УДК 517.946

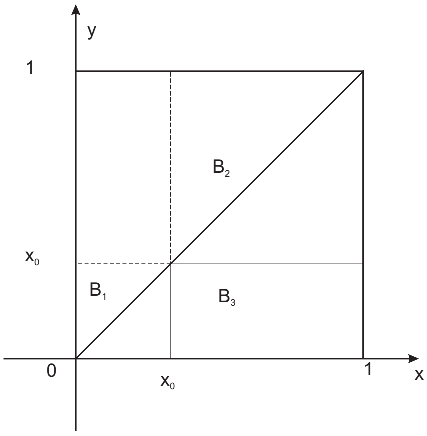
А. В. Добридень (Ужгородський нац. ун-т)

ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ ГУРСА ДЛЯ КВАЗІЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ S-ГО ПОРЯДКУ

The Gursa's problem of for quazilinear differential equation has been researched and one two-sided method's modification of the approximate integration of this problem has been constructed.

За допомогою монотонного двостороннього методу досліджено задачу Гурса для квазілінійного диференціального рівняння гіперболічного типу S-го порядку, доведено теореми існування та єдиності розв'язку, про диференціальну нерівність, отримано умову належності розв'язку поставленої задачі простору $\overline{C}^S(B)$.

В площині xOy розглянемо область $B \equiv B_1 \cup B_2 \cup B_3$, $B_1 = \{(x,y)|x \in [0,x_0), y \in (0,x_0]\}$, $B_2 = \{(x,y)|x \in [x_0,1), y \in (x_0,1]\}$, $B_3 = \{(x,y)|x \in (x_0,1], y \in [0,x_0)\}$, $\overline{B} \equiv \overline{B}_1 \cup \overline{B}_2 \cup \overline{B}_3$. Нехай $S = (s_1, s_2)$ — двовимірний мультиіндекс, s_1, s_2



— додатні числа. Позначимо

$$D^S U(x,y) = \frac{\partial^{s_1+s_2}}{\partial^{s_1} x \partial^{s_2} y} U(x,y).$$

Нехай $K = (k_1, k_2)$ — цілочисловий вектор з невід'ємними компонентами. Будемо вважати, що $K < S$, якщо для всіх $k_i < s_i$, $i = 1, 2$, а $|K| < |S|$, де $|K| = k_1 + k_2$. Введемо наступні позначення: через $S_1(r_1)$ позначимо вектор $S_1(r_1) = (s_1 - r_1, l_2)$, через $S_2(r_2)$ позначимо вектор $S_2(r_2) = (l_1, s_2 - r_2)$, $r_i, l_i = \overline{0, s_i - 1}$, $i = 1, 2$.

Дослідимо задачу: в просторі функцій $C^{(s_1,s_2)}(B) \cap C^{(s_1-1,s_2-1)}(\overline{B}) \equiv \overline{C}^S(B)$ знайти розв'язок диференціального рівняння [1, 4]

$$D^S U(x,y) = F[U(x,y)], \tag{1}$$

$$F[U(x,y)] \equiv F(x, y, U(x,y), D^{(1,0)}U(x,y), ..., D^{(s_1-1,s_2-1)}U(x,y)),$$

$F : \overline{D} \to R$, $\overline{D} \subset R^{2+(s_1-1)(s_2-1)}$, який задовольняє умови

$$D^{(i,0)}U(x_0, y) = \psi_{i,1}(y), y \in [0, x_0], D^{(0,j)}U(x, 0) = \varphi_{j,1}(x), x \in [0, x_0],$$

$$D^{(i,0)}U(1, y) = \psi_{i,2}(y), y \in [x_0, 1], D^{(0,j)}U(x, x_0) = \varphi_{j,2}(x), x \in [x_0, 1] \tag{2}$$

$$i = \overline{0, s_1 - 1}, j = \overline{0, s_2 - 1},$$

де $\psi_{i,1}(y) \in C^j([0,x_0]), \varphi_{j,1}(x) \in C^i([0,x_0]), \psi_{i,2}(y) \in C^j([x_0,1]), \varphi_{j,2}(x) \in C^i([x_0,1])$, $i=\overline{0,s_1}$, $j=\overline{0,s_2}$ — відомі функції, що задовольняють умови узгодженості

$$\begin{gathered} D^{(0,j)}\psi_{i,1}(0) = D^{(i,0)}\varphi_{j,1}(x_0), D^{(0,j)}\psi_{i,1}(x_0) = D^{(i,0)}\varphi_{j,2}(x_0), \\ D^{(0,j)}\psi_{i,2}(x_0) = D^{(i,0)}\varphi_{j,2}(1), i=\overline{0,s_1-1}, j=\overline{0,s_2-1}, \end{gathered} \tag{3}$$

Задача (1)–(3) еквівалентна інтегральному рівнянню [4]

$$U(x,y) = \begin{cases} \Phi_1(x,y) + H_1F[U(\xi,\eta)], (x,y) \in \overline{B}_1, \\ \Phi_2(x,y) + H_2F[U(\xi,\eta)], (x,y) \in \overline{B}_2, \\ \Phi_3(x,y) + H_3F[U(\xi,\eta)], (x,y) \in \overline{B}_3, \end{cases} \tag{4}$$

