УДК 517.9

І. І. Король (Ужгородський нац. ун-т)

ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ВИРОДЖЕНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ СИСТЕМ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

In this paper the general solution of the linear homogeneous degenerative systems of differential-algebraical equations with impulse action are built. The problem of existence of the solutions of the Caushy problem systems was solved.

У роботі побудовано загальний розв'язок лінійних вироджених диференціально-алгебраїчних рівнянь з імпульсною дією, розв'язано питання існування розв'язків задачі Коші для таких систем.

При складанні математичних моделей багатьох прикладних задач, які виникають у теорії електричних кіл, теорії керування, робототехніка, радіофізика, математична економіка тощо, дослідники приходять [1] до задач, які описуються диференціальними рівняннями

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + f(t).$$

з виродженою матрицею при похідній. У стаціонарному випадку в [2] для опису розв'язків таких систем було застосовано теорію матричних в'язок, а згодом у роботах [3–7] було запропоновано поняття центральної канонічної форми та знайдено достатні умови звідності до неї. У роботах [5, 8] досліджувалися крайові задачі для таких систем. У даній публікації досліджено структуру розв'язку вироджених диференціально-алгебраїчних систем, які піддаються імпульсній дії в фіксовані моменти часу.

1. Постановка задачі. Розглянемо вироджену диференціально-алгебраїчну систему рівнянь з імпульсною дією:

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + f(t), \quad t \neq \tau_i, \quad x, f \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

$$\Delta x|_{t=\tau_i} \equiv x(\tau_i + 0) - x(\tau_i) = B_i x(\tau_i) + b_i, \tag{2}$$

де $rankB(t) = n - r \ \forall t \in [a, b]$, $r > 0$; вектор-функція $f(t)$ і $(n \times n)$-вимірні матриці $A(t)$, $B(t)$ і є достатньо гладкими: $f(t), A(t), B(t) \in C^k[a, b]$, k – деяке натуральне число, $a < \tau_1 < \ldots < \tau_p < b$, $p < \infty$.

Під розв'язком задачі (1), (42) будемо розуміти кусково неперервно диференційовну на $[a, b]\backslash\{\tau_i\}$, $i = \overline{1, p}$ функцію

$$x(t) = \begin{cases} x_0(t), & t \in [a, \tau_1], \\ x_j(t), & t \in (\tau_j, \tau_{j+1}], \quad j = \overline{1, p-1}, \\ x_p(t), & t \in (\tau_p, b], \end{cases}$$

з розривами першого роду в точках $t = \tau_i$, яка задовольняє систему (1) та імпульсні умови (42). Будемо вважати функції $x_i(t)$ визначеними і неперервно-диференційовними на відповідних замкнених інтервалах:

$$x_i(t) \in C[\tau_i, \tau_{i+1}], \quad x_i(\tau_i) = x_i(\tau_i + 0) = \lim_{t \to \tau_i + 0} x_i(t),$$

і що розв'язок є неперервним зліва, тобто

$$x(\tau_i) = x(\tau_i - 0) = x_{i-1}(\tau_i) = \lim_{t \to \tau_i - 0} x_{i-1}(t).$$

У просторі неперервно-диференційовних n-вимірних вектор-функцій $C^1[a, b]$ розглянемо оператор L та спряжений до нього оператор $L^\top$:

$$L(t) = A(t) - B(t)\frac{d}{dt}, \qquad L^\top(t) = A^\top(t)x(t) + \frac{d}{dt}\, B^\top(t).$$

Означення 1 ([6,7]). *Матриця $B(t)$ має жорданів ланцюжок векторів завдовжки s відносно оператора $L(t)$, якщо існують ненульові вектори $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_s(t) \in C^1[a, b]$, які при всіх $t \in [a, b]$ задовольняють співвідношення*

$$B(t)\varphi_1(t) = 0, \quad B(t)\varphi_i(t) = L(t)\varphi_{i-1}(t), \quad i = \overline{2, s},$$

а рівняння

$$B(t)z = L(t)\varphi_s(t)$$

в жодній точці $t \in [a, b]$ не має розв'язків.

Нехай існують r жорданових ланцюжків завдовжки s_i $i = \overline{1, r}$ матриці $B(t)$ відносно оператора $L(t)$, які складаються з векторів $\varphi_i^{(j)}(t) \in C^1[a, b]$, $j = \overline{1, s_i}$:

$$B(t)\varphi_i^{(1)}(t) = a, i = \overline{1, r},$$
$$B(t)\varphi_i^{(j)}(t) = L(t)\varphi_i^{(j-1)}(t), \quad i = \overline{2, s}, \quad i = \overline{1, r}.$$

Означення 2 ([6, 7]). *Жордановим набором матриці $B(t)$ відносно оператора $L(t)$ називають сукупність всіх векторів $\varphi_i^{(j)}(t) \in C^1[a, b]$, $j = \overline{1, s_i}$, які входять у всі r існуючих жорданових ланцюжків матриці $B(t)$ відносно оператора $L(t)$.*

Через $\psi_i^{(1)}(t)$ $i = \overline{1, r}$ позначимо власні вектори спряженої до $B(t)$ матриці $B^\top(T)$, які відповідають її нульовому значенню:

$$B^\top(t)\psi_i^{(1)}(t) = 0, i = \overline{1, r}.$$

Означення 3 ([6,7]). *Жорданів набір матриці $B(t)$ відносно оператора $L(t)$ називається повним, якщо*

$$det \| \langle L(t)\varphi_i^{(1)}(t), \psi_k^{(1)}(t) \rangle \|_{i,j=1}^{r} \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Мають місце наступні твердження.

