad G(r) \to -F(r), \quad F(r) \to G(r), \tag{62}$$

которые не связаны с геометрической симметрией пространства-времени. Отсюда следует, что в отсутствие внешнего скалярного поля ($S(r) = 0$) спектр является вырожденным по отношению к знаку дираковского квантового числа k; т.е. спектр зависит только от полного момента j, но не по отдельности от составляющих его орбитального l и спинового $s = 1/2$ моментов (киральное вырождение).

Как легко убедится непосредственной проверкой, безмассовое уравнение Дирака инвариантно также относительно преобразований зарядового сопряжения

$$E \to -E, \quad k \to -k, \quad S \to S, \quad V \to -V, \quad G(r) \leftrightarrow F(r). \tag{63}$$

Мы видим, что эти преобразования симметрии контрастируют с предыдущими (62), поскольку связывают состояния с положительными и отрицательными значениями энергии. В частности, при отсутствии внешнего электростатического поля (чисто скалярное взаимодействие) имеет место удвоение состояний с заданным значением $|E_n|$, но противоположными знаками самой энергии $E_n = \pm|E_n|$. Данное обстоятельство позволяет ограничиться детальным исследованием лишь одной (положительной) ветви спектра $E_n > 0$, что делает более простой задачу нахождения собственных значений энергии E_n системы Дирака (3) со скалярным вариантом взаимодействия (61). Эта последняя задача может быть решена либо численно, либо в квазиклассическом приближении, которое формально применимо для высоких возбужденных состояний, но (как будет показано ниже) дает результаты с хорошей точностью даже для основного и первого возбужденного состояний.

Для потенциала (61) и частицы с нулевой массой выражения (26), (28) для $p(r)$ и $w(r)$ принимают вид

$$p(r) = \frac{\sigma}{r}\big[(r^2 - r_0^2)(r_1^2 - r^2)\big]^{1/2}, \qquad w(r) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r - P_+} + \frac{1}{r - P_-}\right), \tag{64}$$

где

$$P_\pm = \frac{1}{2\sigma}\big(-E \pm \sqrt{E^2 + 4\xi'\sigma}\,\big), \qquad \gamma = \sqrt{k^2 + \xi'^2}\,, \tag{65}$$

а положение точек поворота r_0 и r_1 задается равенством

$$r_{0,1} = \frac{1}{\sqrt{2}\,\sigma}\sqrt{E^2 + 2\xi'\sigma \mp \sqrt{(E^2 + 2\xi'\sigma)^2 - 4\sigma^2\gamma^2}}\;. \tag{66}$$

В этих обозначениях квазиклассическое условие квантования можно записать в виде

$$\begin{aligned}\sigma\int_{r_0}^{r_1}\sqrt{(r^2 - r_0^2)(r_1^2 - r^2)}\,\frac{dr}{r} &- \\ -\frac{k}{2\sigma}\sum_{i=\pm}\int_{r_0}^{r_1}\frac{dr}{(r - P_i)\sqrt{(r^2 - r_0^2)(r_1^2 - r^2)}} &= \left(n_r + \frac{1}{2}\right)\pi, \qquad n_r = 0, 1, 2, \ldots\,.\end{aligned} \tag{67}$$

Вычисление первого интеграла в левой части (67) сводится с помощью подходящих замен переменных интегрирования к вычислению по вычетам соответствующего контурного интеграла. Второй интеграл в (67) (входящий под знак суммы) выражается через полные эллиптические интегралы первого $K(\nu)$ и третьего $\Pi(\alpha^2, \nu)$ рода [47],

$$K(\nu) = \int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \nu^2\sin^2\varphi}}, \qquad \Pi(\alpha^2, \nu) = \int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{(1 - \alpha^2\sin^2\varphi)\sqrt{1 - \nu^2\sin^2\varphi}}. \tag{68}$$