де

$$\begin{gathered} H_1F[U(\xi,\eta)] = \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{0}^{y} \tfrac{(x-\xi)^{s_1-1}(y-\eta)^{s_2-1}}{(s_1-1)!(s_2-1)!}F[U(\xi,\eta)]d\eta d\xi, \\ H_2F[U(\xi,\eta)] = \int\limits_{1}^{x}\int\limits_{x_0}^{y} \tfrac{(x-\xi)^{s_1-1}(y-\eta)^{s_2-1}}{(s_1-1)!(s_2-1)!}F[U(\xi,\eta)]d\eta d\xi, \\ H_3F[U(\xi,\eta)] = \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{y} \tfrac{(x-\xi)^{s_1-1}(y-\eta)^{s_2-1}}{(s_1-1)!(s_2-1)!}F[U(\xi,\eta)]d\eta d\xi, \end{gathered} \tag{5}$$

$$\begin{gathered} \Phi_1(x,y) = \sum_{i=0}^{s_1-1} \tfrac{(x-x_0)^i}{i!}\psi_{i,1}(y) + \sum_{j=0}^{s_2-1} \tfrac{y^j}{j!}\varphi_{j,1}(x) - \\ - \sum_{i=0}^{s_1-1}\sum_{j=0}^{s_2-1} \tfrac{(x-x_0)^i}{i!}\tfrac{y^j}{j!}D^{(i,0)}\varphi_{j,1}(x_0), (x,y) \in \overline{B}_1, \\ \Phi_2(x,y) = \sum_{i=0}^{s_1-1} \tfrac{(x-1)^i}{i!}\psi_{i,2}(y) + \sum_{j=0}^{s_2-1} \tfrac{(y-x_0)^j}{j!}\varphi_{j,2}(x) - \\ - \sum_{i=0}^{s_1-1}\sum_{j=0}^{s_2-1} \tfrac{(x-1)^i}{i!}\tfrac{(y-x_0)^j}{j!}D^{(i,0)}\varphi_{j,2}(1), (x,y) \in \overline{B}_2, \\ \Phi_3(x,y) = \sum_{i=0}^{s_1-1} \tfrac{(x-x_0)^i}{i!}\psi_{i,1}(y) + \sum_{j=0}^{s_2-1} \tfrac{(y-x_0)^j}{j!}\varphi_{j,2}(x) - \\ - \sum_{i=0}^{s_1-1}\sum_{j=0}^{s_2-1} \tfrac{(x-x_0)^i}{i!}\tfrac{(y-x_0)^j}{j!}D^{(i,0)}\varphi_{j,2}(x_0), (x,y) \in \overline{B}_3. \end{gathered} \tag{6}$$

Легко переконатися, що функції $\Phi_i(x,y), i = 1,2$ на характеристиках задовольняють умови (2). Оскільки заміною

$$U^*(x,y) = \begin{cases} U(x,y) - \Phi_1(x,y), (x,y) \in \overline{B}_1 \\ U(x,y) - \Phi_2(x,y), (x,y) \in \overline{B}_2, \\ U(x,y) - \Phi_3(x,y), (x,y) \in \overline{B}_3 \end{cases}$$

задача (1)–(3) зводиться до задачі з однорідними умовами (2), (3), надалі, не зменшуючи загальності міркувань, будемо вважати, що $\psi_{i,\mu}(y) = \varphi_{j,\mu}(x) \equiv 0$, $\mu = 1,2$, $i=\overline{0,s_1-1}$, $j=\overline{0,s_2-1}$.

Нехай права частина рівняння (1) $F[U(x,y)]$ належить просторові $C_1(\overline{D})$, де $C_1(\overline{D})$ — простір функцій, що задовольняють наступні умови:

1) $F[U(x,y)] \in C(\overline{D})$;

2) існує функція $f[Z(x,y);V(x,y)]$, така, що $F[U(x,y)] \equiv f[U(x,y);U(x,y)]$, $f: D_1 \to R$, $D_1 \subset R^{2+2(s_1-1)(s_2-1)}$ і для довільних функцій $Z(x,y)$, $V(x,y)$, $Z^*(x,y)$, $V^*(x,y)$, які належать простору $\overline{C}^S(B)$, задовольняють умови (2), (3) та нерівності

$$\begin{gathered} D^{S_1(r_1)}Z(x,y) \geq (\leq) D^{S_1(r_1)}Z^*(x,y), \\ D^{S_1(r_1)}V(x,y) \leq (\geq) D^{S_1(r_1)}V^*(x,y), (x,y) \in \overline{B}_1 \cup \overline{B}_2, \\ D^{S_2(r_2)}Z(x,y) \geq (\leq) D^{S_2(r_2)}Z^*(x,y), \\ D^{S_2(r_2)}V(x,y) \leq (\geq) D^{S_2(r_2)}V^*(x,y), (x,y) \in \overline{B}_3, \end{gathered} \tag{7}$$

при r_i — парних (непарних), $i = 1,2$, виконується умова

$$f[Z(x,y);V(x,y)] \geq f[Z^*(x,y);V^*(x,y)]; \tag{8}$$

3) для довільних $Z(x,y), V(x,y), Z^*(x,y), V^*(x,y) \in \overline{C}^S(B)$ функція $f[Z(x,y);$ $V(x,y)]$ задовольняє умову Ліпшіца зі сталою L

$$\begin{gathered} |f[Z(x,y);V(x,y)] - f[Z^*(x,y);V^*(x,y)]| \leq \\ \leq L \sum_{r_1=0}^{s_1-1} \sum_{r_2=0}^{s_2-1} (|D^{(r_1,r_2)}(Z(x,y) - Z^*(x,y))| + \\ + |D^{(r_1,r_2)}(V(x,y) - V^*(x,y))|). \end{gathered} \tag{9}$$

Легко показати, що якщо $F[U(x,y)] \in C(\overline{D})$ і має обмежені частинні похідні першого порядку по всім своїм аргументам, починаючи з третього, то $F[U(x,y)] \in C_1(\overline{D})$.

