УДК 517.946

В. В. Маринець (Ужгородський нац. ун-т)

ПРО ОДНУ КРАЙОВУ ЗАДАЧУ ДЛЯ КВАЗІЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

The boundary value problem of for quazilinear differential equation has been researched and one two-sided method's modification of the approximate integration of this problem has been constructed.

За допомогою монотонного двостороннього методу досліджено крайову задачу для квазілінійного диференціального рівняння, доведено теореми існування та єдиності розв'язку, про диференціальну нерівність, отримано умову належності розв'язку поставленої задачі простору $C^{(1.1)}(D) \cap C(\overline{D})$.

Досліджується задача Гурса-Дарбу у випадку квазілінійного рівняння гіперболічного типу та будується одна модифікація двостороннього методу її інтегрування.

Нехай в R^2 задана обмежена область $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, $D_1 = \{(x,y)|x \in (x_1, x_0], y \in [y_1, y_2)\}$, $D_2 = \{(x,y)|x \in [x_1, x_0], y \in (g_1(x), y_1)\}$, $D_3 = \{(x,y)|x \in [x_0, x_2], y \in [y_1, g_2(x))\}$, $x_1 < x_0 < x_2$, $y_0 < y_1 < y_2$, $y = g_j(x)$, $j = 1, 2$ – задані „вільні“ криві, причому $g_j(x) < 0$, $x \in [x_0, x_j]$, причому $y_0 = g_1(x_0)$, $y_2 = g_2(x_0)$, $g_j(x_j) = y_1$, $j = 1, 2$.

Дослідимо задачу [1]: в просторі функцій $C^*(\overline{D}) = C^{(1.1)}(D) \cap C(\overline{D})$ знайти розв'язок диференціального рівняння

$$U_{xy}(x,y) + a_1(x,y)U_x(x,y) + a_2(x,y)U_y(x,y) = f(x,y,U(x,y)), \tag{1}$$

який задовольняє умови

$$U(x, y_2) = \varphi_0(x), x \in (x_1, x_0), U(x_1, y) = \psi(y), y \in [y_1, y_2], \tag{2}$$

$$U(x, g_1(x)) = \varphi_1(x), x \in [x_1, x_0], \tag{3}$$

$$U(x, g_2(x)) = \varphi_2(x), x \in [x_0, x_2], \tag{4}$$

де для відомих неперервно-диференційовних функцій $\psi(y)$, $\varphi_k(x)$, $k = 0, 1, 2$ виконуються умови узгодженості

$$\varphi_1(x_1) = \psi(y_1), \varphi_2(x_0) = \varphi_0(x_0), \varphi_0(x_1) = \psi(y_2). \tag{5}$$

Позначимо через $Z_1(x,y)$, $(x,y) \in \overline{D}_1$ – розв'язок задачі Гурса (1),(2), через $Z_2(x,y)$, $(x,y) \in \overline{D}_2$ – розв'язок задачі Дарбу (1),(3) і $Z_2(x,y_1) = Z_1(x,y_1)$, $x \in [x_1, x_0]$, а $Z_3(x,y)$, $(x,y) \in \overline{D}_3$ – розв'язок задачі Дарбу (1),(4) і $Z_3(x_0,y) = Z_1(x_0,y)$, $y \in [y_1, y_2]$. Тоді, очевидно, розв'язок задачі (1)–(5) $U(x,y) = Z_i(x,y)$, $(x,y) \in \overline{D}_i$, $i = 1, 2, 3$.

Надалі вважатимемо, що $a_1(x,y) \in C^{(1.0)}(\overline{D})$, $a_2(x,y) \in C^{(0.1)}(\overline{D})$, а $f(x,y, U(x,y)) \equiv f[U(x,y)] \in C(\overline{B})$, $f : \overline{B} \to R$, $\overline{B} \subset R^3$, $(x,y) \in \overline{D}$.

