УДК 519.21

О. В. Полосьмак(Київський національний ун-т імені Тараса Шевченка)

ШВИДКІСТЬ РІВНОМІРНОЇ ЗБІЖНОСТІ ВЕЙВЛЕТ РОЗКЛАДІВ ПРОЦЕСІВ З ПРОСТОРУ ОРЛІЧА ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОГО ТИПУ

In the paper we present the rate of uniform convergence in probability on $[0,T]$ of wavelet expansions for random process $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ from Orlicz spaces of exponential type, with $EX(t) = 0, E|X(t)|^2 < \infty$ in the space $C(0,T)$.

В роботі отримано швидкість рівномірної збіжності за ймовірністю на $[0,T]$ вейвлет розкладів випадкових Орлічевих процесів єкспоненційного типу в просторі $C(0,T)$.

1 Вступ

В даній роботі отримано швидкість рівномірної збіжності за ймовірністю вейвлет зображень Орлічевих випадкових процесів експоненціального типу. Рівномірна збіжність вейвлет-розкладів обмежених на $\mathbb{R}$ невипадкових функцій розглядалась в книзі [4]. Питання рівномірної збіжності з ймовірністю 1 та за ймовірністю вейвлет зображень випадкових процесів з різних просторів досліджується в статтях [6], [7], [9]. Швидкість збіжності вейвлет розкладів процесів з L_2 досліджена в роботі [6]. В цій роботі розглянуто $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$-випадковий строго Орлічевий процес експоненціального типу такий, що $E|X(t)|^2 < \infty$ для всіх $t \in \mathbb{R}$, представлено його вейвлет-зображення за допомогою неперервних вейвлет функцій:

$$X(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \xi_{0k}\phi_{0k}(t) + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \eta_{jk}\psi_{jk}(t).$$

Наведено умови, при яких цей розклад збігається рівномірно за ймовірністю до випадкового процесу $X(t)$. Знайдено швидкість збіжності вейвлет зображення в просторі $C(0,T)$, тобто оцінка для

$$P\left\{\sup_{0\le t\le T} |X(t) - X_{n,k_j}(t)| > \varepsilon\right\},$$

де

$$X_{n,k_j}(t) = \sum_{|k|\le k_0} \xi_{0k}\phi_{0k}(t) + \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{|k|\le k_j} \eta_{jk}\psi_{jk}(t).$$

Робота складається з п'яти розділів. Другий розділ містить необхідні відомості з вейвлет аналізу. В третьому розділі наведено основні означення з теорії Орлічевих випадкових процесів та умови для рівномірної збіжності за ймовірністю вейвлет розкладів випадкових Орлічевих процесів експоненційного типу. Четвертий розділ містить доведення теореми про швидкість збіжності вейвлет зображення процесу в просторі $C(0,T)$.

2 Вейвлет-зображення випадкових процесів

Нехай $\phi = \{\phi(x), x \in \mathbb{R}\}$-функції з простору $L_2(\mathbb{R})$ та $\widehat{\phi}(y)$- перетворення Фур'є ϕ:

$$\widehat{\phi}(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-iyx}\phi(x)\,dx.$$

Припустимо, що виконуються наступні умови:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(y + 2\pi k)|^2 = 1$$

майже скрізь.

Нехай існує така 2π-періодична функція $m_0(x) \in L_2([0, 2\pi])$, що:

$$\widehat{\phi}(y) = m_0[y/2]\widehat{\phi}[y/2],$$

$\widehat{\phi}(0) \neq 0$ та функція $\widehat{\phi}(y)$ неперервні в 0. В цьому випадку функція $\phi(x)$ називається f-вейвлетом.

Нехай $\psi(x)$- обернене перетворення Фур'є до функції:

$$\widehat{\psi}(y) = \overline{m_0\left(\frac{y}{2} + \pi\right)} \cdot \exp\left\{-i\frac{y}{2}\right\} \cdot \widehat{\psi}\left(\frac{y}{2}\right).$$

Функція

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{iyx}\widehat{\psi}(y)\,dy$$

називається m-вейвлетом.

Нехай

$$\phi_{jk}(x) = 2^{j/2}\phi(2^j x - k); \quad \psi_{jk}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k), \quad j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Відомо, що сім'я функцій $\{\phi_{0k}; \psi_{jk}, j = 0, 1, 2, ...; k \in \mathbb{Z}\}$ ортонормований базис в $L_2(\mathbb{R})$ (дивись, наприклад, [2], [3]).

Будь-яка функція $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$ може бути зображена у вигляді:

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_{0k}\phi_{0k}(t) + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta_{jk}\psi_{jk}(t), \tag{2}$$

$$\alpha_{0k} = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\phi_{0k}(x)}\,dx, \beta_{jk} = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\psi_{jk}(x)}\,dx.$$

Зображення (2) називається вейвлет-зображенням.

Ряди (2) збігаються в нормі простору $L_2(\mathbb{R})$, тобто

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\alpha_{0k}|^2 + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\beta_{jk}|^2 < \infty.$$

Інтеграли, які визначають α_{0k} та β_{jk}, можуть існувати для функцій з $L_1(\mathbb{R})$ та з інших просторів. Тому можна отримати зображення (2) для більш широкого класу функцій, ніж $L_2(\mathbb{R})$.

