УДК 512.547.25

П. М. Гудивок, С. П. Кіндюх (Ужгородський нац. ун-т)

ПРО ДИКІ СКІНЧЕННІ 2-ГРУПИ НАД ЛОКАЛЬНИМИ ОБЛАСТЯМИ ЦІЛІСНОСТІ ХАРАКТЕРИСТИКИ НУЛЬ

It is making up clear, when the problem of the description of non-equivalent matrix representations of a cyclic 2-group H of order $|H| > 2$ over a noetherian local integral domain of characteristic zero residue class field of characteristic 2 is wild.

Виясняється, коли задача описання нееквівалентних матричних зображень циклічної 2-групи H порядку $|H| > 2$ над нетеровою локальною областю цілісності характеристики нуль з полем лишків характеристики 2 є дикою.

Скінченна група G називається дикою над комутативним кільцем R з одиницею, якщо описання нееквівалентних матричних R-зображень групи G включає задачу про класифікацію з точністю до подібності пар $n \times n$-матриць над деяким полем (n — довільне натуральне число). Задача про дикість скінченної p-групи G над локальною областю цілісності R характеристики нуль з полем лишків характеристики p розв'язана в таких випадках:

1) R — кільце цілих p-адичних чисел [1, 2];

2) R — повне дискретно нормоване кільце [1–5];

3) R — кільце формальних степеневих рядів від m змінних з коефіцієнтами з кільця цілих P-адичних чисел [6, 7];

4) локальна область цілісності характеристики нуль з полем лишків характеристики p ($\varepsilon \in R$, $\varepsilon^p = 1$, $\varepsilon \neq 1$) і виконується одна із таких умов:

а) $p > 3$;

б) G — 3-група порядку $|G| > 3$;

в) R — нетерова локальна область цілісності характеристики нуль з полем лишків характеристики 2, G — нециклічна 2-група або циклічна 2-група порядку $|G| > 4$ [8];

г) R — локальне факторіальне кільце характеристики нуль з полем лишків характеристики 2, G — 2-група порядку $|G| > 2$ [9].

В даній роботі досліджується дикість скінченної циклічної 2-групи над нетеровою локальною областю цілісності характеристики нуль з полем лишків характеристики 2.

Лема 1 ([8]). *Нехай G — скінченна 2-група порядку $|G|$, K — нетерова локальна область цілісності характеристики нуль з полем лишків характеристики 2 і W — максимальний ідеал кільця K. Нециклічна група G не є дикою над кільцем K тоді і тільки тоді, коли $|G| = 4$ і $W = 2K$. Циклічна група G порядку $|G| > 4$ не є дикою над кільцем K тоді і тільки тоді, коли $|G| = 8$ і $W = 2K$.*

Лема 2 ([9]). *Нехай $H = \langle a \rangle$ — циклічна 2-група порядку 4 і K — локальна область цілісності характеристики нуль з полем лишків характеристики 2 і V — максимальний ідеал кільця K, $t \in V$ і $t^2 \notin 2K$. Тоді група G є дикою над кільцем K.*

Лема 3. *Нехай $H = \langle a \rangle$ — циклічна 2-група порядку 4 і K — нетерова локальна область цілісності характеристики нуль з полем лишків характеристики 2 і $K/2K$ — не є кільцем головних ідеалів. Група H є дикою над кільцем K.*

Доведення. Нехай $\overline{K} = K/2K$. Тоді існує такий неголовний ідеал $\overline{I}$ кільця $\overline{K}$, що $\overline{I} = \langle \overline{u}, \overline{v} \rangle$, де $\overline{u} \notin \overline{v}\overline{K}$, $\overline{v} \notin \overline{u}\overline{K}$, $\overline{u} = u + 2K$, $\overline{v} = v + 2K$. Звідси випливає, що $u \notin vK + 2K$ і $v \notin uK + 2K$, тобто для будь-яких b і c із кільця K, які задовольняють умові $bu + cv = 2k\,(k \in K)$, виконується: $b \equiv c \equiv 0(\mathrm{mod}\ V)$, де $V = \mathrm{Rad}\ K$.