В результате указанных вычислений квазиклассическое условие квантования (67) принимает вид трансцендентного уравнения

$$\begin{aligned}\frac{E^2 + 2\sigma(\xi' - \gamma)}{4\sigma} - \frac{k}{\sigma(r_0 + r_1)\pi}\bigg[2r_0\left(\frac{\Pi(\alpha_+^2, \nu)}{r_0^2 - P_+^2} + \frac{\Pi(\alpha_-^2, \nu)}{r_0^2 - P_-^2}\right) &- \\ -\left(\frac{1}{r_0 + P_+} + \frac{1}{r_0 + P_-}\right)K(\nu)\bigg] &= n_r + \frac{1}{2}.\end{aligned} \tag{69}$$

Здесь использованы новые обозначения

$$\nu = \sqrt{\frac{E^2 + 2\sigma(\xi' - \gamma)}{E^2 + 2\sigma(\xi' + \gamma)}}, \qquad \alpha_{\pm}^2 = \nu \frac{P_{\pm} + r_0}{P_{\pm} - r_0}.$$

Уравнение (69) может быть решено в явном виде в двух предельных случаях $\sigma \to 0$ и $\sigma \to \infty$. Ниже мы ограничимся рассмотрением практически важного случая слабой связи, когда при малых значениях параметра σ (а именно, при $\sigma \lesssim 0.2$ ГэВ^2) хорошо выполняется условие $E_{n_r,k}^2 \gg 2\sigma\gamma$ для всех возможных значений энергии уровней $E_{n_r,k}$. В этом случае приведенные выше формулы заметно упрощаются и уравнение (69) для квазиклассического спектра принимает довольно простой окончательный вид

$$E_{n_r,k}^2 = 4\sigma\left[n_r + \frac{1}{2} + \frac{\gamma - \xi'}{2} + \frac{k}{4\gamma} + \frac{\sigma k}{2E_{n_r,k}^2} R(E_{n_r,k})\right] + O\left(\left(\frac{\sigma\gamma}{E_{n_r,k}^2}\right)^2\right), \tag{70}$$

где $\sigma > 0$ и введено следующее обозначение:

$$R(E_{n_r,k}) = \frac{1}{\pi}\left(0.38 + \ln\frac{E_{n_r,k}^2}{\sigma\gamma}\right).$$

В том случае, когда кулоноподобный член в потенциале (61) отсутствует (т. е. при $\xi' = 0$), уравнение (70) в точности совпадает с предложенным в работе [30] квазиклассическим условием квантования уровней энергии в скалярной яме $U(r, E)$, порождаемой линейным запирающим взаимодействием, $S(r) = \sigma r, \ V(r) = 0$.

Уравнение (70) для $E_{n_r,k}$ нетрудно решить численно. Сравнение результатов таких расчетов $E_{n_r,k}$ с точными значениями [29], полученными путем численного интегрирования системы Дирака (3), показывает, что квазиклассическое уравнение (70) обеспечивает вполне приемлемую точность вычисления энергетического спектра: даже для нижних состояний с $n_r \sim 1$ погрешность в определении $E_{n_r,k}$ не превышает 5 % и быстро уменьшается с ростом n_r.

Наряду с прямым численным решением трансцендентных уравнений (69) и (70) представляется целесообразным ценой некоторых упрощений или аппроксимаций сформировать приближенные аналитические выражения для энергетических уровней, которые позволили бы без особого труда проследить зависимость $E_{n_r,k}$ от квантовых чисел n_r, k и параметров модели взаимодействия (61). Для этого заметим, что для нижних состояний с радиальным квантовым числом $n_r \sim 1$ величина $R(E_{n_r,k}) \cong 0.6 \div 0.8$. Однако с увеличением n_r эта величина быстро выходит на единицу и, как показывают численные расчеты, существует достаточно протяженная область энергетического спектра (см. таблицу), в которой можно положить $R(E_{n_r,k}) = 1$. В этом приближении уравнение (70) имеет аналитическое решение

$$\varepsilon_{n_r,k} = \frac{E_{n_r,k}}{\sqrt{\sigma}} = \pm\sqrt{N' - \xi' + \left[(N' - \xi')^2 + 2k\right]^{1/2}}\,, \tag{71}$$