Неважко показати, що [4, 5]

$$Z_i(x,y) = \omega_i(x,y) + T_i F_i[Z_i(\xi,\eta)], (x,y) \in \overline{D}_i, i = 1, 2, 3, \tag{6}$$

де

$$T_1F_1[Z_1(x,y)] \equiv \int\limits_{x_1}^{x}\int\limits_{y_2}^{y} K_0(x,y;\xi,\eta)F_1[Z_1(\xi,\eta)]d\eta d\xi, (x,y)\in\overline{D}_1,$$
$$T_2F_2[Z_2(x,y)] \equiv \int\limits_{K_1(y)}^{x}\int\limits_{y_1}^{y} K_0(x,y;\xi,\eta)F_2[Z_2(\xi,\eta)]d\eta d\xi, (x,y)\in\overline{D}_2,$$
$$T_3F_3[Z_3(x,y)] \equiv \int\limits_{g_2(x)}^{y}\int\limits_{x_0}^{x} K_1(x,y;\xi,\eta)F_3[Z_3(\xi,\eta)]d\xi d\eta, (x,y)\in\overline{D}_3,$$

$$K_0(x,y;\xi,\eta) \equiv \exp(\int\limits_{y}^{\eta} a_1(\xi,\tau)d\tau + \int\limits_{x}^{\xi} a_2(\tau,y)d\tau),$$
$$K_1(x,y;\xi,\eta) \equiv \exp(\int\limits_{y}^{\eta} a_1(x,\tau)d\tau + \int\limits_{x}^{\xi} a_2(\tau,\eta)d\tau),$$

$$F_1[Z(x,y)] = F_2[Z(x,y)] \equiv f[Z(x,y)] + [a_1(x,y)a_2(x,y) + a_{2,y}(x,y)]Z(x,y),$$
$$F_3[Z(x,y)] \equiv f[Z(x,y)] + [a_1(x,y)a_2(x,y) + a_{1,x}(x,y)]Z(x,y),$$

$$\omega_1(x,y) = \psi(y)\exp(\int\limits_{x}^{x_1} a_2(\xi,y)d\xi) + \int\limits_{x_1}^{x} K_0(x,y;\xi,y_2)[\varphi_0'(\xi) + a_2(\xi,y_2)\varphi_0(\xi)]d\xi,$$
$$\omega_2(x,y) = \varphi_1(K_1(y))\exp(\int\limits_{x}^{K_1(y)} a_2(\xi,y)d\xi)+$$
$$+\int\limits_{K_1(y)}^{x} K_0(x,y;\xi,y_2)[\varphi_0'(\xi) + a_2(\xi,y_2)\varphi_0(\xi)]d\xi + \int\limits_{K_1(y)}^{x}\int\limits_{y_2}^{y_1} K_0(x,y;\xi,\eta)F_2[Z_1(\xi,\eta)]d\eta d\xi,$$
$$\omega_3(x,y) = \varphi_2(x)\exp(\int\limits_{y}^{g_2(x)} a_1(x,\eta)d\eta) + \int\limits_{g_2(x)}^{y} K_1(x,y;x_1,\eta)[\psi'(\eta) + a_1(x,\eta)\psi(\eta)]d\eta+$$
$$+\int\limits_{g_2(x)}^{y}\int\limits_{x_1}^{x_0} K_1(x,y;\xi,\eta)F_3[Z_1(\xi,\eta)]d\xi d\eta.$$

Із постановки задачі маємо $Z_{1,x}(x,y_1) = Z_{2,x}(x,y_1)$, $Z_{1,y}(x_0,y) = Z_{3,y}(x_0,y)$ а із (6) випливає, що $Z_{1,y}(x,y_1) = Z_{2,y}(x,y_1)$ і $Z_{1,x}(x_0,y) = Z_{3,x}(x_0,y)$, тобто, якщо задача (1)–(5) має розв'язок, то він належатиме простору $C^*(\overline{D})$.

Встановимо достатні умови існування в просторі $C^*(\overline{D})$ єдиного розв'язку задачі 1)–(5).

