УДК 517.518

М. М. Пагіря (Мукачівський держ. ун–т)

ОБЕРНЕНІ ПОХІДНІ 2–ГО ТИПУ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

The some properties of inverse derivatives of second type established.

Досліджені деякі властивості обернених похідних 2–го типу.

Вступ. Розвинення функцій у ланцюговий дріб належить до важливих задач теорії наближення функцій. Функції також наближають степеневими рядами, ортогональними багаточленами, апроксимаціями Паде і т.п. Розвинення у ланцюговий дріб використовують для обчислення значень функцій на комп'ютері [1,2]. Отримують такі розвинення або із розвинення функції у степеневий ряд шляхом побудови відповідного даному степеневому ряду правильного ланцюгового C–дробу [3–6], або за допомогою формули Тіле [7, 8], яка Тіле ґрунтується на обернених похідних. В роботі [9] показано еквівалентність цих двох способів розвинення функцій у правильний ланцюговий C–дріб.

В роботі [10] розглянутий обернений ланцюговий дріб Тіле і отримана формула типу Тіле для розвинення функцій в ланцюговий дріб такого виду, яка ґрунтується на обернених похідних 2–го типу. Встановленню деяких властивостей обернених похідних 2–го типу присвячена ця робота.

1. Формула типу Тіле. Розглянемо задачу наближення функцій однієї дійсної змінної ланцюговим дробом виду

$$D_n(x) = \frac{1}{b_0(x)} \underset{+}{} \frac{a_1(x)}{b_1(x)} \underset{+}{} \frac{a_2(x)}{b_2(x)} \underset{+}{} \cdots \underset{+}{} \frac{a_n(x)}{b_n(x)} = \left(b_0(x) + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{a_k(x)}{b_k(x)} \right)^{-1}, \qquad (1)$$

де $a_k(x) \not\equiv 0$.

Нехай функція $f(x)$ в кожній точці деякої області $\Omega \in \mathbb{R}$ має похідні (скінчене значення, $-\infty$ чи $+\infty$) до n–го порядку включно. Визначимо для функції $u = f(x)$ обернені похідні 2–го типу (ОП2Т) наступним чином [10]:

$${}^{[0]}u = \frac{1}{u}, \quad {}^{[1]}u = -\frac{u^2}{u'}, \quad {}^{[k]}u = k \cdot \backprime\left({}^{[k-1]}u\right) + {}^{[k-2]}u, \qquad k = 2, 3, \ldots . \qquad (2)$$

Тоді для розвинення функції $u = f(x)$ в околі точки $x = x_*$ у ланцюговий дріб виду (1) можна скористатися формулою типу Тіле

$$f(x) = \left({}^{[0]}f(x_*) + \frac{x - x_*}{{}^{[1]}f(x_*)} \underset{+}{} \frac{x - x_*}{2 \cdot \backprime\left({}^{[1]}f(x_*)\right)} \underset{+}{} \cdots \underset{+}{} \frac{x - x_*}{n \cdot \backprime\left({}^{[n-1]}f(x_*)\right)} \underset{+}{} \cdots \right)^{-1} .$$

Зауваження 1. *Із формули* (2) *випливають два співвідношення*

$$1. \quad {}^{[k]}f(x) \neq \backprime\left({}^{[k-1]}f(x)\right) ;$$

$$2. \quad \backprime\left({}^{[k-1]}f(x)\right) = \frac{{}^{[k]}f(x) - {}^{[k-2]}f(x)}{k} . \qquad (3)$$

2. Властивості обернених похідних 2–го типу. Встановимо деякі властивості ОП2Т.

Твердження 1. *Нехай в деякій точці* $x_0 \in \Omega$ *функція* $f(x_0) \neq 0$. *Тоді : 1.* ${}^{[1]}f(x_0) = +\infty$, *якщо* $f'(x_0) = 0$ *і функція* $f(x)$ *монотонно спадає в деякому околі точки* x_0; *2.* ${}^{[1]}f(x_0) = -\infty$, *якщо* $f'(x_0) = 0$ *і функція* $f(x)$ *монотонно зростає в деякому околі точки* x_0; *3.* ${}^{[1]}f(x_0) = 0$, *якщо* $f'(x_0) = \pm\infty$.