Таблица. Собственные значения $E_{n_r,k}$ и $\varepsilon_{n_r,k}$ безмассового уравнения Дирака со скалярным взаимодействием (61) для двух значений кулоновского параметра ξ'; $\varepsilon_{n_r,k}$ – результат численного расчета [29]; $\varepsilon^{\text{ВКБ}}_{n_r,k}$ и $E^{\text{ВКБ}}_{n_r,k}$ – результаты численного решения трансцендентного уравнения (69); $\varepsilon^{(\text{ac})}_{n_r,k}$ и $E^{(\text{ac})}_{n_r,k}$ – асимптотика (70), $|\sigma| = 0.18$ ГэВ^2

Состояния		$\xi' = 0$			$\xi' = 0.4$	
n_r	k	$\varepsilon_{n_r,k}$[29]	$\varepsilon^{\text{ВКБ}}_{n_r,k}$	$\varepsilon^{(\text{ac})}_{n_r,k}$	$E^{\text{ВКБ}}_{n_r,k}$, ГэВ	$E^{(\text{ac})}_{n_r,k}$, ГэВ
0	-1	1.61944	1.62292	1.4142	0.55809	
1	-1	2.60263	2.60381	2.5887	1.02972	1.04765
2	-1	3.29118	3.29182	3.2886	1.33819	1.35699
3	-1	3.85541	3.85581	3.8555	1.58633	1.60356
0	-2	2.14652	2.14721	2.0009	0.82198	0.72702
1	-2	2.95197	2.95230	2.9208	1.18994	1.18375
2	-2	3.57353	3.57371	3.5616	1.46502	1.46751
3	-2	4.09947	4.09961	4.0941	1.69492	1.69967
0	-3	2.56927	2.56951	2.4495	1.01854	0.95639
1	-3	3.26852	3.26871	3.2287	1.33151	1.31723
0	-4	2.93218	2.93231	2.8284	1.18253	1.15227
0	1	2.29403	2.29251	2.3178	0.93348	0.92051
1	1	3.03103	3.03038	3.0359	1.25659	1.23879
2	1	3.62598	3.62557	3.6265	1.51411	1.49669
0	2	2.70440	2.70391	2.7443	1.09944	1.10954
1	2	3.35376	3.35350	3.3693	1.38451	1.38364
0	3	3.05967	3.05589	3.1021	1.24973	1.26591
0	4	3.40866	3.36945	3.4183	1.38513	1.40086

где $N' = 2n_r + 1 + \gamma + k/(2\gamma)$. Положительный знак корня соответствует энергии частицы, а отрицательный – энергии античастицы, взятой со знаком минус. По поводу формулы (70) и некоторых особенностей релятивистского спектра рассматриваемой модели (61) сделаем несколько замечаний.

1. Зависимость $E_{n_r,k}(\sigma) \propto \sigma^{1/2}$ следует уже из соображений скейлинга; замена $r \to \mu r$ в системе уравнений (3) с массой $m = 0$ и комбинированным потенциалом (61) при надлежащем выборе масштабного множителя μ $\left(r \to r/\sqrt{\sigma}\right)$ приводит к $E_{n_r,k} = \sqrt{\sigma}\,\varepsilon_{n_r,k}$.

2. В безмассовом уравнении Дирака во внешнем скалярном поле (61) при любых ξ' и $\sigma \neq 0$ имеется только дискретный спектр уровней энергии. Это обстоятельство имеет простое объяснение. На малых расстояниях в ЭП $U(r, E)$ модели (61) превалирует слагаемое γ^2/r^2, соответствующее отталкиванию и исключающее “падение на центр” при всяком значении параметра ξ'. С другой стороны, на больших расстояниях (где как раз и формируется энергетический спектр) в ЭП $U(r, E)$ доминирует релятивист-

ский член $S^2/(2m)$, приводящий к квадратичному запиранию $(\sigma r)^2/(2m)$ (независимо от знака параметра σ). Таким образом, ЭП $U(r,E)$ модели (20) всегда (как при положительных, так и при отрицательных значениях σ и ξ') имеет вид осцилляторной потенциальной ямы. В этом существенное отличие от нерелятивистской потенциальной модели, в которой при отрицательных значениях σ эффективный потенциал в радиальном уравнении Шредингера обладает барьером, вследствие чего вместо дискретных уровней возникают квазистационарные состояния с комплексной энергией.