Лема 1 ([6,7]). *Якщо матриці* $A(t),\ B(t) \in C^k[a,b]$, $rank B(t) = n-k = const$ $\forall t \in [a,b]$ *і матриця* $B(t)$ *має при всіх* $t \in [a,b]$ *повний жорданів набір векторів* $\varphi_i^{(j)}(t)$, $i = \overline{1,r}$ $j = \overline{1,s_i}$, *відносно оператора* $L(t)$, *то як ці вектори, так і вектори* $\psi_i^{(j)}(t)$, $i = \overline{1,r}$, $j = \overline{1,s_i}$, *які утворюють жорданів набір матриці* $B^\top(t)$ *відносно оператора* $L^\top(t)$, *можна визначити так, щоб* $\varphi_i^{(j)}(t), \varphi_i^{(j)}(t) \in C^{k-j+1}[a,b]$, $i = \overline{1,r}$, $j = \overline{1,s_i}$.

Теорема 1. *Нехай* $A(t),\ B(t) \in C^{2m+k}[a,b]$, $rank B(t) = n-k = const$, $\forall t \in [a,b]$ *і матриця* $B(t)$ *має при всіх* $t \in [a,b]$ *повний жорданів набір векторів* $\varphi_i^{(j)}(t)$, $i = \overline{1,r}$ $j = \overline{1,s_i}$, *відносно оператора* $L(t)$, *який складається з* r *ланцюжків завдовжки* $s_1, \ldots, s_r$, *де* $\max\limits_i s_i = m$. *Тоді існують неособливі при всіх* $t \in \mathbb{R}$ $(n \times n)$*-вимірні матриці* $P(t), Q(t) \in C^{k+1}[a,b]$ *такі, що множенням на* $P(t)$ *та заміною*

$$x = Q(t)u \tag{3}$$

вироджена диференціально-алгебраїчна система рівнянь з імпульсною дією (1), (42) *зводиться до імпульсної диференціально-алгебраїчної системи в центральній канонічній формі*

$$\begin{bmatrix} E_{n-s} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \frac{du}{dt} = \begin{bmatrix} M(t) & 0 \\ 0 & E_s \end{bmatrix} u + P(t)f(t), \tag{4}$$

$$\Delta u|_{t=\tau_i} = Q^{-1}(\tau_i)B_iQ(\tau_i)u(\tau_i) + Q^{-1}(\tau_i)b_i, \tag{5}$$

де $s = s_1 + \ldots + s_r$, $I = diag\{I_1, \ldots, I_r\}$, I_j *– нільпотентні блоки Жордана порядку* s_j $(j = \overline{1,r})$, $M(t) \in C^{k+1}[a,b]$, $\mathbb{E}_k$ *– одинична матриця порядку* k.

Доведення. В [6,7] систему (1) зведено до центральної канонічної форми (4), а (5) одержується з (42) безпосередньо заміною (3) з урахуванням неперервності матриці $Q(t)$ у точках імпульсів.

Нехай $X(t)$ — $((n-s)\times(n-s))$- вимірна фундаментальна матриця системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{du_1}{dt} = M(t)u_1, \quad u_1 \in \mathbb{R}^{n-s}, \tag{6}$$

а $X(t,\sigma), X(\sigma,\sigma) = \mathbb{E}_{n-s}$ – матрицант системи (6). Позначимо також

$$Q^{-1}(\tau_i)B_iQ(\tau_i) = \begin{bmatrix} B_{i,1} & B_{i,2} \\ B_{i,3} & B_{i,4} \end{bmatrix},$$

де $B_{i1}, B_{i2}, B_{i3}, B_{i4}$ при всіх $i = \overline{1,p}$ є відповідно $((n-s)\times(n-s))$-, $((n-s)\times s)$-, $(s\times(n-s))$- та $(s\times s)$- вимірними блоками.

2. Структура розв'язків вироджених лінійних однорідних систем з імпульсною дією. Розглянемо відповідну (1), (42) вироджену однорідну імпульсну систему

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x(t), \quad t \neq \tau_i, \tag{7}$$

$$\Delta x|_{t=\tau_i} = B_i x(\tau_i). \tag{8}$$

Її розв'язки будемо шукати у вигляді

$$x(t) = \begin{cases} Q(t)\begin{bmatrix} X(t) \\ 0 \end{bmatrix} c_0, & t \in [a, \tau_1], \\ Q(t)\begin{bmatrix} X(t) \\ 0 \end{bmatrix} c_j, & t \in (\tau_j, \tau_{j+1}], \quad j \in \overline{1, p-1}, \\ Q(t)\begin{bmatrix} X(t) \\ 0 \end{bmatrix} c_p, & t \in (\tau_p, b], \end{cases} \tag{9}$$

де $c_0, c_i \in \mathbb{R}^{n-s}$, $i = \overline{1,p}$ – довільні сталі вектори. Оскільки $Q(t)$ і $X(t)$ є неперервними матрицями на $[a, b]$ то умови імпульсів (8) можемо записати так:

$$Q(\tau_i)\begin{bmatrix} X(\tau_i) \\ 0 \end{bmatrix} c_i = (\mathbb{E}_{n-s} + B_i)Q(\tau_i)\begin{bmatrix} X(\tau_i) \\ 0 \end{bmatrix} c_{i-1}.$$

