УДК 518.12

М. І. Глебена (Ужгородський нац. ун-т)
Г. Г. Цегелик (Львівський нац. ун-т імені Івана Франка)

АЛГОРИТМ ВІДШУКАННЯ МАКСИМАЛЬНОГО ЗНАЧЕННЯ ДОВІЛЬНОЇ ЛОГАРИФМІЧНО ВГНУТОЇ ФУНКЦІЇ ДВОХ ДІЙСНИХ ЗМІННИХ

The method of finding of the extremum of the arbitrary strict logarithmic concave function of two real variables is suggested. The method is based on the use of the apparatus of non-classical Newtonian majorant and diagrams functions which are given discretely.

Пропонується метод відшукання екстремуму довільної строго логарифмічно вгнутої функції двох дійсних змінних, в основі якого лежить використання апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично.

При розв'язанні різних класів прикладних задач і задач в самій математиці нерідко доводиться мати справу з відшуканням екстремуму негладких і розривних функцій. Такі ситуації зустрічаються, наприклад, в теорії апроксимації, при розв'язуванні окремих задач дослідження операцій, в застосуванні теорії керування рухом динамічних систем тощо. Тому великий інтерес становить розробка чисельних методів відшукання абсолютного екстремуму як довільних неперервно-диференційовних, так і довільних негладких і розривних функцій.

Нами розглядається підхід до побудови чисельних методів відшукання абсолютного екстремуму довільних негладких і розривних функцій, в основі якого лежить використання апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій однієї дійсної змінної, заданих таблично [1]. В [2] такий метод побудовано для функції однієї дійсної змінної, в [3] - для функцій двох дійсних змінних. В роботі розглядається побудова алгоритму методу у випадку довільних строго логарифмічно вгнутих функцій. Такий алгоритм становить самостійний інтерес, адже він є значно простіший, ніж в загальному випадку, і не є частковим випадком загального. Це випливає із того, що всі індекси діаграми Ньютона, побудованої для строго логарифмічно вгнутої функції $f(x)$ на дискретній множині точок, є вершинними.

Розглянемо довільну строго логарифмічно вгнуту функцію $f(x,y)$, яка визначена в області $D = \{a \le x \le b, c \le y \le d\}$. Вважатимемо, що $f(x,y) > 0$ для всіх $(x,y) \in D$. Якщо ж ця умова не виконується, то можемо розглядати функцію $f(x,y) + C$ таку, що $f(x,y) + C > 0$ для всіх $(x,y) \in D$.

Задача полягає в побудові алгоритму для відшукання максимального значення функції $f(x,y)$ в цій області.

В області D вибираємо деяке початкове наближення $\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)$ екстремальної точки і розглядаємо $f\left(x, y^{(0)}\right)$ як функцію однієї змінної x. На проміжку $[a,b]$ вибираємо систему точок

$$x_k = a + kh_1, \;\; k = 0, 1, \ldots, n, \;\; h_1 = (b-a)/n,$$

і знаходимо значення функції $f\left(x, y^{(0)}\right)$ в цих точках. Нехай $f\left(x_k, y^{(0)}\right) = a_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Оскільки $f(x,y)$ - строго логарифмічно вгнута функція в області $D = \{a \le x \le b, c \le y \le d\}$, то всі індекси діаграми Ньютона, побудованої для функції $f\left(x, y^{(0)}\right)$ за її значенням в точках x_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$, будуть вершинними, а числові нахили діаграми Ньютона визначатимуться за формулою

$$R_k(x) = \left(\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)^{\frac{1}{h_1}}, \; k = 1, 2, \ldots, n, \; R_0(x) = 0.$$

Зауважимо, що $R_k(x)$ не є функцією від змінної x. Змінна x вказує тільки напрям нахилу по відповідній осі.

У цьому випадку $R_0(x) < R_1(x) < R_2(x) < \ldots < R_n(x)$. Відхилення $D_k(x)$ діаграми Ньютона задовольнятимуть умову $D_k(x) > 1, \; k = 1, 2, \ldots, n-1$, $D_0(x) = D_n(x) = \infty$.