Надалі будемо вважати, що функції $F_i[U(x,y)] \in C_1(\overline{B})$, де $C_1(\overline{B})$ — простір функцій, які задовольняють наступні умови:

1) $F_i[U(x,y)] \in C(\overline{B})$, $i = 1,2,3$;

2) в просторі функцій $C(\overline{B}_1)$, $\overline{B}_1 \subset R^4$, $\Pi p_{x0y}\overline{B}_1 = \overline{D}$, існують такі функції $H_i(x,y,U(x,y);V(x,y)) \equiv H_i[U(x,y);V(x,y)]$, що $H_i[U(x,y);U(x,y)] \equiv F_i[U(x,y)]$ і для довільних з простору $C(\overline{D})$ пар функцій $U(x,y), V(x,y) \in \overline{B}_1$, які задовольняють умову $U(x,y) \geq V(x,y)$, $(x,y) \in \overline{D}$, в області $\overline{B}_1$ виконуються нерівності

$$H_i[U(x,y);V(x,y)] \geq H_i[V(x,y);U(x,y)], i = 1,2,3; \tag{7}$$

3) функції $H_i[U(x,y);V(x,y)]$ в області $\overline{B}_1$ задовольняють умову Ліпшіца

$$|H_i[U_1(x,y);V_1(x,y)] - H_i[U_2(x,y);V_2(x,y)]| \leq$$
$$\leq L\left(|U_1(x,y) - U_2(x,y)| + |V_1(x,y) - V_2(x,y)|\right),(x,y) \in \overline{D};$$

для всяких неперервних функцій $U_j(x,y), V_j(x,y) \in \overline{B}_1$, $j = 1,2$, L — стала Ліпшіца.

Очевидно $H_1[U(x,y);V(x,y)] \equiv H_2[U(x,y);V(x,y)]$, а якщо функція $f[U(x,y)] \in C(\overline{B})$ і має обмежену частинну похідну першого порядку по $U(x,y)$, то $F_i[U(x,y)]$, $i = 1,2,3$, завжди належить просторові $C_1(\overline{B})$.

Введемо позначення:

$$F_i^p(x,y) \equiv H_i[Z_{i,p}(x,y);V_{i,p}(x,y)],$$
$$F_{p,i}(x,y) \equiv H_i[V_{i,p}(x,y);Z_{i,p}(x,y)],(x,y) \in \overline{D}_i,$$
$$\omega_i^p(x,y) = \omega_i(x,y)\,|_{F_i[Z_1(x,y)]=F_i^p(x,y)}, \omega_{i,p}(x,y) = \omega_i(x,y)\,|_{F_i[Z_1(x,y)]=F_{i,p}(x,y)},$$
$$\omega_1^p(x,y) = \omega_{1,p}(x,y) = \omega_1(x,y), p = 0,1,2,...,(x,y) \in \overline{D}_i$$

$$\begin{gathered}\alpha_{i,p}(x,y) = Z_{i,p}(x,y) - \omega_i^p(x,y) - T_iF_i^p(\xi,\eta),\\ \beta_{i,p}(x,y) = V_{i,p}(x,y) - \omega_i^p(x,y) - T_iF_{i,p}(\xi,\eta),(x,y) \in \overline{D}_i,\end{gathered} \tag{8}$$

$$W_{i,p}(x,y) = Z_{i,p}(x,y) - V_{i,p}(x,y), i = 1,2,3, p = 0,1,2,...,(x,y) \in \overline{D}_i.$$

Побудуємо послідовності функцій $\{Z_{i,p}(x,y)\}$, $\{V_{i,p}(x,y)\}$ згідно формул [4,5]

$$\begin{gathered}Z_{i,p+1}(x,y) = \omega_i^p(x,y) + T_iF_i^p(\xi,\eta),\\ V_{i,p+1}(x,y) = \omega_{i,p}(x,y) + T_iF_{i,p}(\xi,\eta),(x,y) \in \overline{D}_i,\end{gathered} \tag{9}$$

$i = 1,2,3$, $p = 0,1,2...$, де за нульове наближення $Z_{i,0}(x,y)$, $V_{i,0}(x,y) \in \overline{B}_1$, вибираємо довільні функції з простору $C(\overline{D}_i)$, які задовольняють умови

$$\alpha_{i,0}(x,y) \geq 0, \beta_{i,0}(x,y) \leq 0, W_{i,0}(x,y) \geq 0,(x,y) \in \overline{D}_i. \tag{10}$$

Справедлива наступна

Лема 1. *Нехай $F_i[U(x,y)] \in C_1(\overline{B})$, $i = 1,2,3$, і інтегральні рівняння* (6) *в просторі функцій $C(\overline{D}_i)$ мають розв'язки, які при $(x,y) \in \overline{D}_i$ задовольняють умови*

$$V_{i,0}(x,y) \leq Z_i(x,y) \leq Z_{i,0}(x,y), i = 1,2,3,(x,y) \in \overline{D}_i. \tag{11}$$

Тоді в області $\overline{B}_1$ справедливі нерівності (10).