3. Спектр собственных значений $E_{n_r,k}$ безмассового уравнения (1) со скалярным взаимодействием линейного вида $S(r)=\sigma r$ $(V(r)\equiv 0)$ был рассчитан с высокой точностью в работе [29] прямым численным интегрированием этого уравнения. Сравнение квазиклассического выражения (70) с полученными в работе [29] точными значениями $\varepsilon_{n_r,k}$ и с результатами решения трансцендентного уравнения (69) на ЭВМ методом минимизации дано в таблице для двух значений кулоновского параметра ξ': $\xi'=0$ и 0.4. Видно, что область применимости квазиклассической асимптотики (70), формально справедливой при условии $E^2_{n_r,k}\gg 2\sigma\gamma$ (для возбужденных состояний с $n_r\gg 1$), “затягивается” вплоть до общепринятого натяжения струны $\sigma\cong 0.18\,\text{ГэВ}^2$ даже для основного $(n_r=0)$ состояния. Это показывает, что асимптотики квазиклассического типа могут быть полезны для качественного анализа спектра исходного уравнения (1).

4. Численный расчет $E_{n_r,k}$ с использованием трансцендентного уравнения (69) показывает, что общие черты спектра слабо зависят от величины и даже знака параметра σ, если $|\sigma|\lesssim 0.18\,\text{ГэВ}^2$. Однако это утверждение несправедливо для тонкой структуры P-уровней. Например, $P_{1/2}$-уровень лежит выше $P_{3/2}$-уровня для $\sigma>0$ и ниже $P_{3/2}$-уровня, если $\sigma<0$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Найдем точные решения и спектр энергий уравнения Дирака (1) во внешних центрально-симметричных полях, задаваемых скалярным $S(r)$ и векторным $V(r)$ потенциалами осцилляторного типа (54). Исключая из системы (3) функцию $G(r)$, получим уравнение второго порядка для определения $F(r)$

$$\frac{d^2F(r)}{dr^2}+\left[(E+m)\left(E-m-\frac{\omega r^2}{2}\right)-\frac{k(k+1)}{r^2}\right]F(r)=0. \qquad (\text{П.}1)$$

В соответствии с характером асимптотического поведения радиальных функций $F(r)$ и $G(r)$ при больших и малых r будем искать решение уравнения (П.1) в виде

$$F(r)=e^{-\frac{\beta}{2^{3/2}}r^2}r^{\mathcal{K}}f(\rho), \qquad (\text{П.}2)$$

где $\rho=\beta r^2/\sqrt{2}$, а параметры β и $\mathcal{K}$ определены в (55) и (59), соответственно. Подстановка этого выражения в (П.1) приводит к следующему уравнению для функции $f(\rho)$:

$$\rho f''(\rho)+(4\alpha-\rho)f'(\rho)-\left[2\alpha-\frac{\beta(E-m)}{2^{3/2}\omega}\right]f(\rho)=0, \qquad (\text{П.}3)$$

где $\alpha = (2\mathcal{K}+1)/8$. Решение этого уравнения, конечное при $\rho = 0$, выражается (с точностью до постоянного множителя C) через вырожденную гипергеометрическую функцию $F(a, b; z)$ равенством

$$f(\rho) = CF\left(2\alpha - \frac{\beta(E-m)}{2^{3/2}\omega}, 4\alpha; \rho\right). \tag{П.4}$$

Для того чтобы фигурирующая в правой части (П.4) гипергеометрическая функция $F(a, b; \rho)$ сводилась к полиному, параметр a должен быть равен целому отрицательному числу или нулю, что приводит к уравнению (59) для определения дискретных уровней энергии.