Твердження 2. *Нехай в деякій точці* $x_0 \in \Omega$ *функція* $f'(x_0) \neq 0$. *Тоді* ${}^{[1]}f(x_0) = \pm\infty$, *якщо* $f(x_0) = \mp\infty$.

Твердження 1 та 2 безпосередньо випливають із (2) та властивостей „звичайних“ похідних [11, 12].

Зауваження 2. *За аналогією із „звичайними“ похідними, для ОП2Т можна означити ліву ОП2Т* ${}^{[1]}f_-(x)$, *праву ОП2Т* ${}^{[1]}f_+(x)$ *та аналог похідних чисел* [13].

Із означення ОП2Т та (2) випливає наступне твердження.

Твердження 3. *Нехай в деякій точці* $x_0 \in \Omega$ *має місце співвідношення* ${}^{[n-2]}f(x_0) = C$, *де* $C = const, C \neq 0, |C| < \infty$. *Тоді: 1. якщо* ${}^{[n-1]}f(x) = 0$, *то* ${}^{[n]}f(x) = \infty$; *2. якщо* ${}^{[n-1]}f(x) = \infty$, *то* ${}^{[n]}f(x) = 0$.

Твердження 4. *Якщо* $C = const, C \neq 0$, *то* ${}^{[1]}C = -\infty$.

Доведення. Із (2) випливає, що

$$ {}^{[1]}(C) = -\frac{C^2}{(C)'} = -\infty. $$

Твердження 5. *Нехай в кожній точці області* Ω *існують ОП2Т функцій* $u = f(x)$ *та* $v = g(x)$. *Тоді ОП2Т суми, різниці, добутку та частки цих функцій обчислюються за допомогою формул:*

$$ {}^{[1]}(u \pm v) = \frac{(u \pm v)^2 \cdot {}^{[1]}u \cdot {}^{[1]}v}{u^2 \cdot {}^{[1]}v \pm v^2 \cdot {}^{[1]}u}, \tag{4} $$

$$ {}^{[1]}(u \cdot v) = \frac{uv \cdot {}^{[1]}u \cdot {}^{[1]}v}{u \cdot {}^{[1]}v + v \cdot {}^{[1]}u}, \tag{5} $$

$$ {}^{[1]}(u/v) = \frac{(u/v) \cdot {}^{[1]}u \cdot {}^{[1]}v}{u \cdot {}^{[1]}v - v \cdot {}^{[1]}u}. \tag{6} $$

Доведення. Із (2) для ОП2Т суми/різниці двох функцій маємо

$$ {}^{[1]}(u \pm v) = \frac{-(u \pm v)^2}{u' \pm v'}. $$

Із (2) також випливає, що

$$ u' = -\frac{u^2}{{}^{[1]}u} \ . \tag{7} $$

Тоді

$$ {}^{[1]}(u \pm v) = \frac{(u \pm v)^2}{\dfrac{-u^2}{{}^{[1]}u} \pm \dfrac{-v^2}{{}^{[1]}v}} = \frac{(u \pm v)^2 \cdot {}^{[1]}u \cdot {}^{[1]}v}{u^2 \cdot {}^{[1]}v \pm v^2 \cdot {}^{[1]}u} \ . $$

Для добутку двох функцій із (2) та (7) отримуємо :

$$^{[1]}(u \cdot v) = \frac{-u^2 v^2}{u'v + uv'} = \frac{-\,u^2 v^2}{\dfrac{-\,u^2 v}{^{[1]}u} + \dfrac{-\,v^2 u}{^{[1]}v}} = \frac{uv \cdot {}^{[1]}u \cdot {}^{[1]}v}{u \cdot {}^{[1]}v + v \cdot {}^{[1]}u}.$$

У випадку частки функцій маємо:

$$^{[1]}(u/v) = \frac{-u^2/v^2}{\dfrac{u'v - uv'}{v^2}} = \frac{-u^2}{\dfrac{-\,vu^2}{^{[1]}u} + \dfrac{uv^2}{^{[1]}v}} = \frac{(u/v) \cdot {}^{[1]}u \cdot {}^{[1]}v}{u \cdot {}^{[1]}v - v \cdot {}^{[1]}u}\ .$$

