УДК 519.8

В. І. Гренджа, А. Ю. Брила (Ужгородський нац. ун-т)

ДОСЯЖНІСТЬ ОПТИМАЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНІЄЇ ЛЕКСИКОГРАФІЧНОЇ ЗАДАЧІ ПРО ОПТИМАЛЬНЕ ПРИЗНАЧЕННЯ

In paper the lexicografical setting problem with quadratic criterion functions is considered. The method of finding of optimum solutions, which are attainable on the weighed sum of criteria is proposed.

В роботі досліджується лексикографічна задача про оптимальне призначення з квадратичними критеріальними функціями. Розглядається метод знаходження оптимальних розв'язків, які є досяжними за зваженою сумою критеріїв.

Розглянемо задачу лексикографічної максимізації ([1]):

$$\max{}^L c(x)\,,\ x \in X, \tag{1}$$

де

$$c(x) = (c_1(x), c_2(x), ..., c_q(x)), \quad c_k(x) = x^T Q_k x,\ k = 1, 2, ..., q, \tag{2}$$

$$Q_k = \left\{q_{ij}^k\right\}, \quad q_{ij}^k \geq 0,\ i = 1, 2, ..., n^2,\ j = 1, 2, ..., n^2,\ k = 1, 2, ..., q,$$

а допустима множина $X \subset R^{n^2}$ визначається обмеженнями

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ \ i = 1, 2, .., n, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ \ j = 1, 2, .., n, \tag{4}$$

$$x_{ij} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right.,\ \ i = 1, 2, .., n,\ \ j = 1, 2, .., n. \tag{5}$$

Нехай

$$d_k = \max\left\{ q_{ij}^k \right| i = 1, 2, ..., n^2,\ j = 1, 2, ..., n^2 \right\},\ k = 1, 2, ..., q,$$

$$\mu_k = \min\left\{ \left|q_{ij}^k - q_{lp}^k\right| \right|\ i, j, l, p \in \left\{1, 2, ..., n^2\right\},\ q_{ij}^k \neq q_{lp}^k \right\},\ k = 1, 2, ..., q.$$

Враховуючи вигляд часткових критеріїв (2) та структуру допустимої множини X, одержуємо

$$M_k = n^4 d_k \geq \max\, c_k(x)\,,\ x \in X,\ k = 1, 2, ..., q, \tag{6}$$

$$0 < \mu_k \leq \inf\, |c_k(x) - c_k(y)|\,,\ x, y \in X, c_k(x) \neq c_k(y)\,,\ k = 1, 2, ..., q. \tag{7}$$

Розглянемо функціонал

$$L(x) = \sum_{k=1}^{q} \alpha_k c_k(x), \tag{8}$$

де α_q— довільне додатне число, а всі інші $\alpha_{q-1}, \alpha_{q-2}, ..., \alpha_1$, знайдені з умов

$$\alpha_r > \frac{1}{\mu_r} \sum_{k=r+1}^{q} \alpha_k M_k, \;\; r = q-1, q-2, ..., 1. \tag{9}$$

Позначимо $\hat{X}^*$ множину оптимальних розв'язків задачі

$$\max L(x), \, x \in \hat{X}, \tag{10}$$

де $\hat{X}$ задається обмеженнями

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \;\; i = 1, 2, .., n, \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \;\; j = 1, 2, .., n, \tag{12}$$

$$x_{ij} \geq 0, \;\;\; i = 1, 2, .., n, \;\; j = 1, 2, .., n. \tag{13}$$

Розглянемо задачу лексикографічної максимізації

$$\max{}^L F(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_q(x)), \, x \in \tilde{X}, \tag{14}$$

де $\tilde{X} = \{x \in R^n | Ax = b\}$ — непорожня обмежена множина, $f_i(x)$, $i = 1, 2, ..., q$, — опуклі на $\tilde{X}$ функції. Нехай $\tilde{X}^V$ — множина крайніх точок $\tilde{X}$, $\hat{\tilde{X}}(F)$ — множина оптимальних розв'язків цієї задачі.