Відображення $\Gamma(A, B)$ наступного вигляду є K-зображенням групи H:

$$\Gamma(A,B) : a \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -E & 0 & 0 & vE & 0 & A & B \\ E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E & 0 & uE & E & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -E & 0 & uE & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E & 0 & vE \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix} = \Gamma_a(A,B),$$

де E — одинична матриця порядку n, A і B — довільні $n \times n$-матриці над кільцем K. Матрицю $\Gamma_a(A, B)$ зобразимо у вигляді:

$$\Gamma_a(A,B) = \begin{pmatrix} E \otimes \widetilde{i} & 0 & D_1 & 0 & D_2(A) & D_3(B) \\ 0 & E \otimes \widetilde{i} & 0 & D_1' & D_4 & 0 \\ 0 & 0 & -E & 0 & uE & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E & 0 & vE \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_0 & T_1 & T_3(A,B) \\ 0 & -E_1 & T_2 \\ 0 & 0 & E_1 \end{pmatrix},$$

де

$$\widetilde{i} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E \otimes \widetilde{i} = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}, \quad E_1 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} vE \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D_1' = \begin{pmatrix} uE \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D_2(A) = \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D_3(B) = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D_4 = \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$T_0 = \begin{pmatrix} E \otimes \widetilde{i} & 0 \\ 0 & E \otimes \widetilde{i} \end{pmatrix}, \quad T_1 = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_1' \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} uE & 0 \\ 0 & vE \end{pmatrix}, \quad T_3(A,B) = \begin{pmatrix} D_2(A) & D_3(B) \\ D_4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нехай зображення $\Gamma(A, B)$ і $\Gamma(A', B')$ K-еквівалентні, тобто існує така матриця $C \in GL(8n, K)$, що

$$\Gamma_a(A,B)C = C\Gamma_a(A',B'). \tag{1}$$

Очевидно, C — оборотна матриця вигляду:

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ 0 & C_4 & C_5 \\ 0 & 0 & C_6 \end{pmatrix},$$

де C_1 — матриця порядку $4n$, C_4 і C_6 — матриці порядку $2n$ (n — довільне натуральне число).

Матриці $C_i (i = \overline{1,6})$ зобразимо у вигляді:

$$C_1 = \begin{pmatrix} C_1' & C_1'' \\ C_1''' & C_1^{IV} \end{pmatrix}, \; C_1' = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}, \; C_1'' = \begin{pmatrix} C_{13} & C_{14} \\ C_{23} & C_{24} \end{pmatrix}, \; C_1''' = \begin{pmatrix} C_{31} & C_{32} \\ C_{41} & C_{42} \end{pmatrix},$$

$$C_1^{IV} = \begin{pmatrix} C_{33} & C_{34} \\ C_{43} & C_{44} \end{pmatrix}, \; C_2 = \begin{pmatrix} C_2' \\ C_2'' \end{pmatrix}, \; C_2' = \begin{pmatrix} C_{15} & C_{16} \\ C_{25} & C_{26} \end{pmatrix}, \; C_2'' = \begin{pmatrix} C_{35} & C_{36} \\ C_{45} & C_{46} \end{pmatrix},$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} C_3' \\ C_3'' \end{pmatrix}, \; C_3' = \begin{pmatrix} C_{17} & C_{18} \\ C_{27} & C_{28} \end{pmatrix}, \; C_3'' = \begin{pmatrix} C_{37} & C_{38} \\ C_{47} & C_{48} \end{pmatrix},$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} C_{55} & C_{56} \\ C_{65} & C_{66} \end{pmatrix}, \; C_5 = \begin{pmatrix} C_{57} & C_{58} \\ C_{67} & C_{68} \end{pmatrix}, \; C_6 = \begin{pmatrix} C_{77} & C_{78} \\ C_{87} & C_{88} \end{pmatrix},$$

де C_{ij} — $n \times n$-матриці над кільцем K.