Зауваження 3. *Очевидно, що існування ОП2Т функцій $u = f(x)$ та $v = g(x)$ буде гарантувати існування ОП2Т їх суми, різниці, добутку та частки у тому випадку, коли ОП2Т скінчені. Надалі будемо припускати, що всі формули мають зміст.*

Твердження 6. *Якщо функції $u_i = f_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, мають ОП2Т, то*

$$^{[1]}\left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right) = \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} u_i\right)^2 \prod\limits_{i=1}^{n} {}^{[1]}u_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} u_i^2 \prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} {}^{[1]}u_j}\ . \tag{8}$$

Доведення. Для доведення (8) скористаємося методом повної математичної індукції. Коли $n = 2$ формула виконується. При $n = 3$ з (4) маємо :

$$^{[1]}\big(u_1 + u_2 + u_3\big) = \frac{(u_1 + u_2 + u_3)^2 \cdot {}^{[1]}(u_1 + u_2) \cdot {}^{[1]}u_3}{(u_1 + u_2)^2 \cdot {}^{[1]}u_3 + u_3^2 \cdot {}^{[1]}(u_1 + u_2)} =$$

$$= \frac{(u_1 + u_2 + u_3)^2 \cdot \dfrac{(u_1 + u_2)^2 \cdot {}^{[1]}u_1 \cdot {}^{[1]}u_2}{u_1^2 \cdot {}^{[1]}u_2 + u_2^2 \cdot {}^{[1]}u_1} \cdot {}^{[1]}u_3}{(u_1 + u_2)^2 \cdot {}^{[1]}u_3 + u_3^2 \cdot \dfrac{(u_1 + u_2)^2 \cdot {}^{[1]}u_1 \cdot {}^{[1]}u_2}{u_1^2 \cdot {}^{[1]}u_2 + u_2^2 \cdot {}^{[1]}u_1}} =$$

$$= \frac{(u_1 + u_2 + u_3)^2 \cdot {}^{[1]}u_1 \cdot {}^{[1]}u_2 \cdot {}^{[1]}u_3}{u_1^2 \cdot {}^{[1]}u_2 \cdot {}^{[1]}u_3 + u_2^2 \cdot {}^{[1]}u_1 \cdot {}^{[1]}u_3 + u_3^2 \cdot {}^{[1]}u_1 \cdot {}^{[1]}u_2}\ .$$

Припустимо, що (8) виконується при $n = k$. Тоді при $n = k + 1$ з (4) та припущення отримуємо

$$^{[1]}\left(\sum_{i=1}^{k+1} u_i\right) = {}^{[1]}\left(\sum_{i=1}^{k} u_i + u_{k+1}\right) = \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{k+1} u_i\right)^2 \cdot {}^{[1]}\left(\sum\limits_{i=1}^{k} u_i\right) \cdot {}^{[1]}u_{k+1}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{k} u_i\right)^2 \cdot {}^{[1]}u_{k+1} + u_{k+1}^2 \cdot {}^{[1]}\left(\sum\limits_{i=1}^{k} u_i\right)} =$$

$$= \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{k+1} u_i\right)^2 \cdot \dfrac{\left(\sum\limits_{i=1}^{k} u_i\right)^2 \prod\limits_{i=1}^{k} {}^{[1]}u_i}{\sum\limits_{i=1}^{k} u_i^2 \prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} {}^{[1]}u_j} \cdot {}^{[1]}u_{k+1}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{k} u_i\right)^2 \cdot {}^{[1]}u_{k+1} + u_{k+1}^2 \cdot \dfrac{\left(\sum\limits_{i=1}^{k} u_i\right)^2 \prod\limits_{i=1}^{k} {}^{[1]}u_i}{\sum\limits_{i=1}^{k} u_i^2 \prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} {}^{[1]}u_j}} = \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{k+1} u_i\right)^2 \prod\limits_{i=1}^{k+1} {}^{[1]}u_i}{\sum\limits_{i=1}^{k+1} u_i^2 \prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k+1} {}^{[1]}u_j} .$$

Твердження 7. *Якщо функції $u_i = f_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, мають ОП2Т, то*

$$ {}^{[1]}\left(\prod_{i=1}^{n} u_i\right) = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n} (u_i \cdot {}^{[1]}u_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} u_i \cdot \prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} {}^{[1]}u_j} . \tag{9}$$