Нехай $\{\Omega, B, P\}$- стандартний ймовірнісний простір. $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$- випадковий процес, $EX(t) = 0$.

Можна отримати зображення (2) для випадкових процесів, траєкторії яких належать простору $L_2(\mathbb{R})$ з ймовірністю одиниця. Але багато процесів не мають такої властивості. Наприклад, траєкторії стаціонарних процесів не належать $L_2(\mathbb{R})$.

Вивчимо зображення типу (2) для $X(t)$, тобто:

$$X(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \xi_{0k}\phi_{0k}(t) + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \eta_{jk}\psi_{jk}(t), \tag{3}$$

де інтеграли

$$\xi_{0k} = \int_{\mathbb{R}} X(t)\overline{\phi_{0k}(t)}\,dt, \eta_{jk} = \int_{\mathbb{R}} X(t)\overline{\psi_{jk}(t)}\,dt$$

будуть визначені як інтеграли в середньому квадратичному.

При доведенні рівномірної збіжності вейвлет розкладу (3) будемо розглядати таке наближення:

$$X_{n,k_j}(t) = \sum_{|k|\le k_0} \xi_{0k}\phi_{0k}(t) + \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{|k|\le k_j} \eta_{jk}\psi_{jk}(t). \tag{4}$$

Означення 1. *[4] Нехай ϕ це f-вейвлет. Для ϕ виконується припущення S, якщо існує функція $\Phi = \{\Phi(x), x \ge 0\}$ така, що $\Phi(0) < \infty$, $\Phi(x)$ спадає при $x \ge 0$, $|\phi(x)| \le \Phi(|x|)$ майже скрізь та*

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi(|x|)\,dx < \infty.$$

3 Умови рівномірної збіжності вейвлет-зображень процесів з простору Орліча експоненціального типу

Означення 2. *[1] Неперервна парна опукла функція $U = \{U(x), x \in \mathbb{R}\}$ називається C-функцією, якщо $U(0) = 0$ та $U(x)$ монотонно зростає при $x >$ 0.*

Нехай $\{\Omega, L, P\}$–стандартний ймовірнісний простір.

Означення 3. *[1] Нехай $U(x)$– довільна C-функція. Простором Орліча випадкових величин $L_U(\Omega)$ називаємо таку сім'ю випадкових величин, що для кожної $\xi \in L_U(\Omega)$ існує константа $r_\xi > 0$ така, що $EU\left(\frac{\xi}{r_\xi}\right) < \infty$.*

Означення 4. *[1] Простір $L_U(\Omega)$ називається простором Орліча експоненціального типу, якщо він породжується функцією вигляду $U(x) = \exp\{\varphi(x)\}-$ 1, де $\varphi(x)$- деяка C-функція. Згідно з* [1] *простори Орліча експоненціального типу позначатимо $Exp_\varphi(\Omega)$, а норму в цьому просторі- $\|\cdot\|_{Exp_\varphi}$.*

Означення 5. *[1] Випадковий процес $X = \{X(t), t \in \mathbb{T}\}$, де $\mathbb{T}$– деяка параметрична множина, належить простору $L_U(\Omega)$, якщо для будь-якого $t \in \mathbb{T}$ випадкова величина $X(t)$ належить простору $L_U(\Omega)$.*

Означення 6. *[10] Випадковий процес $X(t) \in L_U(\Omega)$ називаеться строго Орлічевим, якщо існує константа C_T, що для будь-яких $t_1, t_2, ..., t_n \in \mathbb{T}$ та $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}$ має місце співвідношення* $\| \sum\limits_{k=1}^{n} c_k X(t_k) \|_U < C_T \sqrt{\mathsf{E} \sum\limits_{k=1}^{n} c_k X(t_k)}$

Далі буде наведено теорему 1, в якій одержано умови, за яких має місце рівномірна збіжність за ймовірністю на $[0, T]$ вейвлет розкладів випадкових Орлічевих процесів експоненційного типу. З доведенням цієї теореми можна ознайомитись в роботі [5].

Теорема 1. *Нехай $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ - сепарабельний строго Орлічевий випадковий процес із простору $Exp_\varphi(\Omega)$ з неперервною коваріаційною функцією $R(t, s)$. Нехай для f-вейвлета ϕ та m-вейвлета ψ, відповідного до ϕ, виконуються наступні умови:*

1) $\exists\ \widehat{\psi}'(u),\ \widehat{\psi}''(u),\ \widehat{\psi}(0) = 0,\ \widehat{\psi}'(0) = 0;$

2) $\exists\ c_\phi = \sup_u |\widehat{\phi}(u)| < \infty, c_{\phi'} = \sup_u |\widehat{\phi}'| < \infty, c_{\psi''} = \sup_u |\widehat{\psi}''(u)| < \infty;$

3) $\widehat{\phi}(u) \to 0, u \to \pm\infty, \widehat{\psi}(u) \to 0, u \to \pm\infty;$