Домножуючи зліва на $Q^{-1}(\tau_i)$, одержимо:

$$\begin{bmatrix} X(\tau_i)c_i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}_{n-s} + B_{i,1} & B_{i,2} \\ B_{i,3} & \mathbb{E}_s + B_{i,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(\tau_i)c_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Розглядаючи (10) як лінійну алгебраїчну систему відносно c_i, і, беручи до уваги, що $detX(t) \neq 0$, бачимо, що вона сумісна тоді і тільки тоді, коли B_{i3} є нуль-матрицею. Отже, без обмеження загальності можемо прийняти, що матриці B_i задовольняють умову

$$Q^{-1}(\tau_i)B_iQ(\tau_i) = \begin{bmatrix} B_{i,1} & B_{i,2} \\ 0 & B_{i,4} \end{bmatrix}. \tag{11}$$

При цьому якщо $det(\mathbb{E}_{n-s} + B_{i,1}) \neq 0$, то існує взаємно однозначний зв'язок між c_i та c_{i-1}:

$$c_i = X^{-1}(\tau_i)(\mathbb{E}_{n-s} + B_{i,1})X(\tau_i)c_{i-1}. \tag{12}$$

Підставляючи (12) у (9), одержимо значення розв'язку $x(t)$ на кожному з інтервалів $(\tau_i, \tau_{i+1}]$:

$$x(t) = X_{n-s}(t)c_0, \tag{13}$$

де $X_{n-s}(t)$ – $(n \times (n-s))$- вимірна матриця, стовпцями якої є лінійно незалежні розв'язки системи (7), (8):

$$X_{n-s}(t) = Q(t)\begin{bmatrix} \Omega_x(t) \\ 0 \end{bmatrix},$$

де

$$\Omega_x(t) = \begin{cases} X(t), & t \in [a, \tau_1], \\ X(t,\tau_1)(\mathbb{E}_{n-s} + B_{1,1})X(\tau_1), & t \in (\tau_1, \tau_2], \\ X(t,\tau_i)\left(\prod_{\nu=i}^{2}(\mathbb{E}_{n-s} + B_{\nu,1})X(\tau_\nu, \tau_{\nu-1})\right)(\mathbb{E}_{n-s} + B_{1,1})X(\tau_1), & t \in (\tau_i, \tau_{i+1}], \ i \geq 2, \end{cases}$$

є [9] фундаментальною $((n-s)\times(n-s))$- вимірною матрицею невиродженої лінійної однорідної імпульсної системи

$$\frac{du_1}{dt}=M(t)u_1, t\neq\tau_i,\quad \Delta u_1|_{t=\tau_i}=B_{i,1}u_1(\tau_i). \tag{14}$$

Для матриканта $\Omega_x(t,\sigma)$, $\Omega_x(\sigma,\sigma)=\mathbb{E}_{n-s}$, $\tau_{j-1}<\sigma\leq\tau_j<\tau_i<t\leq\tau_{i+1}$ маємо:

$$\Omega_x(t,\sigma)=\Omega_x(t)\Omega_x^{-1}(\sigma)=X(t,\tau_i)\left(\prod_{\nu=i}^{j+1}(\mathbb{E}_{n-s}+B_{\nu,1})X(\tau_\nu,\tau_{\nu-1})\right)(\mathbb{E}_{n-s}+B_{j,1})X(\tau_j,\sigma).$$

3. Спряжені системи. Розглянемо вироджену диференціально-алгебраїчну систему з імпульсною дією

$$\frac{d}{dt}\Big(B^\top(t)y(t)\Big)=-A^\top(t)y(t), \tag{15}$$

$$\Delta\Big(B^\top y\Big)|_{t=\tau_i}=-(\mathbb{E}_n+B_i^\top)^{-1}B_i^\top B^\top(\tau_i)y(\tau_i), \tag{16}$$

яку будемо називати спряженою до системи (7),(8).

Відомо [6, 7], що розв'язок системи без імпульсів (15) має вигляд

$$y(t)=P^\top(t)\begin{bmatrix}Y(t)\\0\end{bmatrix}d_0,$$

де $Y(t)$ — $((n-s)\times(n-s))$- вимірна фундаментальна матриця спряженої до (6) системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dv_1}{dt}=-M^\top(t)v_1,\quad v_1\in\mathbb{R}^{n-s}, \tag{17}$$

де $d_0\in\mathbb{R}^{n-s}$ – довільна стала. Через $Y(t,\sigma)$ позначимо матрицант системи (17).

З урахуванням вищенаведеного, будемо шукати розв'язок імпульсної системи (15), (16) у вигляді

$$y(t)=y_i(t)=P^\top(t)\begin{bmatrix}Y(t)\\0\end{bmatrix}d_i,\quad t\in(\tau_i,\tau_{i+1}],\quad d_i\in\mathbb{R}^{n-s}. \tag{18}$$

Оскільки

$$B(t)=P^{-1}(t)\begin{bmatrix}\mathbb{E}_{n-s}&0\\0&I\end{bmatrix}Q^{-1}(t),$$

то

$$\begin{aligned}B^\top y_i(t)&=\left(P^{-1}(t)\begin{bmatrix}\mathbb{E}_{n-s}&0\\0&I\end{bmatrix}Q^{-1}(t)\right)^\top P^\top(t)\begin{bmatrix}Y(t)\\0\end{bmatrix}d_i=\\&=\big(Q^\top(t)\big)^{-1}\begin{bmatrix}\mathbb{E}_{n-s}&0\\0&I^\top\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Y(t)\\0\end{bmatrix}d_i=\big(Q^\top(t)\big)^{-1}\begin{bmatrix}Y(t)\\0\end{bmatrix}d_i.\end{aligned} \tag{19}$$