Доведення. Доведемо твердження за допомогою методу повної математичної індукції. При $n = 2$ формула (9) виконується. Коли $n = 3$ з (5) маємо

$$ {}^{[1]}(u_1u_2u_3) = \frac{u_1u_2u_3 \cdot {}^{[1]}(u_1u_2) \cdot {}^{[1]}u_3}{u_1u_2 \cdot {}^{[1]}u_3 + u_3 \cdot {}^{[1]}(u_1u_2)} = \frac{u_1u_2u_3 \cdot \dfrac{u_1u_2 \cdot {}^{[1]}u_1 \cdot {}^{[1]}u_2}{u_1 \cdot {}^{[1]}u_2 + u_2 \cdot {}^{[1]}u_1} \cdot {}^{[1]}u_3}{u_1u_2 \cdot {}^{[1]}u_3 + u_3 \cdot \dfrac{u_1u_2 \cdot {}^{[1]}u_1 \cdot {}^{[1]}u_2}{u_1 \cdot {}^{[1]}u_2 + u_2 \cdot {}^{[1]}u_1}} =$$

$$= \frac{u_1u_2u_3 \cdot {}^{[1]}u_1 \cdot {}^{[1]}u_2 \cdot {}^{[1]}u_3}{u_1 \cdot {}^{[1]}u_2 \cdot {}^{[1]}u_3 + u_2 \cdot {}^{[1]}u_1 \cdot {}^{[1]}u_3 + u_3 \cdot {}^{[1]}u_1 \cdot {}^{[1]}u_2} .$$

Зробимо припущення, що (9) має місце при $n = k$. Тоді із припущення та (5) при $n = k + 1$ отримуємо :

$$ {}^{[1]}\left(\prod_{i=1}^{k+1} u_i\right) = {}^{[1]}\left(\prod_{i=1}^{k} u_i \cdot u_{k+1}\right) = \frac{\prod\limits_{i=1}^{k+1} u_i \cdot {}^{[1]}\left(\prod\limits_{i=1}^{k} u_i\right) \cdot {}^{[1]}u_{k+1}}{\prod\limits_{i=1}^{k} u_i \cdot {}^{[1]}u_{k+1} + u_{k+1} \cdot {}^{[1]}\left(\prod\limits_{i=1}^{k} u_i\right)} =$$

$$= \frac{\prod\limits_{i=1}^{k+1} u_i \cdot \dfrac{\prod\limits_{i=1}^{k} u_i \cdot \prod\limits_{i=1}^{k} {}^{[1]}u_i}{\sum\limits_{i=1}^{k} u_i \cdot \prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} {}^{[1]}u_j} \cdot {}^{[1]}u_{k+1}}{\prod\limits_{i=1}^{k} u_i \cdot {}^{[1]}u_{k+1} + u_{k+1} \cdot \dfrac{\prod\limits_{i=1}^{k} u_i \cdot \prod\limits_{i=1}^{k} {}^{[1]}u_i}{\sum\limits_{i=1}^{k} u_i \cdot \prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} {}^{[1]}u_j}} = \frac{\prod\limits_{i=1}^{k+1} (u_i \cdot {}^{[1]}u_i)}{\sum\limits_{i=1}^{k+1} u_i \cdot \prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k+1} {}^{[1]}u_j} .$$

Твердження 8. *Якщо функція $u = f(x)$ має ОП2Т $2n$–го та $2n+1$–го порядків, $n = 0, 1, 2, \ldots$, то виконуються співвідношення*

$$ {}^{[2n]}(Cu) = \frac{1}{C} \cdot {}^{[2n]}u, \qquad {}^{[2n+1]}(Cu) = C \cdot {}^{[2n+1]}u, \qquad \text{де} \quad C = const. $$

Доведення. Доведемо твердження за допомогою методу повної математичної індукції. Коли $n = 0$, то з (2) маємо :

$$ {}^{[0]}(Cu) = \tfrac{1}{C} \cdot {}^{[0]}u, \quad {}^{[1]}(Cu) = C \cdot {}^{[1]}u \ . $$