Лема 2. *Якщо $F_i[U(x,y)] \in C_1(\overline{B})$, $i = 1,2,3$, то множина функцій нульового наближення $Z_{i,0}(x,y), V_{i,0}(x,y) \in C(\overline{D}_i)$, які задовольняють умови* (10), *непорожня.*

Доведення. Нехай

$$Z_i^*(x,y) = \omega_{i,0}(x,y) + T_iF_i[h(\xi,\eta)],$$
$$V_i^*(x,y) = \omega_i^0(x,y) + T_iF_i[h(\xi,\eta)],(x,y) \in \overline{D}_i, i = 1,2,3,$$

де $h(x,y) \in C(\overline{D})$ – довільна в області $\overline{B}$ функція. Вважаючи, що визначені таким чином функції $Z_i^*(x,y)$, $V_i^*(x,y) \in \overline{B}_1$, позначимо

$$Z_i^*(x,y) - \omega_i^0(x,y) - T_i H_i[Z_i^*(\xi,\eta); V_i^*(\xi,\eta)] = \alpha_i^*(x,y),$$
$$V_i^*(x,y) - \omega_{i,0}(x,y) - T_i H_i[V_i^*(\xi,\eta); Z_i^*(\xi,\eta)] = \beta_i^*(x,y),$$
$$(x,y) \in \overline{D}_i.$$

Тоді функції
$$Z_{i,0}(x,y) = Z_i^*(x,y) + |\alpha_i^*(x,y)|,$$
$$V_{i,0}(x,y) = V_i^*(x,y) - |\beta_i^*(x,y)|,$$

при умові, що $Z_{i,0}(x,y)$, $V_{i,0}(x,y) \in \overline{B}_1$, є функціями нульового наближення, які задовольняють умови (10). Дійсно, поскільки $K_j(x,y;\xi,\eta) > 0$, $j = 1,2$, то приймаючи до уваги умову (7), маємо:

$$W_{1,0}(x,y) = |\alpha_i^*(x,y)| + |\beta_i^*(x,y)| + \omega_{i,0}(x,y) - \omega_i^0(x,y) \geq 0, i = 1,2,3,$$
$$\alpha_{i,0}(x,y) = |\alpha_i^*(x,y)| + \alpha_i^*(x,y) +$$
$$+T_i \left\{ H_i[Z_i^*(\xi,\eta); V_i^*(\xi,\eta)] - H_i[Z_{i,0}(\xi,\eta); V_{i,0}(\xi,\eta)] \right\} \geq 0,$$
$$\beta_{i,0}(x,y) = -|\beta_i^*(x,y)| + \beta_i^*(x,y) +$$
$$+T_i \left\{ H_i[V_i^*(\xi,\eta); Z_i^*(\xi,\eta)] - H_i[V_{i,0}(\xi,\eta); Z_{i,0}(\xi,\eta)] \right\} \leq 0, (x,y) \in \overline{D}_i, i = 1,2,3.$$

Із (8) та (9) одержимо

$$\begin{aligned} Z_{i,p}(x,y) - Z_{i,p+1}(x,y) &= \alpha_{i,p}(x,y), \\ V_{i,p}(x,y) - V_{i,p+1}(x,y) &= \beta_{i,p}(x,y), \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{i,p}(x,y) + \alpha_{i,p+1}(x,y) &= Z_{i,p}(x,y) - Z_{i,p+2}(x,y), \\ \beta_{i,p}(x,y) + \beta_{i,p+1}(x,y) &= V_{i,p}(x,y) - V_{i,p+2}(x,y), \end{aligned} \tag{13}$$

$$W_{i,p+1}(x,y) = \omega_i^p(x,y) - \omega_{i,p}(x,y) + T_i[F_i^p(\xi,\eta) - F_{i,p}(\xi,\eta)], \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{i,p+1}(x,y) &= \omega_i^p(x,y) - \omega_i^{p+1}(x,y) + T_i[F_i^p(\xi,\eta) - F_i^{p+1}(\xi,\eta)], \\ \beta_{i,p+1}(x,y) &= \omega_{i,p}(x,y) - \omega_{i,p+1}(x,y) + T_i[F_{i,p}(\xi,\eta) - F_{i,p+1}(\xi,\eta)], \end{aligned} \tag{15}$$