Для відшукання з заданою точністю h_1 точки максимуму функції $f\left(x, y^{(0)}\right)$ поступаємо так. Визначаємо спочатку $R_1(x)$. Якщо $R_1(x) \ge 1$, то за точку максимуму функції приймаємо x_0. Якщо $R_1(x) < 1$, то визначаємо $R_n(x)$. При $R_n(x) \le 1$ за точку максимуму функції приймаємо x_n. Припустимо, що $R_1(x) < 1$, $R_n(x) > 1$. Тоді серед точок $x_0, x_1, \ldots, x_n$ вибираємо середню. Нехай такою точкою буде x_m. Визначаємо

$$R_m(x) = \left(\frac{a_{m-1}}{a_m}\right)^{\frac{1}{h_1}}, \; R_{m+1}(x) = \left(\frac{a_m}{a_{m+1}}\right)^{\frac{1}{h_1}}.$$

Тоді можливі такі випадки:

1)$R_m(x) \le 1, \; R_{m+1}(x) \ge 1 \; (R_m(x) \ne R_{m+1}(x))$;

2)$R_m(x) > 1$;

3)$R_{m+1}(x) < 1$.

У першому випадку за точку максимуму функції приймаємо x_m; у другому шукаємо найменше значення індексу ν, для якого $R_{m-\nu}(x) \le 1$. Якщо таким значенням є $\nu = p$, то за точку максимуму функції приймаємо x_{m-p}. У третьому випадку шукаємо найменше значення індексу ν, для якого $R_{m+\nu}(x) \ge 1$. Якщо таким значенням є $\nu = q$, то за точку максимуму функції приймаємо x_{m+q}.

Припустимо, що ми знайшли точку, в якій функція $f\left(x, y^{(0)}\right)$ із заданою точністю h_1 набуває найбільшого значення. Нехай цією точкою буде точка $x^{(1)}$. Зафіксовуємо цю точку і розглядаємо $f\left(x^{(1)}, y\right)$ як функцію однієї змінної y. На проміжку $[c; d]$ вибираємо систему точок

$$y_k = c + kh_2, \; k = 0, 1, \ldots, r, \; h_2 = (d-c)/r,$$

і знаходимо значення функції $f\left(x^{(1)}, y\right)$ в цих точках. Нехай $f\left(x^{(1)}, y_k\right) = b_k$, $k = 0, 1, \ldots, r$. Оскільки функція $f(x,y)$ є строго логарифмічно вгнутою в області D, то всі індекси діаграми Ньютона, побудованої для функції $f\left(x^{(1)}, y\right)$ за її значенням в точках y_k $(k = 0, 1, \ldots, r)$ будуть вершинними, а числові нахили діаграми Ньютона визначатимуться за формулою

$$R_k(y) = \left(\frac{b_{k-1}}{b_k}\right)^{\frac{1}{h_2}}, \; k = 1, 2, \ldots, r, \; R_0(y) = 0.$$

У цьому випадку $R_0(y) < R_1(y) < R_2(y) < \ldots < R_r(y)$. Відхилення $D_k(y)$ діаграми Ньютона задовольнятимуть умову $D_k(y) > 1, \; k = 1, 2, \ldots, r-1$,

$D_0(y) = D_r(y) = \infty$. Враховуючи властивість діаграми Ньютона у випадку логарифмічно вгнутої функції, для відшукання з заданою точністю h_2 точки максимуму функції $f\left(x^{(1)}, y\right)$ поступаємо так. Визначаємо спочатку $R_1(y)$. Якщо $R_1(y) \geq 1$, то за точку максимуму функції приймаємо y_0. Якщо $R_1(y) < 1$, то визначаємо $R_r(y)$. При $R_r(y) \leq 1$ за точку максимуму функції приймаємо y_r. Припустимо, що $R_1(y) < 1$, $R_r(y) > 1$. Тоді серед точок $y_0, y_1, \ldots, y_r$ вибираємо середню. Нехай такою точкою буде y_m. Визначаємо

$$R_m(y) = \left(\frac{b_{m-1}}{b_m}\right)^{\frac{1}{h_2}},\ R_{m+1}(y) = \left(\frac{b_m}{b_{m+1}}\right)^{\frac{1}{h_2}}.$$

Тоді можливі такі випадки:

1)$R_m(y) \leq 1,\ R_{m+1}(y) \geq 1\ \ (R_m(y) \neq R_{m+1}(y))$;

2)$R_m(y) > 1$;

3)$R_{m+1}(y) < 1$.