Враховуючи (11), (19) і неперервність матриці $B(t)$, для імпульсу (16) в точці $t=\tau_i$ маємо:

$$B^{\top}(\tau_i)y(\tau_i+0)=\left(\mathbb{E}_n-(\mathbb{E}_n+B_i^{\top})^{-1}B_i^{\top}\right)B^{\top}(\tau_i)y(\tau_i),$$

$$B^{\top}(\tau_i)y(\tau_i+0)=\left(\mathbb{E}_n+B_i^{\top}\right)^{-1}B^{\top}(\tau_i)y(\tau_i),$$

$$\left(Q^{\top}(\tau_i)\right)^{-1}\begin{bmatrix}Y(\tau_i)\\0\end{bmatrix}d_i=\left(\mathbb{E}_n+B_i^{\top}\right)^{-1}\left(Q^{\top}(\tau_i)\right)^{-1}\begin{bmatrix}Y(\tau_i)\\0\end{bmatrix}d_{i-1},$$

$$\begin{bmatrix}Y(\tau_i)\\0\end{bmatrix}d_i=Q^{\top}(\tau_i)\left(\mathbb{E}_n+B_i^{\top}\right)^{-1}\left(Q^{\top}(\tau_i)\right)^{-1}\begin{bmatrix}Y(\tau_i)\\0\end{bmatrix}d_{i-1},$$

$$\begin{bmatrix}Y(\tau_i)\\0\end{bmatrix}d_i=\left(\mathbb{E}_n+Q^{\top}(\tau_i)B_i^{\top}\left(Q^{\top}(\tau_i)\right)^{-1}\right)^{-1}\begin{bmatrix}Y(\tau_i)\\0\end{bmatrix}d_{i-1},$$

$$\begin{bmatrix}Y(\tau_i)\\0\end{bmatrix}d_i=\left(\mathbb{E}_n+(Q^{-1}(\tau_i)B_iQ(\tau_i))^{\top}\right)^{-1}\begin{bmatrix}Y(\tau_i)\\0\end{bmatrix}d_{i-1},$$

$$\begin{bmatrix}Y(\tau_i)\\0\end{bmatrix}d_i=\begin{bmatrix}\mathbb{E}_{n-s}+B_{i,1}^{\top} & 0\\ B_{i,2}^{\top} & \mathbb{E}_s+B_{i,4}^{\top}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}Y(\tau_i)\\0\end{bmatrix}d_{i-1}.$$

Якщо $det\,(\mathbb{E}_{n-s}+B_{i,4})\neq 0$, то

$$\begin{bmatrix}Y(\tau_i)\\0\end{bmatrix}d_i=\begin{bmatrix}\left(\mathbb{E}_{n-s}+B_{i,1}^{\top}\right)^{-1} & 0\\ -\left(\mathbb{E}_{n-s}+B_{i,4}^{\top}\right)^{-1}B_{i,2}^{\top}\left(\mathbb{E}_{n-s}+B_{i,1}^{\top}\right)^{-1} & \left(\mathbb{E}_{n-s}+B_{i,4}^{\top}\right)^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Y(\tau_i)\\0\end{bmatrix}d_{i-1},$$

і остаточно алгебраїчна система для знаходження d_i має наступний вигляд:

$$\begin{bmatrix}Y(\tau_i)\\0\end{bmatrix}d_i=\begin{bmatrix}\left(\mathbb{E}_{n-s}+B_{i,1}^{\top}\right)^{-1}Y(\tau_i)\\ -\left(\mathbb{E}_{n-s}+B_{i,4}^{\top}\right)^{-1}B_{i,2}^{\top}\left(\mathbb{E}_{n-s}+B_{i,1}^{\top}\right)^{-1}Y(\tau_i)\end{bmatrix}d_{i-1}. \tag{20}$$

Система (20) сумісна (а отже, можемо продовжити розв'язок спряженої системи (15), (16) з інтервалу $t\in(\tau_{i-1},\tau_i]$ на інтервал $t\in(\tau_i,\tau_{i+1}]$) тоді і тільки тоді, коли $B_{i,2}$ є нульовою матрицею, і при цьому її розв'язком є

$$d_i=Y^{-1}(\tau_i)\left(\mathbb{E}_{n-s}+B_{i,1}^{\top}\right)^{-1}Y(\tau_i)d_{i-1}.$$

За індукцією одержимо

$$d_i=Y^{-1}(\tau_i)\left(\prod_{\nu=i}^{1}\left(\mathbb{E}_{n-s}+B_{\nu,1}^{\top}\right)^{-1}Y(\tau_\nu,\tau_{\nu-1})\right)Y(\tau_0)d_0. \tag{21}$$