4) $\exists\ \int\limits_{\mathbb{R}} (\ln(1 + |u|))^\alpha\, |\widehat{\psi}(u)|^\beta\, du < \infty,\ \ \int\limits_{\mathbb{R}} (\ln(1 + |u|))^\alpha\, |\widehat{\phi}(u)|^\beta\, du < \infty,$

$0 < \ \beta \le \ 1,\ 0 \le \alpha \le 1;$

5) $\exists\ \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial^{k+l} \widehat{R_2}(z,w)}{\partial w \partial z} \right| |w|^t |z|^s\, dw dz < \infty, k, l = 0, 1;\ t, s = \overline{0, 2};$

6) $\left| \widehat{R}_2(t, s) \right| < c < \infty.$

Тоді $X_{n,k_j}(t) \to X(t)$ при $n \to \infty, k_j \to \infty, \forall j = 0, 1, ...$ рівномірно за ймовірністю на кожному інтервалі $[0, T]$.

4 Швидкість рівномірної збіжності вейвлет розкладів процесів з простору Орліча

Теорема 2. *[1]Нехай $Y = \{Y(t), t \in [0, T]\}$-сепарабельний випадковий процес з простору $Exp_\varphi(\Omega)$. Нехай існує така функція $\sigma = \{\sigma(h), 0 \le h \le T\}$, що $\sigma(h)$ є неперервною, монотонно зростаючою, $\sigma(h) \to 0, h \to 0$ та*

$$\sup_{\substack{|t-s| \le h \\ t,s \in \mathbb{T}}} \|Y(t) - Y(s)\|_{Exp_\varphi} \le \sigma(h). \tag{5}$$

Для всіх $\varepsilon > 0$ збігається інтеграл

$$I(\varepsilon) = \int\limits_0^\varepsilon \varphi^{(-1)} \left(\ln \left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \right) \right) du < \infty. \tag{6}$$

Тоді випадкова величина $\sup\limits_{t,s\in\mathbb{T}} |Y(t)|$ *належить простору* $Exp_\varphi(\Omega)$ *і для будь-якої точки* $t_0 \in [0,T]$ *та будь-якого*

$$0 < \theta < min\left(1, \sigma\left(\frac{T}{2(\exp\{\varphi(2)\}-1)}\right)\frac{1}{\sigma(T)}\right)$$

має місце рівнвсть:

$$\left\|\sup_{t,s\in\mathbb{T}} |Y(t)|\right\|_{Exp_\varphi} \leq \|Y(t_0)\|_{Exp_\varphi}$$

$$+\frac{\exp\{\varphi(2)\}}{\theta(1-\theta)}\int\limits_0^{\sigma(T)\theta}\varphi^{(-1)}\left(\ln\left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)\right)du = D_\varphi(t_0). \tag{7}$$

Випадковій процес $X(t)$ *є вибірково неперервним з ймовірністю одиниця. Для всіх* $\varepsilon > 0$ *виконуеться нерівність*

$$P\left\{\sup_{0\leq t\leq T} |Y(t)| > \varepsilon\right\} \leq 2\exp\left\{-\varphi\left(\frac{x}{D_\varphi(t_0)}\right)\right\}. \tag{8}$$

Лема 1. *Якщо функція*

$$\sigma(u) = \frac{c}{\left(\ln(e^\alpha + \frac{1}{u})\right)^\alpha},$$

тоді припущення (6) виконується за умови

$$\int\limits_0^\varepsilon \varphi^{(-1)}\left(\left(\frac{c}{t}\right)^{1/\alpha}\right)dt < \infty$$

і має місце така оцінка:

$$I(\varepsilon) \leq \varphi^{(-1)}(\ln T)\int\limits_0^\varepsilon \varphi^{(-1)}\left(\left(\frac{c}{t}\right)^{1/\alpha}\right)dt.$$

Доведення. Дійсно, у випадку

$$\sigma(u) = \frac{c}{\left(\ln(e^\alpha + \frac{1}{u})\right)^\alpha}$$

обернена функція

$$\sigma^{-1}(t) = \frac{1}{e^{\left(\frac{c}{t}\right)^{1/\alpha}} - e^\alpha}.$$

Тоді йнтеграл з (6), враховуючи властивість $\mathbb{C}$-функції,

$$\varphi^{(-1)}(\alpha x) \leq \alpha\varphi^{(-1)}(x),\ \alpha > 1,$$

можна оцінити таким чином:

$$
\begin{aligned}
I(\varepsilon) &= \int_0^\varepsilon \varphi^{(-1)}\left(\ln\left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)}(t)}+1\right)\right)dt \\
&= \int_0^\varepsilon \varphi^{(-1)}\left(\ln\left(\frac{T}{2}(e^{\left(\frac{c}{t}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}-e^{\alpha})+1\right)\right)dt \le \int_0^\varepsilon \varphi^{(-1)}\left(\ln Te^{\left(\frac{c}{t}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}\right)dt \\
&= \varphi^{(-1)}(\ln T)\int_0^\varepsilon \varphi^{(-1)}\left(\left(\frac{c}{t}\right)^{1/\alpha}\right)dt < \infty.
\end{aligned}
$$