Означення 1. *Довільні з простору $\overline{C}^S(B)$ функції $Z_0(x,y)$, $V_0(x,y)$, що задовольняють умови (2), (3) та нерівності*

$$\begin{gathered} D^{S_1(r_1)}W_0(x,y) \geq (\leq) 0, (x,y) \in \overline{B}_1 \cup \overline{B}_2, \\ D^{S_2(r_2)}W_0(x,y) \geq (\leq) 0, (x,y) \in \overline{B}_3, \\ W_0(x,y) = Z_0(x,y) - V_0(x,y), \end{gathered}$$

r_i — парні (непарні), називаються функціями порівняння задачі (1)-(3).

Введемо наступні позначення

$$\begin{gathered} f^p(x,y) = f[Z_p(x,y);V_p(x,y)], f_p(x,y) = f[V_p(x,y);Z_p(x,y)], \\ \alpha_p(x,y) = D^S Z_p(x,y) - f^p(x,y), \beta_p(x,y) = D^S V_p(x,y) - f_p(x,y), \end{gathered} \tag{10}$$

Побудуємо послідовності функцій $\{Z_p(x,y)\}$, $\{V_p(x,y)\}$ за формулами

$$\begin{gathered} Z_{p+1}(x,y) = H_\mu(f^p(\xi,\eta) - c_p(\xi,\eta)(f^p(\xi,\eta) - f_p(\xi,\eta)), \\ V_{p+1}(x,y) = H_\mu(f_p(\xi,\eta) + c_p(\xi,\eta)(f^p(\xi,\eta) - f_p(\xi,\eta)), \end{gathered} \tag{11}$$

$(x,y) \in \overline{B}_\mu$, $\mu = 1,2,3$, де $c_p(x,y)$ — довільні невід'ємні функції з простору $C(\overline{B})$, що задовольняють нерівності

$$\sup_{\overline{B}} c_p(x,y) < 0,5. \tag{12}$$

За нульове наближення візьмемо довільні функції порівняння задачі (1)–(3), що задовольняють нерівності

$$\alpha_0(x,y) \geq 0, \beta_0(x,y) \leq 0. \tag{13}$$

Покажемо, що множина функцій нульового наближення непорожня. З цією метою позначимо

$$M = \sup_{\overline{B}} f[Z(x,y);V(x,y)], m = \inf_{\overline{B}} f[V(x,y);Z(x,y)].$$

Очевидно, що $\alpha_0(x,y) = M - f^0(x,y) \geq 0$, $\beta_0(x,y) = m - f_0(x,y) \leq 0$. Таким чином справедлива лема

Лема 1. *Якщо функції*

$$Z_0(x,y) = H_\mu M, V_0(x,y) = H_\mu m, (x,y) \in \overline{B_\mu},$$

$\mu = 1,2,3$ *належать області* $\overline{D}_1$, *тоді вони є функціями порівняння задачі* (1)–(3), *які задовольняють умови* (13).

З (11) випливають формули

$$\begin{gathered} W_{p+1}(x,y) = H_\mu((1-2c_p(\xi,\eta))(f^p(\xi,\eta)-f_p(\xi,\eta))), \\ Z_p(x,y) - Z_{p+1}(x,y) = H_\mu(\alpha_p(\xi,\eta) + c_p(\xi,\eta)(f^p(\xi,\eta)-f_p(\xi,\eta))), \\ V_p(x,y) - V_{p+1}(x,y) = H_\mu(\beta_p(\xi,\eta) - c_p(\xi,\eta)(f^p(\xi,\eta)-f_p(\xi,\eta))), \\ \alpha_{p+1}(x,y) = f^p(x,y) - f^{p+1}(x,y) - c_p(x,y)((f^p(x,y)-f_p(x,y)), \\ \beta_{p+1}(x,y) = f_p(x,y) - f_{p+1}(x,y) + c_p(x,y)(f^p(x,y)-f_p(x,y)). \end{gathered} \tag{14}$$

Нехай $Z_0(x,y)$, $V_0(x,y)$ — функції порівняння задачі (1)–(3), що задовольняють нерівності (13). Тоді $f^0(x,y) - f_0(x,y) \geq 0$, $\alpha_0(x,y) \geq 0$, $\beta_0(x,y) \leq 0$. З (14) при $p=0$ одержимо $D^S W_1(x,y) \geq 0$, $D^S(Z_0(x,y) - Z_1(x,y)) \geq 0$, $D^S(V_0(x,y) - V_1(x,y)) \leq 0$. Інтегруючи останні нерівності в області $\overline{B}_1$ s_1 раз по x від x_0 до x, s_2 раз по y від 0 до y, в області $\overline{B}_2$ s_1 раз по x від 1 до x, s_2 раз по y від x_0 до y, в області $\overline{B}_3$ s_1 раз по x від x_0 до x, s_2 раз y по від x_0 до y та враховуючи умови (2), (3), отримаємо

$$\begin{gathered} D^{S_1(r_1)}W_1(x,y) \geq (\leq) 0, \\ D^{S_1(r_1)}Z_0(x,y) \geq (\leq) D^{S_1(r_1)}Z_1(x,y) \geq (\leq) \\ \geq (\leq) D^{S_1(r_1)}V_1(x,y) \geq (\leq) D^{S_1(r_1)}V_0(x,y), (x,y) \in \overline{B}_1 \cup \overline{B}_2, \\ D^{S_2(r_2)}W_1(x,y) \geq (\leq) 0, \\ D^{S_2(r_2)}Z_0(x,y) \geq (\leq) D^{S_2(r_2)}Z_1(x,y) \geq (\leq) \\ \geq (\leq) D^{S_2(r_2)}V_1(x,y) \geq (\leq) D^{S_2(r_2)}V_0(x,y), (x,y) \in \overline{B}_3, \end{gathered}$$