Підставляючи (21) в (18), отримаємо розв'язок $y(t)$ системи (15), (16):

$$y(t)=Y_{n-s}(t)d_0, \tag{22}$$

де $Y_{n-s}(t)$ – $(n \times (n-s))$- вимірна матриця, стовпці якої є лінійно незалежними розв'язками спряженої системи (15), (16):

$$Y_{n-s}(t) = P^{\top}(t)\begin{bmatrix} \Omega_y(t) \\ 0 \end{bmatrix},$$

де

$$\Omega_y(t)=\begin{cases} Y(t), \qquad t\in[a,\tau_1], \\ Y(t,\tau_1)(\mathbb{E}_{n-s}+B_{1,1})Y(\tau_1), \qquad t\in(\tau_1,\tau_2], \\ Y(t,\tau_i)\left(\prod\limits_{\nu=i}^{2}(\mathbb{E}_{n-s}+B_{\nu,1})Y(\tau_\nu,\tau_{\nu-1})\right)(\mathbb{E}_{n-s}+B_{1,1})Y(\tau_1),\ t\in(\tau_i,\tau_{i+1}],\ i\geq 2 \end{cases}$$

є фундаментальною $((n-s)\times(n-s))$- вимірною матрицею спряженої до (14) невиродженої лінійної однорідної імпульсної системи

$$\frac{dv_1}{dt} = -M^{\top}(t)v_1, t\neq\tau_i, \quad \Delta v_1|_{t=\tau_i} = -\left(\mathbb{E}_{n-s}+B_{i,1}^{\top}\right)^{-1}B_{i,1}^{\top}v_1(\tau_i). \tag{23}$$

Зауваження 1. *З вищенаведених міркувань випливає, що матриці B_i повинні мати наступну структуру:*

$$B_i = Q(\tau_i)\begin{bmatrix} B_{i,1} & 0 \\ 0 & B_{i,4} \end{bmatrix}Q^{-1}(\tau_i), \quad det(E_{n-s}+B_{i,1})\neq 0, \quad det(E_s+B_{i,4})\neq 0, \tag{24}$$

а тому надалі будемо розглядати матриці B_i саме вигляду (24).

Залежність між розв'язками системи (7), (8) та розв'язками спряженої до неї системи (15), (16) встановлює наступна лема.

Лема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді*

1) для будь-яких розв'язків $x(t)$ системи (7), (8), (24) *і розв'язків $y(t)$ системи* (15), (16), (24) *виконується рівність*

$$\langle B(t)x(t), y(t)\rangle = const \quad \forall t\in\mathbb{R}; \tag{25}$$

2) фундаментальні матриці $X_{n-s}(t)$ і $Y_{n-s}(t)$ відповідних вироджених систем (7), (8), (24) *і* (15), (16), (24) *задовольняють співвідношення*

$$Y_{n-s}^{\top}(t)B(t)X_{n-s}(t) = C, \tag{26}$$

де C – невироджена квадратна $(n-s)$- вимірна стала матриця, причому якщо фундаментальні матриці $X(t)$ і $Y(t)$ взаємно спряжених систем звичайних диференціальних рівнянь (6) *і* (17) *вибрати так, щоб*

$$Y^{\top}(t_0)X(t_0) = \mathbb{E}_{n-s}, \tag{27}$$

при деякому $t=t_0\in[a,b]$, тоді

$$Y_{n-s}^{\top}(t)B(t)X_{n-s}(t) = \mathbb{E}_{n-s}. \tag{28}$$

Доведення. 1. Оскільки на кожному з інтервалів $t \in (\tau_i, \tau_{i+1})$ виконуються рівності $B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x(t)$ і $\frac{d}{dt}\Big(B^\top(t)y(t)\Big) = -A^\top(t)y(t)$, то

$$\frac{d}{dt}\langle B(t)x(t), y(t)\rangle = \frac{d}{dt}\langle x(t), B^\top(t)y(t)\rangle = \langle \frac{dx(t)}{dt}, B^\top(t)y(t)\rangle + \langle x, \frac{d}{dt}\left(B^\top(t)y(t)\right)\rangle =$$

$$= \langle B(t)\frac{dx(t)}{dt}, y(t)\rangle + \langle x, \frac{d}{dt}\left(B^\top(t)y(t)\right)\rangle = \langle A(t)x(t), y(t)\rangle + \langle x, -A^\top(t)y(t)\rangle = 0.$$

Отже, $\langle B(t)x(t), y(t)\rangle = m_i = const$ при $t \in (\tau_i, \tau_{i+1})$. Покажемо, що $m_i = m \ \forall i = \overline{1,p}$, тобто що

$$\Delta\langle B(t)x(t), y(t)\rangle|_{t=\tau_i} = 0.$$

Справді,

$$\Delta\langle B(t)x(t), y(t)\rangle|_{t=\tau_i} = \Delta\langle x(t), B^\top(t)y(t)\rangle|_{t=\tau_i} =$$

$$= \langle x(\tau_i+0), B^\top(\tau_i)y(\tau_i+0)\rangle - \langle x(\tau_i), B^\top(\tau_i)y(\tau_i)\rangle =$$

$$= \langle (\mathbb{E}_n + B_i)x(\tau_i), \Big(\mathbb{E}_n - (\mathbb{E}_n + B_i^\top)^{-1}B_i^\top\Big)B^\top(\tau_i)y(\tau_i)\rangle - \langle x(\tau_i), B^\top(\tau_i)y(\tau_i)\rangle =$$

$$= \langle x(\tau_i), (\mathbb{E}_n + B_i^\top)(\mathbb{E}_n + B_i^\top)^{-1}B^\top(\tau_i)y(\tau_i)\rangle - \langle x(\tau_i), B^\top(\tau_i)y(\tau_i)\rangle =$$

$$= \langle x(\tau_i), B^\top(\tau_i)y(\tau_i)\rangle - \langle x(\tau_i), B^\top(\tau_i)y(\tau_i)\rangle = 0.$$