Запишемо (1) у вигляді:

$$\begin{pmatrix} T_0 & T_1 & T_3(A,B) \\ 0 & -E_1 & T_2 \\ 0 & 0 & E_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ 0 & C_4 & C_5 \\ 0 & 0 & C_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ 0 & C_4 & C_5 \\ 0 & 0 & C_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_0 & T_1 & T_3(A',B') \\ 0 & -E_1 & T_2 \\ 0 & 0 & E_1 \end{pmatrix}.$$

Звідси одержимо:

$$T_0 C_1 = C_1 T_0, \tag{2}$$

$$T_0 C_2 = -T_1 C_4 + C_1 T_1 - C_2, \tag{3}$$

$$T_0 C_3 + T_1 C_5 = -T_3(A,B) C_6 + C_1 T_3(A',B') + C_2 T_2 + C_3, \tag{4}$$

$$-C_5 + T_2 C_6 = C_4 T_2 + C_5. \tag{5}$$

Запишемо (5) у вигляді:

$$\begin{pmatrix} uE & 0 \\ 0 & vE \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{77} & C_{78} \\ C_{87} & C_{88} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{55} & C_{56} \\ C_{65} & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} uE & 0 \\ 0 & vE \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} C_{57} & C_{58} \\ C_{67} & C_{68} \end{pmatrix}.$$

Звідси отримаємо:

$$\begin{cases} uC_{77} = uC_{55} + 2C_{57}, \\ uC_{78} = vC_{56} + 2C_{57}, \\ vC_{87} = uC_{65} + 2C_{67}, \\ vC_{88} = vC_{66} + 2C_{68}. \end{cases}$$

З останньої системи матимемо:

$$\begin{cases} C_{77} \equiv C_{55} (\mathrm{mod} V), \\ C_{88} \equiv C_{66} (\mathrm{mod} V), \\ C_{56} \equiv C_{65} \equiv C_{87} \equiv C_{78} \equiv 0 (\mathrm{mod} V). \end{cases} \tag{6}$$

З (2) випливає, що

$$C_1'=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ -C_{12} & C_{11} \end{pmatrix},\ C_1''=\begin{pmatrix} C_{13} & C_{14} \\ -C_{14} & C_{13} \end{pmatrix},\ C_1'''=\begin{pmatrix} C_{31} & C_{32} \\ -C_{32} & C_{31} \end{pmatrix},\ C_1^{IV}=\begin{pmatrix} C_{33} & C_{34} \\ -C_{34} & C_{33} \end{pmatrix},$$

а із (4) одержимо:

$$\begin{pmatrix} E\otimes\widetilde{i} & 0 \\ 0 & E\otimes\widetilde{i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_2' \\ C_2'' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_{55} & C_{56} \\ C_{65} & C_{66} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_1' & C_1'' \\ C_1''' & C_1^{IV} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} C_2' \\ C_2'' \end{pmatrix},$$

де $S_1=(D_1,0)$, $S_2=(0,D_1')$.

З останньої рівності отримаємо:

$$(E\otimes\widetilde{i})C_2'+S_1C_4=C_1'S_1+C_1''S_2-C_2', \tag{7}$$

$$(E\otimes\widetilde{i})C_2''+S_2C_4=C_1'''S_1+C_1^{IV}S_2-C_2''. \tag{8}$$

Умову (7) запишемо у вигляді:

$$\begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_{15} & C_{16} \\ C_{25} & C_{26} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} vE & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_{55} & C_{56} \\ C_{65} & C_{66} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ -C_{12} & C_{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} vE & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} C_{13} & C_{14} \\ -C_{14} & C_{13} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & uE \\ 0 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} C_{15} & C_{16} \\ C_{25} & C_{26} \end{pmatrix}.$$