при r_1, r_2 — парних (непарних). З останніх формул випливає, що $f^0(x,y) - f^1(x,y) \geq 0$, $f_0(x,y) - f_1(x,y) \leq 0$. Виберемо $c_0(x,y)$ таким чином, щоб $\alpha_1(x,y) \geq 0$, $\beta_1(x,y) \leq 0$. Тоді $Z_1(x,y)$, $V_1(x,y)$ є функціями порівняння задачі (1)-(3), що задовольняють нерівності $\alpha_1(x,y) \geq 0$, $\beta_1(x,y) \leq 0$. Приймаючи $Z_1(x,y)$, $V_1(x,y)$

за вихідні та повторюючи попередні міркування, методом математичної індукції переконуємося, що якщо на кожному кроці ітерації функції $c_p(x,y)$ вибирати таким чином, щоб виконувалися нерівності (12) та

$$\begin{aligned} &f^p(x,y) - f^{p+1}(x,y) - c_p(x,y)(f^p(x,y) - f_p(x,y)) \geq 0, \\ &f_p(x,y) - f_{p+1}(x,y) + c_p(x,y)(f^p(x,y) - f_p(x,y)) \geq 0, \end{aligned} \tag{15}$$

то послідовності функцій, побудовані за формулами (11), задовольняють нерівності

$$\begin{gathered} D^{S_1(r_1)} Z_p(x,y) \geq (\leq) D^{S_1(r_1)} Z_{p+1}(x,y) \geq (\leq) \\ \geq (\leq) D^{S_1(r_1)} V_{p+1}(x,y) \geq (\leq) D^{S_1(r_1)} V_p(x,y), (x,y) \in \overline{B}_1 \cup \overline{B}_2, \\ D^{S_2(r_2)} Z_p(x,y) \geq (\leq) D^{S_2(r_2)} Z_{p+1}(x,y) \geq (\leq) \\ \geq (\leq) D^{S_2(r_2)} V_{p+1}(x,y) \geq (\leq) D^{S_2(r_2)} V_p(x,y), (x,y) \in \overline{B}_3 \end{gathered} \tag{16}$$

при r_1, r_2 — парних (непарних).

Тим самим доведена теорема

Теорема 1. *Нехай $F[U(x,y)] \in C_1(\overline{D})$ та існують функції порівняння задачі (1)–(3) $Z_0(x,y)$, $V_0(x,y)$, що задовольняють умови (13) при $(x,y) \in B$. Тоді якщо на кожному кроці ітерації $c_p(x,y)$ вибирати таким чином, щоб виконувалися умови (12), (15), то послідовності функцій $\{Z_p(x,y)\}$, $\{V_p(x,y)\}$, побудовані згідно формул (11), задовольняють нерівності (16).*

Теорема 2. *Нехай $F[U(x,y)] \in C_1(\overline{D})$, існують функції порівняння задачі (1)–(3) $Z_0(x,y)$, $V_0(x,y)$, що задовольняють умови (13) при $(x,y) \in B$. Тоді якщо на кожному кроці ітерації $c_p(x,y)$ вибирати таким чином, щоб виконувалися умови (12), (15), то:*

i. послідовності функцій $\{Z_p(x,y)\}$, $\{V_p(x,y)\}$, побудовані за формулами (11), збігаються абсолютно і рівномірно до единого в просторі $\overline{C}^S(B)$ розв'язку задачі (1)–(3);

ii. мають місце нерівності

$$\begin{gathered} D^{S_1(r_1)} Z_p(x,y) \geq (\leq) D^{S_1(r_1)} U(x,y) \geq (\leq) \\ \geq (\leq) D^{S_1(r_1)} V_p(x,y), (x,y) \in \overline{B}_1 \cup \overline{B}_2, \\ D^{S_2(r_2)} Z_p(x,y) \geq (\leq) D^{S_2(r_2)} U(x,y) \geq (\leq) \\ \geq (\leq) D^{S_2(r_2)} V_p(x,y), (x,y) \in \overline{B}_3 \end{gathered} \tag{17}$$

при r_1, r_2 — парних (непарних), $p = 0, 1, 2, ...$;

iii. збіжність ітераційного процесу (14) не повільніша збіжності методу Пікара.

Доведення. Для доведення в області $\overline{B}$ рівномірної збіжності послідовностей $\{D^K Z_p(x,y)\}$, $\{D^K V_p(x,y)\}$ до однієї і тієї ж границі в силу нерівностей (16) достатньо показати, що $D^K W_p(x,y) \underset{p\to\infty}{\rightrightarrows} 0$, $(x,y) \in \overline{B}$, $K < S$.