Теорема 3. *Нехай $X = \{X(t), t \in [0,T]\}$-сепарабельний випадковий процес з простору $Exp_\varphi(\Omega)$. Нехай виконуються умови теореми 2 та для всіх $\varepsilon > 0$ збігається інтеграл*

$$
\int_0^\varepsilon \varphi^{(-1)}\left(\left(\frac{c}{t}\right)^{1/\alpha}\right)dt < \infty.
$$

Тоді

$$
P\left\{\sup_{0\le t\le T}|X(t)-X_{n,k_j}(t)| > \varepsilon\right\} \le 2\exp\left\{-\varphi\left(\frac{x}{D_\varphi(t_0)}\right)\right\},
$$

де

$$
D_\varphi(t_0) = B_{n,k_j} + \frac{\exp\{\varphi(2)\}\varphi^{(-1)}(\ln T)}{\theta(1-\theta)}\int_0^{\frac{\widetilde{c}}{\alpha}\theta} \varphi^{(-1)}\left(\left(\frac{\widetilde{c}}{t}\right)^{1/\alpha}\right)dt,
$$

B_{n,k_j} визначено формулою (13), $\widetilde{c}$ визначено (11).

Доведення. Перевіримо виконання умови (5) для процесу

$$
Y(t) = X(t) - X_{n,k_j}(t)
$$

та функції

$$
\sigma(u) = \frac{c}{\left(\ln(e^{\alpha}+\frac{1}{u})\right)^{\alpha}}.
$$

Враховуючи, що для строго Орлічевих величин має місце нерівність $\|\xi\|_{Exp_\varphi} \le$

$a\sqrt{E|\xi|^2}$, будемо оцінювати $(E|Y(t)-Y(s)|^2)^{1/2}$:

$$\begin{aligned}
&\left(E|Y(t)-Y(s)|^2\right)^{1/2} = \left(E|X(t)-X_{n,k_j}(t)-(X(s)-X_{n,k_j}(s))|^2\right)^{1/2}\\
&= \left(E\left|\sum_{|k|>k_0}\xi_{0k}\phi_{0k}(t)+\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{|k|>k_j}\eta_{jk}\psi_{jk}(t)+\sum_{j=n}^{\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\eta_{jk}\psi_{jk}(t)\right.\right.\\
&\left.\left.-\left(\sum_{|k|>k_0}\xi_{0k}\phi_{0k}(s)+\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{|k|>k_j}\eta_{jk}\psi_{jk}(s)+\sum_{j=n}^{\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\eta_{jk}\psi_{jk}(s)\right)\right|^2\right)^{1/2}\\
&= \left(E\left|\sum_{|k|>k_0}\xi_{0k}(\phi_{0k}(t)-\phi_{0k}(s))+\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{|k|>k_j}\eta_{jk}(\psi_{jk}(t)-\psi_{jk}(s))\right.\right.\\
&\left.\left.+\sum_{j=n}^{\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\eta_{jk}(\psi_{jk}(t)-\psi_{jk}(s))\right|^2\right)^{1/2} \le \left(E\left|\sum_{|k|>k_0}\xi_{0k}(\phi_{0k}(t)-\phi_{0k}(s))\right|^2\right)^{1/2}\\
&+\sum_{j=0}^{n-1}\left(E\left|\sum_{|k|>k_j}\eta_{jk}(\psi_{jk}(t)-\psi_{jk}(s))\right|^2\right)^{1/2}+\sum_{j=n}^{\infty}\left(E\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\eta_{jk}(\psi_{jk}(t)\psi_{jk}(s))\right|^2\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Тоді, враховуючи оцінки, отримані в роботі [5]:

$$|E\xi_{0k}\xi_{0l}| \le \frac{1}{|k|\cdot|l|}\cdot A^{\phi}, \tag{9}$$

де

$$\begin{aligned}
A^{\phi} &= \frac{1}{(2\pi)^2}\times\left(c_\phi^2\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^2\widehat{R}_2(z,w)}{\partial w\partial z}\right|dzdw\right.\\
&+\left.2c_\phi c'_\phi\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}}\left|\frac{\partial\widehat{R}_2(z,w)}{\partial z}\right|dzdw+(c'_\phi)^2\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}}\left|\widehat{R}_2(z,w)\right|dzdw\right)<\infty,
\end{aligned}$$

$$c_\phi=\sup_u|\widehat{\phi}(u)|<\infty,\qquad c'_\phi=\sup_u|\widehat{\phi}'(u)|<\infty$$

та

$$|\phi_{0k}(t)-\phi_{0k}(s)|\cdot|\phi_{0l}(t)-\phi_{0l}(s)|\le\frac{(c^\phi)^2}{\left(\ln(e^\alpha+\frac{1}{|t-s|})\right)^{2\alpha}}\frac{1}{|l|^\beta}\frac{1}{|k|^\beta},$$