Решение для $G(r)$ определяется по формуле

$$G(r) = \frac{1}{m+E}\left(\frac{dF(r)}{dr} + \frac{k}{r}F(r)\right) \tag{П.5}$$

с использованием полученного выше выражения для $F(r)$ и рекуррентных соотношений для вырожденных гипергеометрических функций [47]. Остающийся неопределенным в $F(r)$ и $G(r)$ общий нормировочный коэффициент C можно найти из условия: $\int_0^\infty (F^2 + G^2)\, dr = 1$.

В заключение приведем окончательные выражения для радиальных волновых функций дискретного спектра:

$$F(r) = Ce^{-\frac{\beta}{2^{3/2}}r^2} r^{\mathcal{K}} F\left(-n_r, \frac{2\mathcal{K}+1}{2}; \frac{\beta}{\sqrt{2}}r^2\right), \tag{П.6}$$

$$\begin{aligned} G(r) = C&\frac{2^{3/2}\beta}{(2\mathcal{K}+1)(m+E_{n_r\,\mathcal{K}})} e^{-\frac{\beta}{2^{3/2}}r^2} r^{\mathcal{K}+1} \times \\ &\times \left[n_r F\left(1-n_r, \frac{2\mathcal{K}+3}{2}; \frac{\beta}{\sqrt{3}}r^2\right) + \frac{2\mathcal{K}+1}{4} F\left(-n_r, \frac{2\mathcal{K}+1}{2}; \frac{\beta}{\sqrt{2}}r^2\right)\right], \end{aligned} \tag{П.7}$$

где нормировочный коэффициент

$$C = \frac{\beta^{(2\mathcal{K}+1)/4}}{2^{-1+(2\mathcal{K}+1)/8}\Gamma\left(\frac{2\mathcal{K}+1}{2}\right)} \sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{2\mathcal{K}+1}{2}+n_r\right)\left(E_{n_r,\mathcal{K}}+m\right)}{n_r!\,(3E_{n_r,\mathcal{K}}+m)}}.$$

Точные решения и спектр энергий уравнения Дирака с осцилляторным потенциалом (54) исследовались недавно в статье [48], причем рассматривался только случай состояний с $k < 0$, $\mathcal{K} = |k|$. В этом частном случае наши выражения (60), (П.6) и (П.7) воспроизводят результаты [48].

Список литературы

[1] *Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков*. Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1976.

[2] *А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий*. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1981.

[3] *F. Gross*. Phys. Rev. 1969. V. 186. P. 1448; *H. Grotch, D. R. Yennie*. Rev. Mod. Phys. 1969. V. 41. № 2. P. 350.

[4] *M. I. Eides, H. Grotch, V. A. Shelyuto*. Phys. Rep. 2001. V. 342. P. 63; hep-ph/0002158.

[5] *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*. Квантовая механика (нерелятивистская теория). М.: Наука, 1974.

[6] *А. Б. Мигдал*. Качественные методы в квантовой теории. М.: Наука, 1975.

[7] *Дж. Хединг*. Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ). М.: Мир, 1965.

[8] *Н. Фрёман, П. У. Фрёман*. ВКБ-приближение. М.: Мир, 1967.

[9] *N. Fröman, P. O. Fröman*. On the History of the so-called WKB Method from 1817 to 1926. In: Proceedings of the Niels Bohr Centennial Conference. Copenhagen 25-28 March 1985 on Semiclassical Description of Atomic and Nuclear Collision. Eds. J. Bang, J. de Boer. North-Holland, Amsterdam, 1985. P. 1.