Звідси одержимо наступні рівності:

$$\begin{cases} -C_{25}+vC_{55}=vC_{11}-C_{15}, \\ C_{15}=-vC_{12}-C_{25}, \\ -C_{26}+vC_{56}=uC_{13}-C_{16}, \\ C_{16}=-uC_{14}-C_{26}. \end{cases} \tag{9}$$

Додавши перші дві рівності системи (9), одержимо

$$v(C_{55}-C_{11}+C_{12})=-2C_{15},$$

звідки випливає:

$$C_{55}\equiv(C_{11}-C_{12})(\mathrm{mod}V). \tag{10}$$

Додавши останні дві рівності системи (9), дістанемо

$$vC_{56}+u(C_{14}-C_{13})=-2C_{16}.$$

Звідси випливає, що

$$\begin{aligned} &C_{56}\equiv 0(\mathrm{mod}V), \\ &C_{14}\equiv C_{13}(\mathrm{mod}V). \end{aligned} \tag{11}$$

Далі з (8) одержимо:

$$\begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_{35} & C_{36} \\ C_{45} & C_{46} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & uE \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_{55} & C_{56} \\ C_{65} & C_{66} \end{pmatrix}=$$

$$= \begin{pmatrix} C_{31} & C_{32} \\ -C_{32} & C_{31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} vE & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{33} & C_{34} \\ -C_{34} & C_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & uE \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} C_{35} & C_{36} \\ C_{45} & C_{46} \end{pmatrix},$$

звідки дістаємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} -C_{45} + uC_{65} = vC_{31} - C_{35}, \\ C_{35} = -vC_{32} - C_{45}, \\ -C_{46} + uC_{66} = uC_{33} - C_{36}, \\ C_{36} = -uC_{34} - C_{46}. \end{cases} \tag{12}$$

З перших двох рівнянь системи (12) одержимо:

$$uC_{65} + v(C_{32} - C_{31}) = -2C_{35},$$

звідки маємо:

$$\begin{array}{l} C_{65} \equiv 0(\mathrm{mod} V), \\ C_{32} - C_{31} \equiv 0(\mathrm{mod} V). \end{array} \tag{13}$$

З останніх двох рівнянь системи (12) одержимо:

$$C_{66} \equiv C_{33} - C_{34}(\mathrm{mod} V). \tag{14}$$

Тепер рівність (4) можна записати у вигляді:

$$\begin{pmatrix} E \otimes \widetilde{i} & 0 \\ 0 & E \otimes \widetilde{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_3' \\ C_4' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} C_5 + \begin{pmatrix} S_3(A,B) \\ S_4 \end{pmatrix} C_6 =$$

$$= \begin{pmatrix} C_1' & C_1'' \\ C_1''' & C_1^{IV} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_3(A',B') \\ S_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_2' \\ C_2'' \end{pmatrix} T_2 + \begin{pmatrix} C_3' \\ C_3'' \end{pmatrix},$$

де $S_3(A,B) = \begin{pmatrix} D_2(A) & D_3(B) \end{pmatrix}$, $S_3(A',B') = \begin{pmatrix} D_2(A') & D_3(B') \end{pmatrix}$, $S_4 = \begin{pmatrix} D_4 & 0 \end{pmatrix}$.