де

$$\begin{aligned}
c^\phi &= \frac{1}{(4\pi)}\left(4\int\limits_{\mathbb{R}}\left(2\left(\pi\frac{T}{2}\right)^\beta(\ln(1+|u|))^\alpha+2c_\alpha\right)\left|\widehat{\phi}(u)\right|du\right.\\
&+\left.\int\limits_{\mathbb{R}}(\ln(1+|u|))^\alpha\left|\widehat{\phi}(u)\right|^{1-\beta}du\right)<\infty.
\end{aligned}$$

Можемо оцінити першу суму таким чином:

$$\begin{aligned}
&\left(E\left|\sum_{|k|>k_0}\xi_{0k}(\phi_{0k}(t)-\phi_{0k}(s))\right|^2\right)^{1/2}\\
&\leq\left(\sum_{|k|>k_0}\sum_{|l|>k_0}E|\xi_{0k}\xi_{0l}||\phi_{0k}(t)-\phi_{0k}(s)|\cdot|\phi_{0l}(t)-\phi_{0l}(s)|\right)^{1/2}\\
&\leq\left(\sum_{|k|>k_0}\sum_{|l|>k_0}\frac{1}{|k||l|}\cdot A^{\phi}\frac{(c^{\phi})^2}{\left(\ln(e^{\alpha}+\frac{1}{|t-s|})\right)^{2\alpha}}\frac{1}{|l|^{\beta}}\frac{1}{|k|^{\beta}}\right)^{1/2}\\
&\leq\left(\frac{(c^{\phi})^2A^{\phi}}{\left(\ln(e^{\alpha}+\frac{1}{|t-s|})\right)^{2\alpha}}\frac{1}{\beta k_0^{\beta}}\right)^{\frac{1}{2}}\leq\frac{c_{\beta,\phi}}{\left(\ln(e^{\alpha}+\frac{1}{|t-s|})\right)^{\alpha}}\frac{1}{k_0^{\frac{\beta}{2}}},
\end{aligned}$$

де $c_{\beta,\phi}=\frac{c^{\phi}(A^{\phi})^{1/2}}{\beta^{1/2}}$.

В цих оцінках ми застосовуємо такі нерівності:

$$\begin{aligned}
&\sum_{|k|>k_0}\frac{1}{2|k|^{1+\beta}}=\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\int\limits_{k-1}^{k}\frac{1}{k^{1+\beta}}\,dx\\
&\leq\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\int\limits_{k-1}^{k}\frac{1}{x^{1+\beta}}\,dx=\int\limits_{k_0}^{\infty}\frac{1}{x^{1+\beta}}\,dx=\frac{1}{\beta k_0^{\beta}},\quad\beta>0.
\end{aligned}$$

Далі, знов використовуємо наступні оцінки з роботи [5]:

$$|E\eta_{jk}\eta_{jl}|\leq\frac{1}{|k||l|2^{3j}}A^{\psi},\tag{10}$$

де

$$\begin{aligned}
A^{\psi}&=\frac{c^2_{\psi''}}{(2\pi)^2}\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}}\left(\left|\frac{\partial^2\widehat{R_2}(z,w)}{\partial w\partial z}\right||w|^2|z|^2+\left|\frac{\partial\widehat{R_2}(z,w)}{\partial z}\right||w||z|^2\right.\\
&+\left.\left|\frac{\partial\widehat{R_2}(z,w)}{\partial w}\right||w|^2|z|+|\widehat{R_2}(z,w)||w||z|\right)dwdz<\infty
\end{aligned}$$

та

$$|\psi_{jk}(t)-\psi_{jk}(s)|\cdot|\psi_{jl}(t)-\psi_{jl}(s)|\leq\frac{2^{j(1+2\beta)}j^{2\alpha}}{\left(\ln(e^{\alpha}+\frac{1}{|t-s|})\right)^{2\alpha}}\frac{1}{|l|^{\beta}}\frac{1}{|k|^{\beta}}\cdot(c^{\psi})^2.$$

Маємо:

$$\sum_{j=0}^{n-1}\left(E\left|\sum_{|k|>k_j}\eta_{jk}(\psi_{jk}(t)-\psi_{jk}(s))\right|^2\right)^{1/2}$$
$$\leq \sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{|k|>k_j}\sum_{|l|>k_j}E|\eta_{jk}\eta_{jl}||\psi_{jk}(t)-\psi_{jk}(s)||\psi_{jl}(t)-\psi_{jl}(s)|\right)^{1/2}$$
$$\leq \sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{|k|>k_j}\sum_{|l|>k_j}\frac{1}{2^{3j}}\frac{1}{|k||l|}\cdot A^{\psi}\frac{2^{(2\beta+1)j}}{|l|^{\beta}|k|^{\beta}}(c^{\psi})^2\frac{(j+1)^{2\alpha}}{\left(\ln(e^{\alpha}+\frac{1}{|t-s|})\right)^{2\alpha}}\right)^{1/2}$$
$$\leq \frac{(A^{\psi})^{1/2}\cdot c^{\psi}}{\left(\ln(e^{\alpha}+\frac{1}{|t-s|})\right)^{\alpha}}\cdot\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(j+1)^{\alpha}}{2^{(1-\beta)j}}\cdot\frac{1}{(\beta)^{\frac{1}{2}}k_j^{\frac{\beta}{2}}}\leq\frac{c_{\beta,\psi}}{\left(\ln(e^{\alpha}+\frac{1}{|t-s|})\right)^{\alpha}}\frac{1}{k_j^{\frac{\beta}{2}}},$$

де $c_{\beta,\psi}=\frac{(A^{\psi})^{1/2}\cdot c^{\psi}q_1}{\beta^{\frac{1}{2}}}$, $\quad q_1=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(j+1)^{\alpha}}{2^{(1-\beta)j}}<\infty$, $\quad \beta<1$.