Отже, $m_{i+1} = m_i = m = const.$

2. Сталість матриці C випливає з попереднього пункту, оскільки стовпцями матриць $X_{n-s}(t)$ і $Y_{n-s}(t)$ є розв'язки відповідних імпульсних систем. Покажемо, що C є неособливою матрицею.

$$Y_{n-s}^\top(t)B(t)X_{n-s}(t) = \left(P^\top(t)\begin{bmatrix}\Omega_y(t)\\ 0\end{bmatrix}\right)^\top P^{-1}(t)\begin{bmatrix}\mathbb{E}_{n-s} & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}Q^{-1}(t)Q(t)\begin{bmatrix}\Omega_x(t)\\ 0\end{bmatrix} =$$

$$= \Omega_y^\top(t)\Omega_x(t) = \left(Y(t,\tau_i)\left(\prod_{\nu=i}^{2}(\mathbb{E}_{n-s}+B_{\nu,4})Y(\tau_\nu,\tau_{\nu-1})\right)(\mathbb{E}_{n-s}+B_{1,1})Y(\tau_1)\right)^\top \times$$

$$\times X(t,\tau_i)\left(\prod_{\nu=i}^{2}(\mathbb{E}_{n-s}+B_{\nu,1})X(\tau_\nu,\tau_{\nu-1})\right)(\mathbb{E}_{n-s}+B_{1,1})X(\tau_1) =$$

$$= Y^\top(\tau_1)(\mathbb{E}_{n-s}+B_{1,1}^\top)\left(\prod_{\nu=2}^{i}Y^\top(\tau_\nu,\tau_{\nu-1})(\mathbb{E}_{n-s}+B_{\nu,4}^\top)\right)Y(t,\tau_i)X(t,\tau_i)\times$$

$$\times\left(\prod_{\nu=i}^{2}(\mathbb{E}_{n-s}+B_{\nu,1})X(\tau_\nu,\tau_{\nu-1})\right)(\mathbb{E}_{n-s}+B_{1,1})X(\tau_1).$$

Оскільки для матрицантів $X(t,\sigma)$ і $Y(t,\sigma)$ маємо, що $Y^\top(t,\sigma)X(t,\sigma) = \mathbb{E}_{n-s}$, то

$$Y_{n-s}^\top(t)B(t)X_{n-s}(t) = Y^\top(\tau_1)X(\tau_1) = C. \qquad (29)$$

Оскільки $detX(\tau_1) \neq 0$, $detY(\tau_1) \neq 0$, то C теж є невиродженою матрицею. Крім того, з (29) очевидно, що з (27) випливає (28). Лема доведена.

4. Структура загального розв'язку неоднорідних систем. З'ясуємо структуру загального розв'язку неоднорідної системи (1), (42). Попередньо введемо деякі позначення:

$$U(t) = [X_{n-s}(t), \Phi(t)], \qquad V(t) = [Y_{n-s}(t), \Psi(t)]^\top, \qquad H(t) = \begin{bmatrix} \Omega_x(t) & 0 \\ 0 & Q_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix},$$

$$\Phi(t) = [\varphi_1^{(1)}(t), \dots, \varphi_1^{(s_1)}(t), \dots, \varphi_r^{(1)}(t), \dots, \varphi_r^{(s_r)}(t)],$$

$$\Psi(t) = [\psi_1^{(s_1)}(t), \dots, \psi_1^{(1)}(t), \dots, \psi_r^{(s_r)}(t), \dots, \psi_r^{(1)}(t)].$$

Відомо [7], що перетворювальну матрицю $Q(t)$ можна представити у вигляді добутку матриць $Q(t) = Q_1(t)Q_2(t)$, де

$$Q_1(t) = [q_1(t), \dots, q_{n-s}(t), \Phi(t)],$$

вектори $q_i(t) \in C^{m+1}[a,b],\ i = \overline{1, n-s}$ доповнюють вектори $\varphi_i^{(j)}(t),\ j = \overline{1, s_i},\ i = \overline{1, r}$ до повного базису в $C^k[a,b]$, $Q_2(t)$ – нижньотрикутна матриця з одиницями на діагоналі, тобто

$$Q_2(t) = \begin{bmatrix} Q_{11}(t) & 0 \\ Q_{21}(t) & Q_{22}(t) \end{bmatrix},$$

де $Q_{11}(t), Q_{22}(t)$ – нижньотрикутні матриці відповідно $(n-s)$- та s-го порядків з одиницями на діагоналі.

При цьому неважко переконатися, що мають місце матричні рівності

$$Q_2^{-1}(t) = \begin{bmatrix} Q_{11}^{-1}(t) & 0 \\ -Q_{22}^{-1}(t)Q_{21}(t)Q_{11}^{-1}(t) & Q_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix},$$

$$\Phi(t) = Q_1(t) \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbb{E}_s \end{bmatrix} = Q(t) \begin{bmatrix} 0 \\ Q_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix}, \qquad U(t) = Q(t)H(t),$$