З останньої рівності маємо:

$$(E \otimes \widetilde{i})C_3' + S_1C_5 + S_3(A,B)C_6 = C_1'S_3(A',B') + C_1''S_4 + C_2'T_2 + C_3', \tag{15}$$

$$(E \otimes \widetilde{i})C_3'' + S_2C_5 + S_4C_6 = C_1'''S_3' + C_1^{IV}S_4 + C_2'''T_2 + C_3''. \tag{16}$$

Умову (15) запишемо у вигляді:

$$\begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{17} & C_{18} \\ C_{27} & C_{28} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} vE & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{57} & C_{58} \\ C_{67} & C_{68} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{77} & C_{78} \\ C_{87} & C_{88} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ -C_{12} & C_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{13} & C_{14} \\ -C_{14} & C_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} C_{15} & C_{16} \\ C_{25} & C_{26} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} uE & 0 \\ 0 & vE \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{17} & C_{18} \\ C_{27} & C_{28} \end{pmatrix},$$

звідки одержимо наступні рівності:

$$-C_{27} + vC_{57} + AC_{77} + BC_{87} = C_{11}A' + C_{13} + uC_{15} + C_{17}, \tag{17}$$

$$-C_{28} + vC_{58} + AC_{78} + BC_{88} = C_{11}B' + vC_{16} + C_{18}, \tag{18}$$

$$C_{17} = -C_{12}A' - C_{14} + uC_{25} + C_{27}, \tag{19}$$

$$C_{18} = -C_{12}B' + vC_{26} + C_{28}. \tag{20}$$

Із рівностей (6), (11), (17) і (19) одержимо:

$$AC_{77} \equiv (C_{11} - C_{12})A'(\mathrm{mod}V), \tag{21}$$

а із (6), (18) і (20) дістанемо:

$$BC_{88} \equiv (C_{11} - C_{12})B'(\mathrm{mod}V). \tag{22}$$

Із (16) можна одержати такі рівності:

$$\begin{aligned} &-C_{47} + uC_{67} + C_{77} = C_{31}A' + C_{33} + uC_{35} + C_{37}, \\ &C_{37} = -C_{32}A' - C_{34} + uC_{45} + C_{47}. \end{aligned}$$

Додавши ці дві рівності, матимемо:

$$C_{77} \equiv (C_{33} - C_{34})(\mathrm{mod}V). \tag{23}$$

Отже, із формул (6), (10), (14) матимемо:

$$C_{88} \equiv C_{77} \equiv C_{66} \equiv C_{55} \equiv C_{34} - C_{33} \equiv (C_{12} - C_{11})(\mathrm{mod}V).$$

Звідси і із формул (21), (22) одержимо:

$$\begin{aligned} AC_{77} &\equiv C_{77}A'(\mathrm{mod}V), \\ BC_{77} &\equiv C_{77}B'(\mathrm{mod}V). \end{aligned} \tag{24}$$

Очевидно, C_{77} — оборотна матриця над кільцем K. Із (24) випливає доведення леми.

Лема 4. *Нехай $H = \langle a \rangle$ — циклічна 2-група порядку 4, K — нетерова локальна область цілісності характеристики нуль з полем лишків характеристики 2, яка не є дискретно нормованим кільцем. Група $H = \langle a \rangle$ є дикою над кільцем K, якщо 2 не є простим елементом кільця K.*

Доведення. Із леми 2 випливає, що якщо $t \in V = \mathrm{Rad}K$ і $t^2 \notin 2K$, то група G є дикою над кільцем K. Будемо далі вважати, що для довільного $t \in V$ $t^2 \in 2K$.

Нехай

$$2 = uv, \tag{25}$$

де $u \in K$, $u \notin K^*$, $v \in K$, $v \notin K^*$, $u \notin vK$, $v \notin uK$ (K^* — мультиплікативна група кільця K). Покажемо, що тоді $\overline{K} = K/2K$ не є кільцем головних ідеалів.