Припустимо, що твердження виконується при $n = k$. При $n = k+1$ із (2) та властивості обернених похідних ${}^{\backprime}(Cu) = \frac{1}{C}\,{}^{\backprime}u$, яка легко отримати із відповідної властивості для оберненої різниці 1–го порядку [14], випливає, що

$$ {}^{[2k+2]}(Cu) = (2k+2)\,{}^{\backprime}\left({}^{[2k+1]}(Cu)\right) + {}^{[2k]}(Cu) = (2k+2)\,{}^{\backprime}\left(C \cdot {}^{[2k+1]}u\right) + $$

$$ + {}^{[2k]}(Cu) = \tfrac{1}{C}\left((2k+2)\,{}^{\backprime}\left({}^{[2k+1]}u\right) + {}^{[2k]}u\right) = \tfrac{1}{C} \cdot {}^{[2k+2]}u \ , $$

$$ {}^{[2k+3]}(Cu) = (2k+3) \cdot {}^{\backprime}\left({}^{[2k+2]}(Cu)\right) + {}^{[2k+1]}(Cu) = (2k+3) \cdot {}^{\backprime}\left(\tfrac{1}{C}\,{}^{[2k+2]}u\right) + $$

$$ + {}^{[2k+1]}(Cu) = C \cdot \left((2k+3) \cdot {}^{\backprime}\left({}^{[2k+2]}u\right) + {}^{[2k+1]}Cu\right) = C \cdot {}^{[2k+3]}u \ . $$

Зауваження 4. *Із властивостей для обернених різниць функції $u = f(x)$ легко отримати наступні властивості для обернених похідних* [14]*:*

$$ {}^{(2n)}(u + C) = {}^{(2n)}u + C, \quad {}^{(2n+1)}(u + C) = {}^{(2n+1)}u, $$

де $C = const, n = 0, 1, 2, \ldots$.

Для ОП2Т подібні властивості не мають місця, оскільки

$$ {}^{[0]}(u + C) = \frac{1}{u + C}, \quad {}^{[1]}(u + C) = \left(\frac{C + u}{u}\right)^2 {}^{[1]}u \ . $$

3. Взаємозв'язок між оберненими похідними та ОП2Т. Формула Тіле ґрунтується на обернених похідних, а формула типу Тіле на ОП2Т. Встановимо взаємозв'язок між ними для функції $u = f(x)$.

В [10] показано, що

$$ {}^{[0]}u = \frac{1}{u}, \ {}^{[1]}u = -\frac{u^2}{u'}, \ {}^{[2]}u = \frac{u''}{uu'' - 2(u')^2}, \ {}^{[3]}u = \frac{12(u')^3 + 2u^2u''' - 12uu'u''}{3(u'')^2 - 2u'u'''} \ . \quad (10) $$

В свою чергу, „звичайні“ похідні визначаються через обернені похідні наступним чином [15]

$$ u = {}^{(0)}u, \ u' = \frac{1}{{}^{\backprime}u}, \ u'' = \frac{-2}{({}^{\backprime}u)^2({}^{\backprime\backprime}u - u)}, \ u''' = \frac{6\,{}^{\backprime\backprime\backprime}u}{({}^{\backprime}u)^3({}^{\backprime\backprime}u - u)^2({}^{\backprime\backprime\backprime}u - {}^{\backprime}u)} \ . \qquad (11) $$

Підставивши перші два співвідношення із (11) у перші два із (10) отримаємо :

$$ {}^{[0]}u = \frac{1}{{}^{(0)}u}, \quad {}^{[1]}u = -u^2\,{}^{\backprime}u. \qquad (12) $$

Далі підставимо співвідношення із (11) у третє із (10)

$$
{}^{[2]}u=\frac{\dfrac{-\,2}{({}^{\backprime}u)^2({}^{\backprime\backprime}u-u)}}{\dfrac{-\,2u}{({}^{\backprime}u)^2({}^{\backprime\backprime}u-u)}-\dfrac{2}{({}^{\backprime}u)^2}}=\frac{1}{{}^{\backprime\backprime}u}. \tag{13}
$$