З (9) маємо

$$|f^p(x,y) - f_p(x,y)| \le 2L \sum_{K<S} |D^K W_p(x,y)|, \tag{18}$$

звідки при $p=0$ маємо $|f^0(x,y) - f_0(x,y)| \le 2L \sum\limits_{K<S} |D^K W_0(x,y)|$. Позначимо $d = \max\limits_K \sup\limits_{\overline{B}} |D^K W_0(x,y)|$, $q = \max\limits_p \sup\limits_{\overline{B}} c_p(x,y)$, $|\Omega_p(x,y)| = \max\limits_K \sup\limits_{\overline{B}} |D^K W_p(x,y)|$, $\aleph$ — кількість доданків в правій частині нерівності(18). Тоді з (14) при $p=0$ отримаємо

$$D^S W_1(x,y) = f^0(x,y) - f_0(x,y) \le 2\aleph L d,$$

$$|\Omega_1(x,y)| = \begin{cases} 2\aleph Lqd(x_0 - x)y, (x,y) \in \overline{B}_1, \\ 2\aleph Lqd(1-x)(y-x_0), (x,y) \in \overline{B}_2, \\ 2\aleph Lqd(x-x_0)(x_0-y), (x,y) \in \overline{B}_3. \end{cases}$$

При $p=1$ з (14) отримаємо

$$D^S W_2(x,y) = f^1(x,y) - f_1(x,y) \le$$
$$\le 2L \sum_{K<S} |D^K W_1(x,y)| \le$$
$$\le \begin{cases} (2\aleph Lq)^2 d(x_0 - x)y, (x,y) \in \overline{B}_1, \\ (2\aleph Lq)^2 d(1-x)(y-x_0), (x,y) \in \overline{B}_2, \\ (2\aleph Lq)^2 d(x-x_0)(x_0-y), (x,y) \in \overline{B}_3, \end{cases}$$

отже,

$$|\Omega_2(x,y)| = \begin{cases} (2\aleph Lq)^2 d\frac{(x_0-x)^2 y^2}{(2!)^2}, (x,y) \in \overline{B}_1, \\ (2\aleph Lq)^2 d\frac{(1-x)^2(y-x_0)^2}{(2!)^2}, (x,y) \in \overline{B}_2, \\ (2\aleph Lq)^2 d\frac{(x-x_0)^2(x_0-y)^2}{(2!)^2}, (x,y) \in \overline{B}_3. \end{cases}$$

Припустимо, що мають місце рекурентні оцінки

$$|\Omega_p(x,y)| = \begin{cases} (2\aleph Lq)^p d\frac{(x_0-x)^p y^p}{(p!)^2}, (x,y) \in \overline{B}_1, \\ (2\aleph Lq)^p d\frac{(1-x)^p(y-x_0)^p}{(p!)^2}, (x,y) \in \overline{B}_2, \\ (2\aleph Lq)^p d\frac{(x-x_0)^p(x_0-y)^p}{(p!)^2}, (x,y) \in \overline{B}_3. \end{cases}$$

Тоді з (14) отримаємо

$$D^S W_{p+1}(x,y) = f^p(x,y) - f_p(x,y)) \le$$
$$\le 2L \sum_{K<S} |D^K W_p(x,y)| \le$$
$$\le \begin{cases} (2\aleph Lq)^{p+1} d\frac{(x_0-x)^p y^p}{(p!)^2}, (x,y) \in \overline{B}_1, \\ (2\aleph Lq)^{p+1} d\frac{(1-x)^p(y-x_0)^p}{(p!)^2}, (x,y) \in \overline{B}_2, \\ (2\aleph Lq)^{p+1} d\frac{(x-x_0)^p(x_0-y)^p}{(p!)^2}, (x,y) \in \overline{B}_3, \end{cases}$$

звідки, інтегруючи останню нерівність в області $\overline{B}_1$ s_1 раз по x від x до x_0, s_2 раз по y від 0 до y, в області $\overline{B}_2$ s_1 раз по x від x до 1, s_2 раз по y від x_0 до y, в області $\overline{B}_3$ s_1 раз по x від x_0 до x, s_2 раз y по від y до x_0 та враховуючи умови (2), (3), отримаємо

$$|\Omega_{p+1}(x,y)| = \begin{cases} (2\aleph Lq)^{p+1} d\frac{(x_0-x)^{p+1}y^{p+1}}{((p+1)!)^2}, (x,y) \in \overline{B}_1, \\ (2\aleph Lq)^{p+1} d\frac{(1-x)^{p+1}(y-x_0)^{p+1}}{((p+1)!)^2}, (x,y) \in \overline{B}_2, \\ (2\aleph Lq)^{p+1} d\frac{(x-x_0)^{p+1}(x_0-y)^{p+1}}{((p+1)!)^2}, (x,y) \in \overline{B}_3. \end{cases} \tag{19}$$

З нерівностей (19) випливає, що $\lim\limits_{p\to\infty} |\Omega_p(x,y)| = 0$, тобто $\lim\limits_{p\to\infty} D^K Z_p(x,y) = \lim\limits_{p\to\infty} D^K V_p(x,y) = D^K U(x,y)$, $K < S$.

Доведемо єдиність розв'язку задачі (1)–(3) в області $\overline{D}$. Для цього припустимо, що існують два розв'язки $U(x,y)$ та $V(x,y)$. Позначимо $W(x,y) = U(x,y) - V(x,y)$. Отримаємо

$$D^S W(x,y) \le 2L \sum_{K<S} |D^K W(x,y)|.$$

Позначивши $d_1 = \max\limits_K \sup\limits_{\overline{B}} |D^K W(x,y)|$, як і в попередньому випадку переконуємося в справедливості нерівностей

$$|\Omega(x,y)| = \begin{cases} (2\aleph Lq)^p d_1 \frac{(x_0-x)^p y^p}{(p!)^2}, (x,y) \in \overline{B}_1, \\ (2\aleph Lq)^p d_1 \frac{(1-x)^p (y-x_0)^p}{(p!)^2}, (x,y) \in \overline{B}_2, \\ (2\aleph Lq)^p d_1 \frac{(x-x_0)^p (x_0-y)^p}{(p!)^2}, (x,y) \in \overline{B}_3, \end{cases}$$

де p — довільне додатне число. А це можливо тільки тоді, коли $W(x,y) \equiv 0$.