Досить довести, що $\overline{W} = \langle \overline{u}, \overline{v} \rangle$ ($\overline{u} = u+2K, \overline{v} = v+2K$) не є головним ідеалом кільця $\overline{K}$. Нехай $\overline{W}$ головний ідеал кільця $\overline{K}$, тобто $\overline{W} = \overline{K}\overline{\omega}$, де $\overline{\omega} = \omega + 2K$ ($\omega \in K$). Тоді

$$\overline{u} = \overline{v}_1\overline{\omega},\ \overline{v} = \overline{v}_2\overline{\omega}\ \ (\overline{v}_i \in \overline{K}, i = 1, 2),$$

$$\overline{u} = v_1\omega + 2K = u + 2K, \overline{v} = v + 2K = v_2\omega + 2K.$$

Отже,

$$u = v_1\omega + 2\omega_1 = v_1\omega + uv\omega_1,$$

$$v = v_2\omega + 2\omega_2 = \omega_2\omega + uv\omega_2,$$

де $\omega_i \in K$ $(i = 1, 2)$. Звідси одержимо

$$u(1 - v\omega_1) = v_1\omega,$$
$$v(1 - u\omega_2) = v_2\omega,$$

тобто

$$u = v_1'\omega,\ \omega = v_2'\omega\ (v_i' \in K,\ i = 1, 2). \tag{26}$$

Тоді

$$2 = uv = \omega^2 v_1' v_2',\ \omega^2 = 2\omega_3\ (\omega_3 \in K).$$

Отже,

$$2 = \omega_3 v_1' v_2',\ 1 = \omega_3 v_1' v_2'.$$

Звідси одержуємо, що $v_1' \in K^*$, $v_2' \in K^*$. Тоді із (26) випливає, що $v = \theta u$ $(\theta \in K^*)$, а це протирічить (25). Значить, $K/2K$ не є кільцем головних ідеалів. Тоді за лемою 3 група $H = \langle a \rangle$ є дикою над кільцем K при умові (25).

Очевидно,

$$2 = \lambda u_1^{n_1} \ldots u_r^{n_r}\ (\lambda \in K^*,\ n_i \geq 1,\ i = 1, \ldots r), \tag{27}$$

де $u_1, \ldots, u_r$ — прості елементи кільця K і $u_j \neq \theta_i u_i$ $(\theta_i \in K^*,\ i \neq j)$. Із (27) і $u_j^2 \in 2K$ $(j = 1, \ldots, r)$ дістаємо, що при $r > 1$ $n_i = 1$ $(i = 1, \ldots, r)$ і $n_1 \leq 2$ при $r = 1$. Нехай $r > 1$. Тоді

$$2 = \lambda u_1 \ldots u_r = uv, \tag{28}$$

де $u = \lambda u_1$, $v = u_2 \ldots u_r$. Покажемо, що $u \notin Kv$. Нехай $u \in Kv$, тобто

$$u = u_2 \ldots u_r z\ (z \in K), \tag{29}$$

а це не можливо, бо u_1 — простий елемент кільця K і $u_1 \neq \theta_j u_j$ $(\theta_j \in K^*,\ j > 1)$. Значить, $u \notin Kv$.

Нехай $v \in Ku$, тобто

$$u_2 \ldots u_r = \alpha u_1 (\alpha \in K). \tag{30}$$

Тоді

$$\lambda u_1 u_2 \ldots u_r = \lambda\alpha u_1^2.$$

Звідси і із (28) дістаємо, що

$$2 = \lambda\alpha u_1^2 = 2\lambda\alpha\beta\ (\beta \in K).$$

Отже, $1 = \lambda\alpha\beta$, тобто $\alpha \in K^*$, а це протирічить (30). Значить, $v \notin Ku$. Тоді з (25) дістаємо, що $K/2K$ не є кільцем головних ідеалів і за лемою 3 група $H = \langle a \rangle$ є дикою над кільцем K.