У першому випадку за точку максимуму функції приймаємо y_m; у другому шукаємо найменше значення індексу ν, для якого $R_{m-\nu}(y) \leq 1$. Якщо таким значенням є $\nu = p$, то за точку максимуму функції приймаємо y_{m-p}. У третьому випадку шукаємо найменше значення індексу ν, для якого $R_{m+\nu}(y) \geq 1$. Якщо таким значенням є $\nu = q$, то за точку максимуму функції приймаємо y_{m+q}. Нехай функція $f\left(x^{(1)}, y\right)$ із заданою точністю h_2 приймає найбільше значення в точці $y^{(1)}$. Зафіксовуємо цю точку. Аналогічно шукаємо точку $x^{(2)}$ в якій функція $f\left(x, y^{(1)}\right)$ із заданою точністю на відповідній дискретній множині точок набуває найбільшого значення.

В процесі виконання алгоритму одержуємо послідовність точок

$$\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right), \left(x^{(1)}, y^{(1)}\right), \left(x^{(2)}, y^{(2)}\right), \ldots$$

Робота алгоритму продовжується доти, доки не буде знайдена точка $\left(x^{(s)}, y^{(s)}\right)$ така, що $x = x^{(s)}$ є з заданою точністю точкою максимуму функції $f\left(x, y^{(s-1)}\right)$, а $y = y^{(s)}$ з заданою точністю є точкою максимуму функції $f\left(x^{(s)}, y\right)$ на відповідних дискретних множинах точок. Тоді точку $\left(x^{(s)}, y^{(s)}\right)$ приймаємо за точку в якій досягається максимум функції $f(x, y)$. Якщо $\max\limits_{(x,y)\in D} f(x, y) = f(\alpha, \beta)$, то

$$\left|x^{(s)} - \alpha\right| < h_1,\ \left|y^{(s)} - \beta\right| < h_2.$$

Щоб з більшою точністю знайти точку в якій функція досягає свого найбільшого значення потрібно цей же алгоритм застосувати до функції $f(x, y)$, але за область D взяти область

$$D^{(1)} = \left\{x^{(s)} - h_1 < x < x^{(s)} + h_1,\ y^{(s)} - h_2 < y < y^{(s)} + h_2\right\}.$$

Якщо область D є всією площиною, тобто $D = \{-\infty \leq x \leq \infty,\ -\infty \leq y \leq \infty\}$, і функція $f(x, y)$ є обмеженою зверху, то за початкове наближення вибираємо довільну точку $\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)$ і визначаємо послідовність точок

$$\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right), \left(x^{(1)}, y^{(1)}\right), \left(x^{(2)}, y^{(2)}\right), \ldots,$$

яка із заданою точністю збігається до екстремальної точки. Перехід від точки $\left(x^{(i)}, y^{(i)}\right)$ до точки $\left(x^{(i+1)}, y^{(i+1)}\right)$ відбувається так.

Знаходимо точку $x^{(i+1)}$, в якій функція $f\left(x, y^{(i)}\right)$ з заданою точністю h_1 на дискретній множині точок $x^{(i)} + kh_1$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ набуває найбільшого значення. Після цього шукаємо точку $y^{(i+1)}$, в якій функція $f\left(x^{(i+1)}, y\right)$ з заданою точністю h_2 набуває найбільшого значення на дискретній множині точок $y^{(i)} + kh_2$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Спосіб відшукання точок $x^{(i+1)}$ і $y^{(i+1)}$, в яких відповідно функції $f\left(x, y^{(i)}\right)$ і $f\left(x^{(i+1)}, y\right)$ приймають найбільше значення випливає з теореми 4 [1].

Приклад 1. *Розглянемо задачу мінімізації функції*

$$f(x, y) = 100 \cdot y^2 + 0,01 \cdot |x + 10|\,.$$

Графік цієї функції зображений на мал.1.