$(x,y)\overline{D}_i$, $i = 1,2,3$, $p = 0,1,2,....$

Враховуючи (7), (10), із (12) та (14) при $p = 0$ одержимо

$$Z_{i,0}(x,y) \geq Z_{i,1}(x,y), V_{i,0}(x,y) \leq V_{i,1}(x,y),$$
$$W_{i,1}(x,y) \leq 0, (x,y) \in \overline{D}_i, i = 1,2,3.$$

Нехай при $(x,y) \in \overline{D}_i$ справедливі нерівності

$$V_{i,0}(x,y) \leq Z_{i,1}(x,y), Z_{i,0}(x,y) \leq V_{i,1}(x,y). \tag{16}$$

Тоді, враховуючи попередні нерівності, при $(x,y) \in \overline{D}_i$ маємо

$$V_{i,0}(x,y) \leq Z_{i,1}(x,y) \leq V_{i,1}(x,y) \leq Z_{i,0}(x,y), (x,y) \in \overline{D}_i, i = 1,2,3,$$

тобто якщо $Z_{i,0}(x,y), V_{i,0}(x,y) \in \overline{B}_1$, то і $Z_{i,1}(x,y), V_{i,1}(x,y) \in \overline{B}_1$, $i = 1,2,3$.

Із (15) при $p = 0$ одержимо $\alpha_{i,1} \leq 0$, $\beta_{i,1} \geq 0$ для $\forall(x,y) \in \overline{D}_i$, $i = 1,2,3$, а отже із (12) та (14) при $p = 1$ і $(x,y) \in \overline{D}_i$ випливає

$$Z_{i,1}(x,y) \leq Z_{i,2}(x,y), V_{i,1}(x,y) \geq V_{i,2}(x,y), W_{i,2}(x,y) \geq 0.$$

Оскільки в силу умов (7), (16) при $(x,y) \in \overline{D}_i$

$$\begin{gathered}\alpha_{i,0}(x,y) + \alpha_{i,1}(x,y) = Z_{i,0}(x,y) - V_{i,1}(x,y) + \omega_{i,0}(x,y) - \\ -\omega_i^1(x,y) + T_i[F_{i,0}(\xi,\eta) - F_i^1(\xi,\eta)] \geq 0, \\ \beta_{i,0}(x,y) + \beta_{i,1}(x,y) = V_{i,0}(x,y) - Z_{i,1}(x,y) + \omega_i^0(x,y) - \\ -\omega_{i,1}(x,y) + T_i[F_i^0(\xi,\eta) - F_{i,1}(\xi,\eta)] \leq 0,\end{gathered}$$

то із (13) при $p = 0$ і $(x,y) \in \overline{D}_i$ маємо

$$Z_{i,0}(x,y) \geq Z_{i,2}(x,y), V_{i,0}(x,y) \leq V_{i,2}(x,y), i = 1,2,3.$$

Але

$$\begin{gathered}Z_{i,p+1}(x,y) - V_{i,p+2}(x,y) = \omega_i^p(x,y) - \\ -\omega_{i,p+1}(x,y) + T_i[F_i^p(\xi,\eta) - F_{i,p+1}(\xi,\eta)], \\ V_{i,p+1}(x,y) - Z_{i,p+2}(x,y) = \omega_{i,p}(x,y) - \\ -\omega_i^{p+1}(x,y) + T_i[F_{i,p}(\xi,\eta) - F_i^{p+1}(\xi,\eta)],\end{gathered} \tag{17}$$

$(x,y) \in \overline{D}_i$, $i = 1,2,3$ для $\forall p \in N$, а отже враховуючи попередні нерівності із (17) при $p = 0$ одержимо

$$Z_{i,1}(x,y) \leq V_{i,2}(x,y), V_{i,1}(x,y) \geq Z_{i,2}(x,y), (x,y) \in \overline{D}_i, i = 1,2,3,$$