Виразимо третє співвідношення із (10) через (11)

$$
{}^{[3]}u=\frac{\dfrac{12}{({}^{\backprime}u)^3}+\dfrac{24u}{({}^{\backprime}u)^3({}^{\backprime\backprime}u-u)}+\dfrac{12u^2\;{}^{\backprime\backprime\backprime}u}{({}^{\backprime}u)^3({}^{\backprime\backprime}u-u)^2({}^{\backprime\backprime\backprime}u-{}^{\backprime}u)}}{\dfrac{12}{({}^{\backprime}u)^4({}^{\backprime\backprime}u-u)^2}-\dfrac{12\;{}^{\backprime\backprime\backprime}u}{({}^{\backprime}u)^4({}^{\backprime\backprime}u-u)^2({}^{\backprime\backprime\backprime}u-{}^{\backprime}u)}}=
$$

$$
=-\Big(({}^{\backprime\backprime}u-u)^2({}^{\backprime\backprime\backprime}u-{}^{\backprime}u)+2u({}^{\backprime\backprime}u-u)({}^{\backprime\backprime\backprime}u-{}^{\backprime}u)+u^2\;{}^{\backprime\backprime\backprime}u\Big)=
$$

$$
=-\Big(({}^{\backprime\backprime\backprime}u-{}^{\backprime}u)(({}^{\backprime\backprime}u)^2-2u\;{}^{\backprime\backprime}u+u^2+2u\;{}^{\backprime\backprime}u-2u^2)+u^2\;{}^{\backprime\backprime\backprime}u\Big)=
$$

$$
=-({}^{\backprime\backprime\backprime}u-{}^{\backprime}u)({}^{\backprime\backprime}u)^2-u^2\;{}^{\backprime}u\;. \tag{14}
$$

Зауваження 5. *Отримані співвідношення* (12)–(14)*, вказуються на на те, що, взагалі кажучи, між оберненими похідними та ОП2Т існує нелінійний взаємозв'язок. Питання про загальну формулу такого співвідношення залишається відкритим.*

Висновки. В даній роботі, яка є продовженням досліджень розпочатих в [10], встановлені деякі нові властивості ОП2Т. Також в останньому пункті проілюстровано, що ОП2Т визначаються через обернені похідні нелінійно. Оскільки на ОП2Т ґрунтується формула типу Тіле, то встановлення нових властивостей обернених похідних такого типу є актуальним.

1. *Khovanskii A. N.* The Application of Continued Fractions and Their Generalizations to Problems in Approximation Theory. – Groningen: P. Noordhoff, 1963. – 212 p.
2. *Пагіря М. М., Кацала Р. А.* Розвитки деяких функцій у ланцюгові дроби // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. – 2007. – Вип. 14–15. – С. 107–116.
3. *Wall H. S.* Analytic Theory of Continued Fractions. – New York: D. Van Nostrand Co., 1948. – 433 p.
4. *Perron O.* Die Lehre von den Kettenbrüchen. Band II. – Stuttgart: Teubner, 1957. – 315 s.
5. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 414 с.
6. *Скоробогатько В. Я.* Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. – М.: Наука, 1983. – 312 с.
7. *Thiele T. N.* Interpolationsprechnung. – Leipzig: Commisission von B. G. Teubner, 1909.– XII + 175 S.
8. *Nörlund N. E.* Vorlesungen über Differenzenrechnung. – Berlin, J. Springer, 1924. – 551 S.
9. *Пагіря М. М.,Кацала Р. А.* Еквівалентність двох методів побудови правильних ланцюгових C–дробів // Український математичний журнал. – 2009. – **61**, № 7. – С. 1005–1009.
10. *Пагіря М. М.* Обернений ланцюговий дріб Тіле // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. – 2008. – Вип. 17. – С. 179–192.
11. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. I. – 7–е изд. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1969. – 608 с.

12. *Харди Г. Х.* Курс чистой математики – М.: Гос. изд. иностранной литературы, 1949.– 512 с.
13. *Титчмарш Е.* Теория функций: Пер. с анл.–2–е изд. перераб. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1980. – 464 с.
14. *Микеладзе Ш. Е.* Численные методы математического анализа. – М.: ГИТТЛ, 1953. – 527 с.
15. *Кацала Р. А.* Зв'язок між оберненими похідними та похідними функції однієї дійсної змінної // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. – 2008. – Вип. 16. – С. 73 – 81.

Одержано 21.07.2009