[10] *Б. М. Смирнов, М. И. Чибисов*. ЖЭТФ. 1965. Т. 49. № 3. С. 841; *А. М. Переломов, В. С. Попов, М. В. Терентьев*. ЖЭТФ. 1966. Т. 50. № 5. С. 1393; Т. 51. № 1. С. 309; *Ф. И. Никишов, В. И. Ритус*. ЖЭТФ. 1966. Т. 50. № 1. С. 255; *В. С. Попов, Б. М. Карнаков, В. Д. Мур*. ЖЭТФ. 1998. Т. 113. № 5. С. 1579; *В. С. Лисица*. УФН. 1987. Т. 153. № 3. С. 379.

[11] *В. Д. Мур, В. С. Попов*. ЖЭТФ. 1993. Т. 104. № 7. С. 2293.

[12] *С. С. Герштейн, Л. И. Пономарев, Т. П. Пузынина*. ЖЭТФ. 1965. Т. 48. С. 633; *И. В. Комаров, Л. И. Пономарев, С. Ю. Славянов*. Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции. М.: Наука, 1976; *N. Athavan, P. O. Fröman, N. Fröman, M. Lakshmanan*. J. Math. Phys. 2001. V. 42. № 11. P. 5051; P. 5077; P. 5096.

[13] *Б. М. Карнаков, В. П. Крайнов*. Квазиклассическое приближение в квантовой механике. М.: Изд-во МИФИ, 1992.

[14] *N. Fröman, P. O. Fröman*. Phase-integral method: Allowing nearlying transition points. (With adjoined papers by A. Dzieciol, N. Fröman, P. O. Fröman et al). In: Tracts in Natural Philosophy. V. 40. Ed. C. Truesdell. Berlin: Springer, 1996.

[15] *W. Pauli*. Helv. Phys. Acta. 1932. V. 5. P. 179; *В. Паули*. Общие принципы волновой механики. М.: Гостехиздат, 1947.

[16] *S. I. Rubinov, J. B. Keller*. Phys. Rev. 1963. V. 131. P. 2789; *J. Stachel, J. Plebansky*. J. Math. Phys. 1977. V. 18. P. 2368.

[17] *В. П. Маслов*. Асимптотические методы и теория возмущений. М.: Наука, 1988; *В. П. Маслов, М. В. Федорюк*. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М.: Наука, 1976.

[18] *Ф. Б. Мигдал*. Фермионы и бозоны в сильных полях. М.: Наука, 1978.

[19] *М. С. Маринов, В. С. Попов*. ЖЭТФ. 1974. Т. 67. № 4. С. 1250.

[20] *В. С. Попов, В. Д. Мур*. ЯФ. 1973. Т. 18. № 3. С. 684; *В. П. Крайнов*. Письма в ЖЭТФ. 1971. Т. 13. С. 359; *А. Б. Мигдал, В. С. Попов, Д. Н. Воскресенский*. ЖЭТФ. 1977. Т. 72. № 3. С. 834; *В. Л. Елецкий, Д. Н. Воскресенский, В. С. Попов*. ЯФ. 1977. Т. 26. № 5. С. 994.

[21] *В. Д. Мур, В. С. Попов, Д. Н. Воскресенский*. ЯФ. 1978. Т. 27. № 2. С. 529.

[22] *В. С. Попов*. ЖЭТФ. 1970. Т. 59. № 9. С. 965.

[23] *Я. Б. Зельдович, В. С. Попов*. УФН. 1971. Т. 105. № 3. С. 403.

[24] *В. С. Попов*. Изв. АН СССР. Сер. физ. 1977. Т. 41. № 12. С. 2577.

[25] *W. Greiner, B. Muller, J. Rafelski*. Quantum Electrodynamics of Strong Fields. Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1985; *J. Reinhart, W. Greiner*. Rep. Prog. 1977. V. 40. P. 219.

[26] *В. Д. Мур, В. С. Попов, Д. Н. Воскресенский*. Письма в ЖЭТФ. 1978. Т. 28. № 3. С. 140.