тобто в області $\overline{B}_1$ виконуються умови

$$\begin{gathered}V_{i,0}(x,y) \leq Z_{i,1}(x,y) \leq V_{i,2}(x,y) \leq Z_{i,2}(x,y) \leq V_{i,1}(x,y) \leq Z_{i,0}(x,y), \\ (x,y) \in \overline{D}_i, i = 1,2,3.\end{gathered}$$

Методом математичної індукції переконуємося, що при виконанні умов (16) справедливими будуть нерівності

$$\begin{gathered}\alpha_{i,2p}(x,y) + \alpha_{i,2p+1}(x,y) \geq 0, \alpha_{i,2p+1}(x,y) + \alpha_{i,2p+2}(x,y) \leq 0, \\ \beta_{i,2p}(x,y) + \beta_{i,2p+1}(x,y) \leq 0, \beta_{i,2p+1}(x,y) + \beta_{i,2p+2}(x,y) \geq 0, \\ V_{i,2p}(x,y) \leq Z_{i,2p+1}(x,y) \leq V_{i,2p+2}(x,y) \leq Z_{i,2p+3}(x,y) \leq \\ \leq V_{i,2p+3}(x,y) \leq Z_{i,2p+2}(x,y) \leq V_{i,2p+1}(x,y) \leq Z_{2p}(x,y),\end{gathered} \tag{18}$$

$(x,y) \in \overline{D}_i$, $i = 1,2,3$ для $\forall p \in N$, а отже для довільних p $Z_{i,p}(x,y)$, $V_{i,p}(x,y) \in \overline{B}_1$.

Таким чином справедлива

Теорема 1. *Нехай* $F_i[U(x,y)] \in C_1(\overline{B})$, $i = 1,2,3$, *а функції нульового наближення* $Z_{i,0}(x,y)$, $V_{i,0}(x,y) \in C(\overline{D}_i)$ *задовольняють умови* (10).

Тоді послідовності функцій $\{Z_{i,p}(x,y)\}$, $\{V_{i,p}(x,y)\}$, *побудовані згідно формул* (9), *при виконанні умов* (16) *в області* $\overline{B}_1$ *задовольняють нерівності* (18) $\forall p = 0,1,2,\ldots$.

Покажемо, що побудовані послідовності функцій $\{Z_{i,p}(x,y)\}$ та $\{V_{i,p}(x,y)\}$ в області $\overline{D}_i$ при $p \to \infty$ збігаються рівномірно до єдиного розв'язку інтегральних рівнянь (6). В силу виконання в області $\overline{B}_1$ нерівностей (18), для цього достатньо показати, що

$$|W_{i,p}(x,y)| \underset{p\to\infty}{\overset{\overline{D}_i}{\rightrightarrows}} 0.$$

Нехай $\max\limits_i \sup\limits_{\overline{D}_i} W_{i,0}(x,y) \le d$, $\max\limits_j \sup\limits_{\overline{D}\times\overline{D}} K_j(x,y;\xi,\eta) \le 0,5C$. Тоді із (14) методом математичної індукції переконуємося в справедливості оцінок

$$|W_{i,p}(x,y)| \le \frac{[CLQ(x-x_1+y_2-y)]^p}{p!} d, \forall p = 0,1,2,...,$$

де $Q = \sup\{1, x-x_1+y_2-y\}$, а отже, в силу нерівностей (18)

$$\lim_{p\to\infty} Z_{i,p}(x,y) = \lim_{p\to\infty} V_{i,p}(x,y) = Z_i(x,y), (x,y) \in \overline{D}_i, i = 1,2,3. \qquad (19)$$