Покажемо, що в області $\overline{D}_1$ мають місце нерівності (17). Припустимо супротивне. Нехай для деякого номера p в деякій точці $(\bar{x},\bar{y}) \in B$ виконуються нерівності

$$D^{S_1(r_1)} Z_p(\bar{x},\bar{y}) < (>) D^{S_1(r_1)} U(\bar{x},\bar{y}), (\bar{x},\bar{y}) \in \overline{B}_1 \cup \overline{B}_2,$$

або

$$D^{S_2(r_2)} Z_p(\bar{x},\bar{y}) < (>) D^{S_2(r_2)} U(\bar{x},\bar{y}), (\bar{x},\bar{y}) \in \overline{B}_3$$

при r_1, r_2 — парних (непарних). Тоді в силу нерівностей (16) отримаємо

$$D^{S_1(r_1)} Z_{p+q}(\bar{x},\bar{y}) < (>) D^{S_1(r_1)} U(\bar{x},\bar{y}), (\bar{x},\bar{y}) \in \overline{B}_1 \cup \overline{B}_2,$$

або

$$D^{S_2(r_2)} Z_{p+q}(\bar{x},\bar{y}) < (>) D^{S_2(r_2)} U(\bar{x},\bar{y}), (\bar{x},\bar{y}) \in \overline{B}_3$$

при r_1, r_2 — парних (непарних) і довільних $q \in N$, а отже, в точці $(\bar{x},\bar{y}) \in B$ послідовність функцій $\left\{D^K Z_{p+q}(x,y)\right\}$ при $q \to \infty$ не збігається до розв'язку задачі (1)–(3), що суперечить доведеному вище. Аналогічно доводяться і інші нерівності (17).

Доведемо, що збіжність ітераційного процесу (14) не повільніша збіжності методу Пікара. Для цього позначимо

$$Z^*_{p+1}(x,y) = H_\mu f^p(\xi,\eta),$$
$$V^*_{p+1}(x,y) = H_\mu f_p(\xi,\eta),$$
$$(x,y) \in \overline{B_\mu}$$

і розглянемо

$$\begin{gathered}Z^*_{p+1}(x,y) - Z_{p+1}(x,y) = H_\mu(c_p(\xi,\eta)(f^p(\xi,\eta) - f_p(\xi,\eta))),\\ V^*_{p+1}(x,y) - V_{p+1}(x,y) = H_\mu(-c_p(\xi,\eta)(f^p(\xi,\eta) - f_p(\xi,\eta))).\end{gathered}$$

Оскільки $c_p(x,y)(f^p(x,y) - f_p(x,y)) \geq 0$, то $Z^*_{p+1}(x,y) - Z_{p+1}(x,y) \geq 0$, $V^*_{p+1}(x,y) - V_{p+1}(x,y) \leq 0$, що й потрібно було показати. і теорема доведена повністю.

Теорема 3. *Нехай права частина рівняння* (1) $F[U(x,y)] \in C_1(\overline{D})$ *і в просторі функцій* $\overline{C}^S(B)$ *існує така функція* $Z_0(x,y)$ $(V_0(x,y))$, *яка задовольняє однорідні умови* (2) *і нерівності*

$$\begin{gathered}D^{S_1(r_1)}Z_0(x,y) \geq (\leq)0(D^{S_1(r_1)}V_0(x,y) \leq (\geq)0), (x,y) \in \overline{B}_1 \cup \overline{B}_2,\\ D^{S_2(r_2)}Z_0(x,y) \geq (\leq)0(D^{S_2(r_2)}V_0(x,y) \leq (\geq)0), (x,y) \in \overline{B}_3,\\ D^S Z_0(x,y) - f[Z_0(x,y);0] \geq 0, f[0;Z_0(x,y)] \geq 0,\\ \big(D^S V_0(x,y) - f[V_0(x,y);0] \leq 0, f[0;V_0(x,y)] \leq 0\big)\end{gathered} \tag{20}$$

при r_1, r_2 *— парних (непарних). Тоді розв'язок задачі Гурса для рівняння* (1) *з однорідними умовами* (2) *задовольняє нерівності*

$$\begin{gathered}D^{S_1(r_1)}U(x,y) \geq (\leq)0(D^{S_1(r_1)}U(x,y) \leq (\geq)0), (x,y) \in \overline{B}_1 \cup \overline{B}_2,\\ D^{S_2(r_2)}U(x,y) \geq (\leq)0(D^{S_2(r_2)}U(x,y) \leq (\geq)0), (x,y) \in \overline{B}_3,\end{gathered} \tag{21}$$

при r_1, r_2 *— парних (непарних).*

Доведення. Функції $Z_0(x,y)$ і $V_0(x,y) \equiv 0$ ($Z_0(x,y) \equiv 0$ і $V_0(x,y)$) є функціями порівняння задачі (1), (2), а в силу умов (20) $\alpha_0(x,y) \geq 0$, $\beta_0(x,y) \leq 0$. На підставі теореми 2 мають місце нерівності (17), звідки при $p = 0$ одержимо

$$\begin{gathered}D^{S_1(r_1)}Z_0(x,y) \geq (\leq)D^{S_1(r_1)}U(x,y) \geq (\leq)D^{S_1(r_1)}V_0(x,y) \equiv 0,\\ (0 \equiv D^{S_1(r_1)}Z_0(x,y) \geq (\leq)D^{S_1(r_1)}U(x,y) \geq (\leq)D^{S_1(r_1)}V_0(x,y)), (x,y) \in \overline{B}_1 \cup \overline{B}_2,\\ D^{S_2(r_2)}Z_0(x,y) \geq (\leq)D^{S_2(r_2)}U(x,y) \geq (\leq)D^{S_2(r_2)}V_0(x,y) \equiv 0,\\ (0 \equiv D^{S_2(r_2)}Z_0(x,y) \geq (\leq)D^{S_2(r_2)}U(x,y) \geq (\leq)D^{S_2(r_2)}V_0(x,y))), (x,y) \in \overline{B}_3,\end{gathered}$$

при r_1, r_2 — парних (непарних), що й потрібно було показати. Теорема доведена.