Для задачі (14) знайдемо додатні коефіцієнти $\tilde{\alpha}_q, \tilde{\alpha}_{q-1}, ..., \tilde{\alpha}_1$, де $\tilde{\alpha}_q$ — довільне додатне число, а всі інші $\tilde{\alpha}_{q-1}, \tilde{\alpha}_{q-2}, ..., \tilde{\alpha}_1$, послідовно визначені з умов

$$\tilde{\alpha}_r > \frac{1}{\mu_r} \sum_{l=r+1}^{q} \tilde{\alpha}_l \tilde{M}_l, \, r = q-1, q-2, ..., 1, \tag{15}$$

$$0 < \tilde{\mu}_r \leq \inf_{\substack{x, y \in \tilde{X}^V \\ f_r(x) \neq f_r(y)}} |f_r(x) - f_r(y)|; \tag{16}$$

$$\tilde{M}_l \geq \max_{x \in X} f_l(x) - \min_{x \in X} f_l(x). \tag{17}$$

Теорема 1 ([3]). *Нехай $\hat{\tilde{X}}^*$ — множина оптимальних розв'язків задачі*

$$\max L(x) = \sum_{i=1}^{q} \tilde{\alpha}_i f_i(x), \, x \in X.$$

Тоді $\left(\hat{\tilde{X}}^* \cap \tilde{X}^V\right) \subset \hat{\tilde{X}}(F)$.

Нехай $\hat{X}^V$ — множина крайніх точок множини $\hat{X}$.

Теорема 2. *Якщо X^* множина оптимальних розв'язків задачі (1), тоді*

$$\left(\hat{X}^V \cap \hat{X}^*\right) \subset X^*$$

Доведення. Кожний з критеріїв $c_k(x)$, $k = 1, 2, ..., q$ є невід'ємно визначеною на множині $\hat{X}$ квадратичною формою. Тобто критерії є опуклими функціями на розглядуваній множині, причому

$$\min_{x \in X} c_k(x) \geq 0,\ k = 1, 2, ..., q.$$

Звідси випливає, що

$$M_k = n^4 d_k \geq \max_{x \in X} c_k(x) \geq \left(\max_{x \in X} c_k(x) - \min_{x \in X} c_k(x)\right),\ k = 1, 2, ..., q.$$

Враховуючи структуру множини $\hat{X}$, можна стверджувати, що $\hat{X}^V = X$. Тому умови (17),(16),(15) для задачі (14) еквівалентні умовам (6), (7), (9) для задачі

$$\max{}^L c(x),\ x \in \hat{X}. \tag{18}$$

Згідно теореми 1 множина $\hat{X}^V \cap \hat{X}^*$ належить множині оптимальних розв'язків цієї задачі. Оскільки кожна крайня точка множини $\hat{X}$ є допустимою альтернативою множини X, то

$$\left(\hat{X}^V \cap \hat{X}^*\right) \subset X^*.$$

Теорема доведена.

Таким чином, серед оптимальних розв'язків задачі (1) є досяжні оптимальні розв'зки, тобто розв'язки, які можуть бути знайдені шляхом зведення цієї задачі до задачі однокритеріальної оптимізації (10).

1. *Червак Ю. Ю.* Оптимізація. Непокращуваний вибір. — Ужгород: Ужгородський нац. ун–т, 2002. — 312 с.
2. *Подиновский В.В., Гаврилов В.М.* Опимизация по последовательно применяемым критериям. — М.:Наука, 1975. — 192 с.
3. *Brila A.Y.* Attainbility of optimum sulutions of lexicographical maximization problem with convex criterion functions on their weighed sum/ A.Y Brila // Discrete and Global Optimization : International Conference, Yalta, July 31 — August 2, 2008: abstracts. — Kyiv, 2008. — P. 10—11.

Одержано 23.06.2009