Нехай

$$2 = \lambda u_1^2. \tag{31}$$

Тому що K не дискретно нормоване кільце, то існує простий елемент t_1 кільця K такий, що $t_1 \neq \theta' u_1$ $(\theta' \in K^*)$. Покажемо, що $\overline{I} = \langle \overline{t}_1, \overline{u}_1 \rangle$ $(\overline{t}_1 = t_1 + 2K,\ \overline{u}_1 = u_1 + 2K)$ не є головним ідеалом кільця $\overline{K}$. Нехай $\overline{I} = \overline{K}\overline{t}$, $\overline{t} = t + 2K$ $(t \in K)$. Тоді

$$\overline{t}_1 = \overline{\alpha}\overline{t},\ \overline{u}_1 = \overline{\beta}\overline{t}\ (\alpha, \beta \in K),$$
$$t_1 + 2K = \alpha t + 2K,\ u_1 + 2K = \beta t + 2K.$$

Отже,

$$t_1 = \alpha t + u_1^2\omega_1,\ u_1 = \beta t + u_1^2\omega_2\ (\omega_i \in K,\ i = 1, 2). \tag{32}$$

Звідси

$$\beta t = u_1(1 - u_1\omega_2) = u_1\lambda_1\ (\lambda_1 \in K^*).$$

Значить, $\beta \in K^*$, $t = \lambda' u_1$ $(\lambda' \in K^*)$. Звідси і з (32) дістаємо, що

$$t_1 = \alpha\lambda' u_1 + u_1^2\omega_1 = u_1\,(\alpha\lambda' + u_1\omega_1),$$

а це протирічить тому, що t_1 і u_1 різні прості елементи кільця K. Отже, $\overline{I} = \langle \overline{t}_1, \overline{u}_1 \rangle$ не є головним ідеалом кільця $\overline{K}$. Значить, внаслідок леми 3 і в цьому випадку група $H = \langle a \rangle$ є дикою над кільцем K.

Лема доведена.

Теорема 1. *Нехай $H = \langle a \rangle$ — циклічна група порядку 4 і K — нетерова локальна область цілісності характеристики нуль з полем лишків характеристики 2 і K не є дискретно нормованим кільцем. Тоді група $H = \langle a \rangle$ є дикою над кільцем K, якщо виконується одна з умов:*

1) 2 — *не простий елемент кільця K;*

2) *факторкільце $K/2K$ не є кільцем головних ідеалів.*

Доведення теореми випливає з лем 3 і 4.

1. *Гудивок П. М.* О модулярных и целочисленных представлениях конечных групп // ДАН СССР. – 1974. – **214**, №5. – С. 993–996.
2. *Гудивок П. М.* О представлениях конечных групп над полным дискретно нормированным кольцом // Труды Матем. ин-та АН СССР. – 1978. – **148**. – С. 96–105.
3. *Гудивок П. М.* О представлениях прямого произведения групп над полными дискретно нормированными кольцами // ДАН СССР. – 1977. – **237**, №1. – С. 25–27.
4. *Гудивок П. М.* Целочисленные представления конечных групп и задача о паре матриц // Сб. "Материалы XXIX науч. конф. проф.-препод. состава УжГУ". Секция мат. наук. – Ужгород: Ужгород. ун-т, 1975. – С. 231–240. – Деп. в ВИНИТИ, №705–76.
5. *Dieterich E.* Group rings of wild representation type // Math. Ann. – 1983. – **266**, №1. – P. 1–22.
6. *Гудивок П. М., Орос В. М., Ройтер А. В.* О представлениях конечных p-групп над кольцом формальных степенных рядов с целыми p-адическими коэффициентами // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, №6. – С. 753–765.
7. *Бондаренко В. М., Гудивок П. М.* О представлениях конечных p-групп над кольцом формальных степенных рядов с целыми P-адическими коэффициентами // Сб. "Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры". – Киев: Ин-т матем. НАН Украины, 1993. – С. 5–14.
8. *Гудивок П. М., Кіндюх С. П.* Про матричні зображення скінченних p-груп над областями цілісності характеристики нуль // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2005. – Вип. 10–11. – С. 49–56.
9. *Гудивок П. М., Кіндюх С. П.* Про матричні зображення скінченних 2-груп над локальними областями цілісності характеристики нуль // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2006. – Вип. 12–13. – С. 59–64.

Одержано 19.06.2009