Розглянемо два квазілінійні рівняння

$$D^S Z(x,y) = F[Z(x,y)] \tag{22}$$

та

$$D^S V(x,y) = G[V(x,y)], \tag{23}$$

де $F[Z(x,y)]$, $G[V(x,y)]$ — функції, що задовольняють наступні умови

а) $F[Z(x,y)], G[V(x,y)] \in C_1(\overline{D})$;

б) функції $F[Z(x,y)]$, $G[V(x,y)]$ такі, що для будь-яких $Z^*(x,y)$, $V^*(x,y)$, які належать простору $\overline{C}^S(B)$ та задовольняють умови (2), (3) і нерівності

$$D^{S_1(r_1)}Z^*(x,y) \geq (\leq) D^{S_1(r_1)}V^*(x,y), (x,y) \in \overline{B}_1 \cup \overline{B}_2,$$
$$D^{S_2(r_2)}Z^*(x,y) \geq (\leq) D^{S_2(r_2)}V^*(x,y), (x,y) \in \overline{B}_3,$$

при r_i — парних (непарних), $i = 1, 2$, виконуються умови

$$F[Z^*(x,y)] \geq F[V^*(x,y)], G[Z^*(x,y)] \geq G[V^*(x,y)];$$

в) $F[Z(x,y)]$ має обмежені частинні похідні першого порядку по всім своїм аргументам, починаючи з третього, тобто

$$\begin{gathered} a_{S_1(r_1)}(x,y) = \frac{\partial F}{\partial D^{S_1(r_1)}Z(x,y)} \geq (\leq) 0, \\ (x,y) \in \overline{B}_1 \cup \overline{B}_2, \\ a_{S_2(r_2)}(x,y) = \frac{\partial F}{\partial D^{S_2(r_2)}Z(x,y)} \geq (\leq) 0, \\ (x,y) \in \overline{B}_3 \end{gathered} \tag{24}$$

при r_1, r_2 — парних (непарних);

г) для довільної функції $Q(x,y)$, що належить області визначення функцій $F[U(x,y)]$, $G[V(x,y)]$ та задовольняє умови (2), (3), $F[Z(x,y)]$ та $G[V(x,y)]$ задовольняють нерівність

$$F[Q(x,y)] - G[Q(x,y)] \geq 0. \tag{25}$$

Теорема 4. *Нехай функції $F[Z(x,y)]$, $G[V(x,y)]$ задовольняють умови а)–г). Тоді якщо існують розв'язки задач* (22), (2), (3) *і* (23), (2), (3), *то вони задовольняють нерівності*

$$D^{S_1(r_1)}Z(x,y) \geq (\leq) D^{S_1(r_1)}V(x,y), (x,y) \in \overline{B}_1 \cup \overline{B}_2,$$
$$D^{S_2(r_2)}Z(x,y) \geq (\leq) D^{S_2(r_2)}V(x,y), (x,y) \in \overline{B}_3$$

при r_1, r_2 — парних (непарних).

Доведення. Позначимо $W(x,y) = Z(x,y) - V(x,y)$, тоді з (22), (23) одержимо

$$\begin{gathered} D^S W(x,y) = F[Z(x,y)] - G[V(x,y)] = \\ = \sum_{K<S} \frac{\partial \hat{f}}{\partial D^K \hat{Z}(x,y)} D^K W(x,y) + F[V(x,y)] - G[V(x,y)] = \\ = \sum_{K<S} \hat{a}_K(x,y) D^K W(x,y) + b(x,y), \end{gathered}$$

де $b(x,y) = F[V(x,y)] - G[V(x,y)]$.

Розглянемо задачу Гурса

$$\begin{gathered} D^S W(x,y) = \sum_{K<S} \hat{a}_K(x,y) D^K W(x,y) + b(x,y) \equiv A[W(x,y)], \\ D^{(i,0)}W(x_0,y) = D^{(0,j)}W(x,0) = D^{(i,0)}W(1,y) = D^{(0,j)}W(x,x_0) = 0, \\ i = \overline{0, s_1 - 1}, j = \overline{0, s_2 - 1}. \end{gathered} \tag{26}$$

Оскільки в силу нерівностей (25) $b(x,y) \geq 0$ і мають місце нерівності (24), то $A[W(x,y)] \equiv A[W^{+}(x,y)]$, тобто розв'язок задачі (26) задовольняє нерівності

$$D^{S_1(r_1)}W(x,y) \geq (\leq) 0, (x,y) \in \overline{B}_1 \cup \overline{B}_2,$$
$$D^{S_2(r_2)}W(x,y) \geq (\leq) 0, (x,y) \in \overline{B}_3,$$

при r_1, r_2 — парних (непарних), що й потрібно було показати. Теорема доведена.