Щоб переконатися в тому, що граничні функції $Z_i(x,y)$ є розв'язками відповідних інтегральних рівнянь (6), достатньо в (9) перейти до границі, коли $p \to \infty$.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді послідовності функцій* $\{Z_{i,p}(x,y)\}$ *та* $\{V_{i,p}(x,y)\}$, *визначені згідно закону* (9), (10), (16), *збігаються абсолютно і рівномірно до єдиного розв'язку відповідних інтегральних рівнянь* (6) *при* $(x,y) \in \overline{D}_i$, $i = 1,2,3$, *причому в області* $\overline{B}_1$ *справедливі нерівності*

$$\begin{gathered} V_{i,2p}(x,y) \le Z_{i,2p+1}(x,y) \le V_{i,2p+2}(x,y) \le Z_{i,2p+3}(x,y) \le Z_i(x,y) \le \\ \le V_{i,2p+3}(x,y) \le Z_{i,2p+2}(x,y) \le V_{i,2p+1}(x,y) \le Z_{i,2p}(x,y), \\ (x,y) \in \overline{D}_i, i = 1,2,3, \end{gathered} \qquad (20)$$

для $\forall p \in N$, *де* $Z_i(x,y)$ *– єдиний розв'язок відповідних інтегральних рівнянь* (6).

Доведення. Єдиність розв'язку інтегральних рівнянь (6)доводиться методом від супротивного. Для доведення нерівностей (20) припустимо, що для деякого номера $p \in N$ в деякій точці $(x,y) \in \overline{D}_i$ $Z_{i,2p+1}(x,y) > Z_i(x,y)$. Тоді для $\forall k \in N$ в силу нерівностей (18) в точці (x,y) $Z_{i,2(p+k)+1}(x,y) > Z_i(x,y)$, а отже послідовність функцій $\left\{Z_{i,2(p+k)+1}(x,y)\right\}$ при $k \to \infty$ в точці (x,y) не збігається до розв'язку рівняння (6), що суперечить доведеному. Аналогічно доводяться всі інші нерівності в (20).

Наслідок 1. *Нехай* $\psi(y) = \varphi_j(x) = 0$, $j = 0,1,2$, $F_i[U(x,y)] \in C_1(\overline{B})$, *причому* $F_i[U(x,y)] \equiv H_i[U(x,y);0]$. *Тоді, якщо* $F_i[0] \le (\ge) 0$ *в області* $\overline{B}$, *то розв'язок задачі* (1)-(4) *при* $(x,y) \in \overline{D}$ *задовольняє нерівність* $U(x,y) \le (\ge) 0$.

Наслідок 2. *Якщо рівняння* (1) *є лінійним, тобто* $f(x,y,U(x,y)) \equiv f(x,y) + a_3(x,y)U(x,y)$, $a_3(x,y), f(x,y) \in C(\overline{D})$, *то для виконання умов наслідку 1 достатньо вважати, що* $f_1(x,y) \le (\ge) 0$, $(x,y) \in \overline{D}$, $a_1(x,y)a_2(x,y) + a_{2,y}(x,y) + a_3(x,y) \le (\ge) 0$, $(x,y) \in \overline{D}_1 \cup \overline{D}_2$, $a_1(x,y)a_2(x,y) + a_{1,x}(x,y) + a_3(x,y) \le (\ge) 0$, $(x,y) \in \overline{D}_3$.

Зауваження. Якщо $F_i[U(x,y)] \in C_1(\overline{B})$ і $F_i[U(x,y)] \equiv H_i[U(x,y);0]$, то для побудови двосторонніх наближень до розв'язку задачі (1)-(5) достатньо будувати одну послідовність функцій $\{Z_{i,p}(x,y)\}$, а отже в даному випадку кількість операцій для побудови двосторонніх наближень зменшується удвічі.

1. *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика. Москва: Мир, 1969. - 448 с.
2. *Маринець В.В., Добридень А.В.* Про деякі некласичні задачі для квазілінійних рівнянь гіперболічного типу// Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. 2009. Вип. 17. - С. 132-144.
3. *Маринець. В.В. Трошина А.В.* Узагальнена задача Дарбу // Наук. вісник УжНУ. Серія матиматика. - Ужгород, 1999. Вип. 4.-С. 79-84.
4. *Маринець В.В.* Деякі підходи до побудови наближеного розв'язку задачі Гурса для систем визначених квазілінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними з аргументом, що відхиляється // Укр. мат. журнал. - 1995. - т. 47, № 12. - С. 1667-1675.
5. *Курпель Н. С., Шувар Б. А.* Двусторонние операторные неравенства и их применения. - Киев:Наукова думка, 1980. – 268 с.

Одержано 03.06.2009