Нарешті,

$$\sum_{j=n}^{\infty}\left(E\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\eta_{jk}(\psi_{jk}(t)-\psi_{jk}(s))\right|^2\right)^{1/2}$$
$$\leq \sum_{j=n}^{\infty}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{l\in\mathbb{Z}}E|\eta_{jk}\eta_{jl}||\psi_{jk}(t)-\psi_{jk}(s)||\psi_{jl}(t)-\psi_{jl}(s)|\right)^{1/2}$$
$$\leq \sum_{j=n}^{\infty}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\frac{1}{2^{3j}}\frac{1}{|k||l|}\cdot A^{\psi}\frac{2^{(2\beta+1)j}}{|l|^{\beta}|k|^{\beta}}(c^{\psi})^2\frac{(j+1)^{2\alpha}}{\left(\ln(e^{\alpha}+\frac{1}{|t-s|})\right)^{2\alpha}}\right)^{1/2}$$
$$\leq \frac{(A^{\psi})^{1/2}\cdot c^{\psi}\tilde{q}}{\left(\ln(e^{\alpha}+\frac{1}{|t-s|})\right)^{\alpha}}\cdot\sum_{j=n}^{\infty}\frac{(j+1)^{\alpha}}{2^{(1-\beta)j}}$$
$$\leq \frac{(A^{\psi})^{1/2}\cdot c^{\psi}\tilde{q}}{\left(\ln(e^{\alpha}+\frac{1}{|t-s|})\right)^{\alpha}}\frac{a}{n}\leq\frac{c^1_{\beta,\psi}}{\left(\ln(e^{\alpha}+\frac{1}{|t-s|})\right)^{\alpha}}\frac{1}{n},$$

де $c^1_{\beta,\psi}=(A^{\psi})^{1/2}\cdot c^{\psi}\tilde{q}\cdot a$, $\quad \tilde{q}=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{|k|^{1+\beta}}<\infty$, $\quad \beta>0$.

Отже, маємо:

$$\sup_{\substack{|t-s|\leq h\\ t,s\in\mathbb{T}}}\|Y(t)-Y(s)\|_{Exp_{\varphi}}\leq a\cdot\sup_{\substack{|t-s|\leq h\\ 0\leq t,s\leq T}}\left(E|Y(t)-Y(s)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq\left(\frac{c_{\beta,\phi}}{k_0^{\frac{\beta}{2}}}+\frac{c_{\beta,\psi}}{k_j^{\frac{\beta}{2}}}+\frac{c^1_{\beta,\psi}}{n}\right)\frac{a}{\left(\ln(e^{\alpha}+\frac{1}{h})\right)^{\alpha}}=\frac{\widetilde{c}}{\left(\ln(e^{\alpha}+\frac{1}{h})\right)^{\alpha}}=:\sigma(h),$$

де

$$\widetilde{c}=a\left(\frac{c_{\beta,\phi}}{k_0^{\beta/2}}+\frac{c_{\beta,\psi}}{k_j^{\beta/2}}+\frac{c^1_{\beta,\psi}}{n}\right).\tag{11}$$

З теореми 2 та леми 1 слідує, що:

$$P\left\{\sup_{0\le t\le T}|X(t)-X_{n,k_j}(t)|>\varepsilon\right\}\le 2\exp\left\{-\varphi\left(\frac{x}{D_\varphi(t_0)}\right)\right\}.$$

Знайдемо $D_\varphi(t_0)$ для $Y(t)=X(t)-X_{n,k_j}(t)$.

Почнемо з оцінки:

$$\|Y(t)\|_{Exp_\varphi}\le \left(E|Y(t)|^2\right)^{1/2}=\left(E|X(t)-X_{n,k_j}(t)|^2\right)^{1/2}$$
$$=\left(E\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\xi_{0k}\phi_{0k}(t)+\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\eta_{jk}\psi_{jk}(t)-\sum_{|k|\le k_0}\xi_{0k}\phi_{0k}(t)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{|k|\le k_j}\eta_{jk}\psi_{jk}(t)\right|^2\right)^{1/2}\le\left(E\left|\sum_{|k|>k_0}\xi_{0k}\phi_{0k}(t)+\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{|k|>k_j}\eta_{jk}\psi_{jk}(t)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sum_{j=n}^{\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\eta_{jk}\psi_{jk}(t)\right|^2\right)^{1/2}\le\left(E\left|\sum_{|k|>k_0}\xi_{0k}\phi_{0k}(t)\right|^2\right)^{1/2}$$
$$+\sum_{j=0}^{n-1}\left(E\left|\sum_{|k|>k_j}\eta_{jk}\psi_{jk}(t)\right|^2\right)^{1/2}+\sum_{j=n}^{\infty}\left(E\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\eta_{jk}\psi_{jk}(t)\right|^2\right)^{1/2}.$$