[27] *В. Д. Мур, В. С. Попов.* ЯФ. 1978. Т. 28. № 3(9). С. 837.
[28] *В. С. Попов, Д. Н. Воскресенский, В. Л. Елецкий, В. Д. Мур.* ЖЭТФ. 1979. Т. 76. № 2. С. 431.
[29] *V. D. Mur, V. S. Popov, Yu. A. Simonov, V. P. Yurov.* ЖЭТФ. 1994. Т. 105. № 1. С. 3.
[30] *Ю. А. Симонов.* ЯФ. 1997. Т. 60. № 12. С. 2252; 2000. Т. 63. № 1. С. 104.
[31] *Ю. А. Симонов.* УФН. 1996. Т. 166. № 4. С. 338; *Д. С. Кузьменко, Ю. А. Симонов, В. И. Шевченко.* УФН. 2004. Т. 174. № 1. С. 3; *В. Г. Борняков, М. И. Поликарпов, Т. Сузуки, М. Н. Чернодуб, Г. Шиергольц.* УФН. 2004. Т. 174. № 1. С. 19.
[32] *В. С. Попов, А. Е. Кудрявцев, В. И. Лисин, В. Д. Мур.* ЖЭТФ. 1981. Т. 80. № 4. С. 1272.
[33] *Я. Б. Зельдович.* ФТТ. 1959. Т. 1. № 5. С. 1637.
[34] *М. В. Федорюк.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.
[35] *А. И. Базь, Я. Б. Зельдович, А. М. Переломов.* Рассеяния, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. М.: Наука, 1971.
[36] *В. Г. Кадышевский, Г. А. Кравцова, В. Н. Родионов.* ТМФ. 2002. Т. 130. № 2. С. 275.
[37] *О. Г. Ситенко, В. К. Тартаковский.* Теория ядра. Киев: Либiдь, 2000.
[38] *R. K. Janev, L. P. Presnyakov, V. P. Shevelko.* Physics of Highly Charged Ions. Berlin–Heidelberg: Springer, 1985.
[39] *В. В. Белов, В. П. Маслов.* ДАН СССР. 1990. Т. 311. № 4. С. 849.
[40] *W. Greiner.* Relativistic Quantum Mechanics. Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1990.
[41] *W. Greiner, J. Reinhardt.* Quantum Electrodynamics. Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1996.
[42] *A. Faessler et al.* Phys. Rev. D. 2003. V. 68. № 1. P. 1.
[43] *E791 Collaboration (E. M. Aitala et al).* Phys. Rev. Lett. 2001. V. 86. P. 770; *N. Wu.* BES R measurements and J/ψ decays; hep-ex/0104050.
[44] *F. E. Close, N. A. Tornqvist.* J. Phys. G. 2002. V. 28. P. R249.
[45] *А. А. Гриб, С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко.* Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях. М.: Энергоатомиздат, 1988.
[46] *D. Ebert, V. O. Galkin, R. N. Faustov.* Phys. Rev. D. 1998. V. 57. № 9. P. 5663; *D. Ebert, R. N. Faustov, V. O. Galkin.* Mod. Phys. Lett. A. 2003. V. 18. P. 1597; *DELPHI Collaboration (P. Abreu et al).* Phys. Lett. B. 1995. V. 345. P. 598; *ALEPH Collaboration (D. Buskulic et al).* Z. Phys. C. 1997. V. 73. P. 601; *CLEO Collaboration (R. Anastassov et al).* Phys. Rev. Lett. 1998. V. 80. P. 4127; hep-ex/9708035; *DELPHI Collaboration (M. Feindt, O. Podobrin).* First observations of radially excited B-mesons. Contribution to ICHEP'96. P. 01–021. DELPHI 96-93 CONF. V. 22 (JUNE 1996); *DELPHI Collaboration (D. Bloch et al).* First evidence for a radially excited D^*-meson. DELPHI Note 97-102 CONF. V. 84 (July 1997).
[47] *Г. Бейтмен, А. Эрдейи.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1967.
[48] *Wen-Chao Qiang.* Chinese Physics. 2002. V. 11. P. 757.

Поступила в редакцию 4.VIII.2004 г.,
после доработки 15.X.2004 г.