$$\begin{gathered} U^{-1}(\tau_i+0)(\mathbb{E}_n + B_i)U(\tau_i) = \\ = \big(Q(\tau_i{+}0)H(\tau_i{+}0)\big)^{-1} Q(\tau_i) \begin{bmatrix} \mathbb{E}_{n-s}{+}B_{i,1} & 0 \\ 0 & \mathbb{E}_s{+}B_{i,4} \end{bmatrix} Q^{-1}(\tau_i)Q(\tau_i)H(\tau_i) = \\ = H^{-1}(\tau_i+0) \begin{bmatrix} \mathbb{E}_{n-s} + B_{i,1} & 0 \\ 0 & \mathbb{E}_s + B_{i,4} \end{bmatrix} H(\tau_i) = \\ = \begin{bmatrix} \Omega_x^{-1}(\tau_i+0)(\mathbb{E}_{n-s} + B_{i,1})\Omega_x(\tau_i) & 0 \\ 0 & Q_{22}(\tau_i)(\mathbb{E}_s + B_{i,4})Q_{22}^{-1}(\tau_i) \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} \mathbb{E}_{n-s} & 0 \\ 0 & Q_{22}(\tau_i)(\mathbb{E}_s + B_{i,4})Q_{22}^{-1}(\tau_i) \end{bmatrix}. \end{gathered} \tag{30}$$

Згідно [6, 7], розв'язок системи (1), (42) на інтервалі $t \in [a, \tau_1]$ має вигляд

$$x(t) = x_0(t) = X_{n-s}(t)c_0 + \int\limits_a^t X_{n-s}(t)Y_{n-s}^{\top}(\sigma)f(\sigma)d\sigma - \Phi(t)r(t), \qquad (31)$$

тобто

$$x_0(t) = U(t)\begin{bmatrix} c_0 + \int\limits_a^t Y_{n-s}^{\top}(\sigma)f(\sigma)d\sigma \\ -r(t) \end{bmatrix},$$

де

$$r(t) = \sum_{k=0}^{m-1} I^k \frac{d^k}{dt^k}\Big(\big(\Psi^{\top}(t)L(t)\Phi(t)\big)^{-1}\Psi^{\top}(t)f(t)\Big).$$

Після імпульсного збурення в точці $t = \tau_i$ продовжимо розв'язок $x_0(t)$ вигляду (31) з інтервалу $t \in [a, \tau_i]$ на розв'язок $x_1(t)$ вигляду

$$x_1(t) = X_{n-s}(t)c_1 + \int\limits_{\tau_1}^t X_{n-s}(t)Y_{n-s}^{\top}(\sigma)f(\sigma)d\sigma - \Phi(t)r(t), \qquad (32)$$

який визначений на інтервалі $t \in (\tau_1, \tau_2]$. Перехід від $x_0(t)$ до $x_1(t)$ визначається імпульсом (42) в точці $t = \tau_1$. Для знаходження зв'язку між c_0 і c_1 підставимо (31), (32) в (42) при $i = 1$:

$$x_1(\tau_1 + 0) = (\mathbb{E} + B_1)x_0(\tau_1) + b_1,$$

$$U(\tau_1 + 0)\begin{bmatrix} c_1 \\ -r(\tau_1) \end{bmatrix} = (\mathbb{E} + B_1)U(\tau_1)\begin{bmatrix} c_0 + \int\limits_a^{\tau_1} Y_{n-s}^{\top}(\sigma)f(\sigma)d\sigma \\ -r(\tau_1) \end{bmatrix} + b_1.$$

Беручи до уваги (30), одержимо:

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 + \int\limits_a^{\tau_1} Y_{n-s}^{\top}(\sigma)f(\sigma)d\sigma \\ -Q_{22}(\tau_1)(\mathbb{E}_s + B_{1,4})Q_{22}^{-1}(\tau_1)r(\tau_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Omega_x^{-1}(\tau_1 + 0, 0) & 0 \\ 0 & Q_{22}(\tau_1) \end{bmatrix} Q^{-1}(\tau_1)b_1.$$

Зрозуміло, що останнє рівняння є сумісним не при всіх значеннях b_1. Для його сумісності необхідно і досить, щоб вектор b_1 мав наступну структуру:

$$b_1 = Q(\tau_1)\begin{bmatrix} a_1 \\ (\mathbb{E}_s + B_{1,4})Q_{22}^{-1}(\tau_1)r(\tau_1) \end{bmatrix}, \qquad (33)$$

де $a_1 \in \mathbb{R}^{n-s}$ – деякий сталий вектор. При цьому одержимо таке значення c_1:

$$c_1 = c_0 + \int\limits_a^{\tau_1} Y_{n-s}^{\top}(\sigma)f(\sigma)d\sigma + \Omega_x^{-1}(\tau_1 + 0, 0)a_1. \qquad (34)$$

Підставляючи його в $x_1(t)$ вигляду (32), одержимо:

$$x_1(t) = X_{n-s}(t)\left(c_0 + \int\limits_a^{\tau_1} Y_{n-s}^{\top}(\sigma) f(\sigma) d\sigma + \Omega_x^{-1}(\tau_1 + 0, 0) a_1\right) + \\ + \int\limits_{\tau_1}^{t} X_{n-s}(t) Y_{n-s}^{\top}(\sigma) f(\sigma) d\sigma - \Phi(t) r(t). \tag{35}$$

Остаточно

$$x_1(t) = X_{n-s}(t) c_0 + \int\limits_{\tau_1}^{t} X_{n-s}(t) Y_{n-s}^{\top}(\sigma) f(\sigma) d\sigma + \\ + X_{n-s}(t) \Omega_x^{-1}(\tau_1 + 0, 0) a_1 - \Phi(t) r(t). \tag{36}$$

Міркуючи аналогічно, можемо переконатися, що справедливим є наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1, матриці B_i і вектори b_i мають вигляд відповідно* (24) *і* (37)*:*

$$b_i = Q(\tau_i) \begin{bmatrix} a_i \\ (\mathbb{E}_s + B_{i,4}) Q_{22}^{-1}(\tau_i) r(\tau_i) \end{bmatrix}, \tag{37}$$

де $a_i \in \mathbb{R}^{n-s}$.