Розглянемо спочатку:

$$\sum_{j=0}^{n-1}\left(E\left|\sum_{|k|>k_j}\eta_{jk}\psi_{jk}(t)\right|^2\right)^{1/2}\le\sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{|k|>k_j}\sum_{|l|>k_j}E|\eta_{jk}\eta_{jl}||\psi_{jk}(t)||\psi_{jl}(t)|\right)^{1/2},$$

де ψ_{jl} можна оцінити наступним чином:

$$|\psi_{jl}(t)|=\left|\frac{1}{(2\pi)}\int_{\mathbb{R}}e^{itz}\frac{1}{2^{j/2}}e^{-i\frac{l}{2^j}z}\widehat{\psi}(\frac{z}{2^j})\,dz\right|=\{l\ne 0\}$$
$$=\frac{1}{2^{j/2}}\cdot\frac{1}{(2\pi)}\cdot\frac{2^{j/2}}{|l|}\cdot\left|\left[e^{itz}\widehat{\psi}(\frac{z}{2^j})e^{-i\frac{l}{2^j}z}\right]\right|_{z=-\infty}^{+\infty}$$
$$\left.-\int_{\mathbb{R}}\left(e^{itz}\widehat{\psi}'(\frac{z}{2^j})\frac{1}{2^j}+ite^{itz}\widehat{\psi}(\frac{z}{2^j})\right)e^{-i\frac{l}{2^j}z}\,dz\right|$$
$$\le\frac{1}{(2\pi)}\frac{1}{|l|}\left(\int_{\mathbb{R}}\left|\widehat{\psi}'(\frac{z}{2^j})\frac{1}{2^j}\right|\,dz+T\int_{\mathbb{R}}\left|\widehat{\psi}(\frac{z}{2^j})\right|\,dz\right)=\{\frac{z}{2^j}=u\}$$
$$=\frac{1}{(2\pi)}\frac{1}{|l|}\left(\int_{\mathbb{R}}\left|\widehat{\psi}'(u)\right|\,du+2^jT\int_{\mathbb{R}}\left|\widehat{\psi}(u)\right|\,du\right)\le\frac{2^j}{|l|}B_1^{\psi},\tag{12}$$

де

$$B_1^{\psi}=\frac{1}{(2\pi)}\left(\int_{\mathbb{R}}\left|\widehat{\psi}'(u)\right|\,du+T\int_{\mathbb{R}}\left|\widehat{\psi}(u)\right|\,du\right)<\infty.$$

Тоді, враховуючи (10) та (12), отримаємо:

$$\sum_{j=0}^{n-1}\left(E\left|\sum_{|k|>k_j}\eta_{jk}\psi_{jk}(t)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{|k|>k_j}\sum_{|l|>k_j}\frac{1}{2^{3j}}\frac{A^\psi}{|k||l|}\frac{2^j}{|k|}B_1^\psi\frac{2^j}{|l|}B_1^\psi\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\le (A^\psi)^{1/2}\cdot B_1^\psi\cdot\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{2^j}\cdot\frac{2}{k_j} \le (A^\psi)^{1/2}\cdot B_1^\psi\cdot\frac{2}{k_j}.$$

В цих оцінках використано наступні нерівності:

$$\sum_{|k|>k_j}\frac{1}{2|k|^2} = \sum_{k=k_j+1}^{\infty}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{k^2}\,dx \le \sum_{k=k_j+1}^{\infty}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x^2}\,dx = \int_{k_j}^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx = \frac{2}{k_j}.$$

Зауважимо, що з (12) у випадку $j=0$ можемо оцінити ϕ_{0k} в такий спосіб: $|\phi_{0k}| \le \frac{1}{|l|}\cdot B_1^\phi$, де $B_1^\phi = \frac{1}{(2\pi)}\left(\int_{\mathbb{R}}\left|\widehat{\phi}'(u)\right|\,du + T\int_{\mathbb{R}}\left|\widehat{\phi}(u)\right|\,du\right) < \infty$.

Тому, враховуючи (9), маємо:

$$\left(E\left|\sum_{|k|>k_0}\xi_{0k}\phi_{0k}(t)\right|^2\right)^{1/2} \le \left(\sum_{|k|>k_0}\sum_{|l|>k_0}E|\xi_{0k}\xi_{0l}||\phi_{0k}(t)||\phi_{0l}(t)|\right)^{1/2}$$
$$\le \left(\sum_{|k|>k_0}\sum_{|l|>k_0}\frac{1}{|k||l|}A^\phi\frac{1}{|k|}B_1^\phi\frac{1}{|l|}B_1^\phi\right)^{1/2} \le \left((B_1^\phi)^2A^\phi\frac{4}{k_0^2}\right)^{1/2} = \frac{2(A^\phi)^{\frac{1}{2}}B_1^\phi}{k_0}.$$