Лема 2. *Нехай* $F[U(x,y)] \in C(\overline{D})$, *функції* $\psi_{i,1}(y) \in C^j([0,x_0])$, $\varphi_{j,1}(x) \in C^i([0,x_0])$, $\psi_{i,2}(y) \in C^j([x_0,1])$, $\varphi_{j,2}(x) \in C^i([x_0,1])$, $i = \overline{0, s_1 - 1}$, $j = \overline{0, s_2 - 1}$, *задовольняють умови узгодженості* (3) *і*

$$\begin{aligned} &D^{(s_1,0)}\varphi_{s_2-1,1}(x_0) - D^{(s_1,0)}\varphi_{s_2-1,2}(x_0) + \int\limits_0^{x_0} F[\eta, \psi_{0,1}(\eta), .., \psi_{s_1-1,1}(\eta)]d\eta = 0, \\ &D^{(0,s_2)}\psi_{s_1-1,2}(x_0) - D^{(0,s_2)}\psi_{s_1-1,1}(x_0) - \int\limits_{x_0}^{1} F[\xi, \varphi_{0,2}(\xi), ..., \varphi_{s_2-1,2}(\xi)]d\xi = 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Тоді розв'язок задачі (1)–(3) $U(x,y)$ *належить простору* $\overline{C}^S(B)$.

Доведення. Враховуючи (4)–(5), легко переконатися, що $D^{(i,j)}U_1(x_0,y) = D^{(i,j)}U_3(x_0,y)$, $D^{(i,j)}U_2(x,x_0) = D^{(i,j)}U_3(x,x_0)$, $i = \overline{0, s_1 - 1}, j = \overline{0, s_2 - 1}$. Тому для того, щоб розв'язок був регулярним в області $\overline{B}$, потрібно, щоб виконувалися рівності

$$D^{(s_1-1,s_2)}U_1(x_0,y) = D^{(s_1-1,s_2)}U_3(x_0,y),$$
$$D^{(s_1,s_2-1)}U_1(x_0,y) = D^{(s_1,s_2-1)}U_3(x_0,y),$$
$$D^{(s_1-1,s_2)}U_2(x,x_0) = D^{(s_1-1,s_2)}U_3(x,x_0),$$
$$D^{(s_1,s_2-1)}U_2(x,x_0) = D^{(s_1,s_2-1)}U_3(x,x_0).$$

Маємо

$$D^{(s_1,s_2-1)}U_1(x_0,y) = D^{(s_1,0)}\varphi_{s_2-1,1}(x_0) + \int\limits_0^{y} F[\eta, \psi_{0,1}(\eta), .., \psi_{s_1-1,1}(\eta)]d\eta,$$
$$D^{(s_1-1,s_2)}U_1(x_0,y) = D^{(0,s_2)}\psi_{s_1-1,1}(y),$$
$$D^{(s_1,s_2-1)}U_2(x,x_0) = D^{(s_1,0)}\varphi_{s_2-1,2}(x),$$
$$D^{(s_1-1,s_2)}U_2(x,x_0) = D^{(0,s_2)}\psi_{s_1-1,2}(x_0) + \int\limits_1^{x} F[\xi, \varphi_{0,2}(\xi), ..., \varphi_{s_2-1,2}(\xi)]d\xi,$$
$$D^{(s_1,s_2-1)}U_3(x_0,y) = D^{(s_1,0)}\varphi_{s_2-1,2}(x_0) + \int\limits_{x_0}^{y} F[\eta, \psi_{0,1}(\eta), .., \psi_{s_1-1,1}(\eta)]d\eta,$$
$$D^{(s_1-1,s_2)}U_3(x_0,y) = D^{(0,s_2)}\psi_{s_1-1,1}(y),$$
$$D^{(s_1,s_2-1)}U_3(x,x_0) = D^{(s_1,0)}\varphi_{s_2-1,2}(x),$$
$$D^{(s_1-1,s_2)}U_3(x,x_0) = D^{(0,s_2)}\psi_{s_1-1,1}(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} F[\xi, \varphi_{0,2}(\xi), ..., \varphi_{s_2-1,2}(\xi)]d\xi,$$

звідки одержимо

$$D^{(s_1-1,s_2)}U_1(x_0,y)-D^{(s_1-1,s_2)}U_3(x_0,y)=0,$$
$$D^{(s_1,s_2-1)}U_2(x,x_0)-D^{(s_1,s_2-1)}U_3(x,x_0)=0,$$
$$D^{(s_1,s_2-1)}U_1(x_0,y)-D^{(s_1,s_2-1)}U_3(x_0,y)=$$
$$=D^{(s_1,0)}\varphi_{s_2-1,1}(x_0)-D^{(s_1,0)}\varphi_{s_2-1,2}(x_0)+\int\limits_0^{x_0}F[\eta,\psi_{0,1}(\eta),..,\psi_{s_1-1,1}(\eta)]d\eta=0,$$
$$D^{(s_1-1,s_2)}U_2(x,x_0)-D^{(s_1-1,s_2)}U_3(x,x_0)=$$
$$=D^{(0,s_2)}\psi_{s_1-1,2}(x_0)-D^{(0,s_2)}\psi_{s_1-1,1}(x_0)-\int\limits_{x_0}^{1}F[\xi,\varphi_{0,2}(\xi),...,\varphi_{s_2-1,2}(\xi)]d\xi=0,$$

що й потрібно було показати.

1. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1981. – 448 с.
2. *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика. – М.: Мир, 1969. – 448 с.
3. *Курпель Н. С., Шувар Б. А.* Двусторонние операторные неравенства и их применения. – Киев: Наукова думка, 1980. – 268 с.
4. *Маринецъ В.В., Добриденъ А.В.* Узагальнена задача Гурса // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2003. – Вип. 8. – С. 79-90.
5. *Маринецъ В.В.* Деякі підходи до побудови наближеного розв'язку задачі Гурса для систем визначених квазілінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними з аргументом, що відхиляється // Укр. мат. журнал. – 1995. – т. 47, № 12. – С. 1667-1675.

Одержано 19.06.2009