Тоді на інтервалі $t \in (\tau_i, \tau_{i+1}]$ розв'язок $x(t) = x_i(t)$ визначається за формулою

$$x(t) = X_{n-s}(t) c_0 + \int\limits_{a}^{t} X_{n-s}(t) Y_{n-s}^{\top}(\sigma) f(\sigma) d\sigma + \\ + \sum_{a<\tau_i<t} X_{n-s}(t) \Omega_x^{-1}(\tau_i + 0, 0) a_i - \Phi(t) r(t). \tag{38}$$

Щодо розв'язності початкової задачі для системи (7), (8) справедливою є наступна теорема.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови теореми 1, матриці B_i і вектори b_i мають вигляд відповідно* (24) *і* (37)*. Тоді для того, щоб задача Коші* (7)*,* (8)*,* (39)

$$x(t_0) = x_0, \quad t_0 \in [a, b], \tag{39}$$

мала розв'язок, необхідно і достатньо, щоб вектор x_0 задовольняв умову

$$\sum_{i=0}^{k-1} \frac{d^i}{dt^i} \langle A(t_0) x_0 + f(t_0), \psi_j^{k-i}(t_0) \rangle = 0; \quad j = \overline{1, r}, \quad k = \overline{1, s_j}. \tag{40}$$

При цьому розв'язок задача Коші (7)*,* (8)*,* (39) *єдиний і має наступний вигляд*

$$x(t) = X_{n-s}(t) \left[\mathbb{E}_{n-s}, 0\right] Q^{-1}(t_0) x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} X_{n-s}(t) Y_{n-s}^{\top}(\sigma) f(\sigma) d\sigma + \\ + \sum_{t_0<\tau_i<t} X_{n-s}(t) \Omega_x^{-1}(\tau_i + 0, t_0) a_i - \Phi(t) r(t). \tag{41}$$

Доведення. Відомо [7], що (41) є необхідною і достатньою умовою того, щоб x_0 було допустимим початковим значенням розв'язку $x(t) = x_0(t)$. У разі виконання умов (24) і (37) розв'язок $x(t)$ єдиним чином переходить через точку імпульсу на наступний проміжок, тобто існує єдиний розв'язок $x(t)$ з початковим значенням $x(t_0) = x_0$. Підставимо $t = t_0$ в (38):

$$x(t_0) = x_0 = X_{n-s}(t_0)c_0 - \Phi(t_0)r(t_0) = U(t_0)\begin{bmatrix} c_0 \\ -r(t_0) \end{bmatrix}.$$

Беручи до уваги, що $\Omega_x(a,a) = \mathbb{E}_{n-s}$, одержимо:

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ -r(t_0) \end{bmatrix} = U^{-1}(t_0)x_0 = H^{-1}(t_0)Q^{-1}(t_0)x_0 = \begin{bmatrix} \mathbb{E}_{n-s} & 0 \\ 0 & Q_{22}(t_0) \end{bmatrix} Q^{-1}(t_0)x_0.$$

Отже, зв'язок між x_0і сталою c_0 має вигляд

$$c_0 = [\mathbb{E}_{n-s}, 0]\, Q^{-1}(0)x_0,$$

з чого одержуємо (41).

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + f(t), \quad t \neq \tau_i, \quad x, f \in \mathbb{R}^n, \tag{1'}$$

$$\Delta x|_{t=\tau_i} \equiv x(\tau_i + 0) - x(\tau_i) = B_i x(\tau_i) + b_i. \tag{42}$$

Висновки. У даній роботі досліджено вироджені алгебро-диференціальні системи, які піддаються імпульсному впливу у фіксовані моменти часу. Для таких систем з'ясовано структуру загального розв'язку та розв'язку задачі Коші, знайдено допустимі початкові умови, при яких існує розв'язок задачі Коші.

1. Чуа Л.О., Лин Пен-Мин Машинный анализ электронных схем: Алгоритмы и вычислительные методы. — М.: Энергия, 1980. — 640 с.
2. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1988. — 552 с.
3. *Campbell S.L., Petzold L.R.* Canonicak forms and solvable singular systems of differential equations // SIAM J. Algebr. Discrete Methods. – 1983. – **№ 4**. – P. 517-521.
4. *Gerdin M.* Parameter estimation in linear descriptor systems. – Sweden, 2004. Printed by UniTryck, Linkoping Univ.
5. *Чистяков В.Ф., Щеглова А.А.* Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. – М.: Наука, 2003. – 320 с.
6. *Самойленко А.М., Яковец В.П.* О приводимости вырожденной линейной системы к центральной канонической форме // Доп. НАН України. – 1993.– №4. – С. 10–15.
7. *Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – К.: Вища школа., 2000. – 294 с.
8. *Бойчук О.А., Шегда Л.М.* Вироджені крайові задачі// Нелінійні коливання. – 2007.– **10**, №3. – С. 303–312.
9. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.– К.: Вища школа, 1987.–288с.

Одержано 03.06.2009