Остаточно

$$\sum_{j=n}^{\infty}\left(E\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\eta_{jk}\psi_{jk}(t)\right|^2\right)^{1/2} \le \sum_{j=n}^{\infty}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{l\in\mathbb{Z}}E|\eta_{jk}\eta_{jl}||\psi_{jk}(t)||\psi_{jl}(t)|\right)^{1/2}$$
$$\le \sum_{j=n}^{\infty}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\frac{1}{2^{3j}}\frac{A^\psi}{|l||k|}\frac{2^{2j}}{|k||l|}(B_1^\psi)^2\right)^{\frac{1}{2}} \le (A^\psi)^{\frac{1}{2}}B_1^\psi\sum_{j=n}^{\infty}\frac{\tilde q}{2^{\frac{j}{2}}} \le (A^\psi)^{\frac{1}{2}}B_1^\psi\frac{2\tilde q}{2^{\frac{n}{2}}},$$

де $\tilde q = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{|k|^2} < \infty$.

Отже, ми отримали:

$$\left\|X(t) - X_{n,k_j}(t)\right\|_{Exp_\varphi} \le$$
$$\le \frac{2(A^\phi)^{1/2}B_1^\phi}{k_0} + 2(A^\psi)^{1/2}B_1^\psi\left(\frac{1}{k_j} + \frac{\tilde q}{2^{n/2}}\right) =: B_{n,k_j}. \qquad (13)$$

Другу частину оцінки (7) можна отримати за допомогою леми 1 та наступних перетворень:

$$\sigma(T) = \frac{\widetilde{c}}{\left(\ln(e^\alpha + \frac{1}{T})\right)^\alpha} \le \frac{\widetilde{c}}{(\ln(e^\alpha))^\alpha} = \frac{\widetilde{c}}{\alpha^\alpha} \le \frac{\widetilde{c}}{\alpha}, \quad 0 < \alpha \le 1.$$

Враховуючи, що функція $\varphi^{(-1)}(u)$ монотонно зростає, маємо:

$$\int\limits_0^{\sigma(T)\theta} \varphi^{(-1)}\left(\ln\left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)\right) du \le \varphi^{(-1)}(\ln T)\int\limits_0^{\frac{\tilde{c}}{\alpha}\theta} \varphi^{(-1)}\left(\left(\frac{\widetilde{c}}{u}\right)^{1/\alpha}\right) du.$$

Остаточно:

$$D_\varphi(t_0) = B_{n,k_j} + \frac{\varphi^{(-1)}(\ln T)\exp\{\varphi(2)\}}{\theta(1-\theta)} \int\limits_0^{\frac{\tilde{c}}{\alpha}\theta} \varphi^{(-1)}\left(\left(\frac{\widetilde{c}}{u}\right)^{1/\alpha}\right) du.$$

5 Висновки

Отже, знайдено швидкість рівномірної збіжності за ймовірністю вейвлет зображень випадкових строго Орлічевих процесів експоненційного типу в просторі $C(0,T)$. Далі планується застосувати отримані результати для оцінювання коваріаційних функцій випадкових процесів.

1. *Buldygin V. V., Kozachenko Yu. V.* Metric characterization of random variables and random processes. – Rhode: American Mathematical Society. – 2000. – 257 c.
2. *Chui C. K.* An Introduction to Wavelets. – New York: Academic Press – 1992.
3. *Daubechies I.* Ten lectures on wavelets. – Philadelphia: Society for industrial and applied mathematics. – 1992.
4. *Hardle W., Kerkyacharian G., Picard D., Tsybakov A.* Wavelet. Approximation and statistical applications. – New York: Springer. – 1998. – 272 c.
5. *Козаченко Ю. В., Полосьмак О. В.* Умови рівномірної збіжності за ймовірністю вейвлет-розкладів випадкових процесів з $Exp_\varphi(\Omega)$// Теорія ймовірн. і мат.статистика. – 2009. – Вип. 81 – С. 74–86.
6. *Kozachenko Yu. V., Polosmak O. V.* Uniform convergence in probability of wavelet expansions of random processes from $L_2(\Omega)$// Random operators and stochastic equations. – 2008. – **16**, №4 – С. 12–37.
7. *Kozachenko Yu. V., Perestyuk M. M. and Vasylyk O.I.* On Uniform convergence of wavelet expansion of ϕ-sub-Gaussian random processes// Random operators and stochastic equations. – 2006. – **14**, №3 – С. 209–233.
8. *Козаченко Ю. В.* Лекції з вейвлет аналізу. – Київ: ТВіМС. – 2004.
9. *Козаченко Ю. В., Перестюк М. М.* Про рівномірну збіжність вейвлет-розкладів випадкових процесів із просторів Орліча випадкових величин.I// Укр. мат. журн. – 2007. – **12**, №59 – С. 1647–1660.
10. *Barrasa de le Krus E., Kozachenko Yu. V.* Boundary-value problems for equations of mathematical physics with stricly Orlicz random initial conditions// Random operators and stochastic equations. – 1995. – **3**, №3 – С. 201–220.

Одержано 19.05.2009