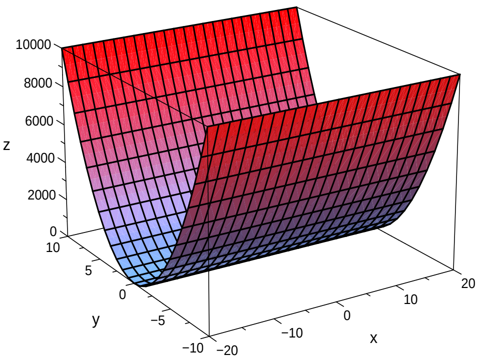

Рис. 1

Для відшукання мінімуму даної функції будемо шукати максимум функції

$$-f(x, y) + 100000,$$

оскільки $-f(x, y) + 100000 > 0$ *в області* $D = \{-20 \le x \le 20, -20 \le y \le 20\}$. *Нехай* $h_1 = h_2 = 0,1$, *виберемо за початкове наближення точку* $(-20; -20)$. *Застосувавши описаний алгоритм, знаходимо точку* $(-10; 0)$, *в якій досягається мінімуму функції* $f(x, y)$, *а значення функції в цій точці становить* $f(x, y) = 0$.

Приклад 2. *Знайдемо мінімум функції Біля*

$$f(x, y) = (1,5 - x(1 - y))^2 + \left(2,25 - x\left(1 - y^2\right)\right)^2 + \left(2,625 - x\left(1 - y^3\right)\right)^2.$$

Графік цієї функції зображений на мал.2.

Для відшукання мінімуму даної функції будемо шукати максимум функції

$$-f(x, y) + 100000,$$

оскільки $-f(x, y) + 100000 > 0$ *в області* $D = \{-5 \le x \le 55, -5 \le y \le 55\}$. *Нехай* $h_1 = h_2 = 0,1$, *виберемо за початкове наближення точку* $(-1; -1)$.

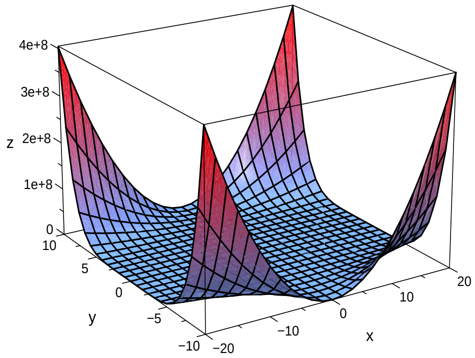

Рис. 2

Будуємо послідовність точок, яка збігається до оптимальної, в результаті чого одержуємо точку $(2,5;0,3)$. *Уточнимо одержану точку в області* $D = \{2 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 3\}$ *з кроком* $h_1 = h_2 = 0,01$. *За 11 ітерацій одержуємо точку* $(2,9;0,47)$.

Уточнивши одержану точку в області $D = \{2,8 \leq x \leq 3,4; 0,3 \leq y \leq 0,9\}$ *з кроком* $h_1 = h_2 = 0,001$, *за 10 ітерацій одержуємо точку* $(3;0,5)$, *в якій досягається мінімум функції* $f(x,y)$, *а значення функції в цій точці рівно* $f(x,y) = 0$

Висновок. Побудовано алгоритм відшукання екстремуму довільної строго логарифмічно вгнутої (строго логарифмічно опуклої) функції двох дійсних змінних. Збіжність алгоритму не залежить від вибору початкового наближення. Ефективність алгоритму проілюстровано на прикладах. Алгоритм може бути узагальнений на випадок функцій багатьох дійсних змінних.

1. *Цегелик Г. Г.* Теория мажорант и диаграмм Ньютона функций, заданных таблично, и ее приложение // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, №9. – С. 1273–1276.
2. *Глебена М. І., Цегелик Г. Г.* Модифікований чисельний метод відшукання абсолютного екстремуму негладких і розривних функцій //Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер.матем. і інформ. – 2008. - Вип.16. – С. 57-61.
3. *Глебена М. І., Цегелик Г. Г.* Чисельний метод відшукання екстремуму недиференційованих функцій двох дійсних змінних //Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер.матем. і інформ. – 2007. - Вип.14-15. – С. 18-21.

Одержано 18.06.2009