МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

РЕЙТІЙ О.К.

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

(методичний посібник з лабораторних робіт)

Частина І. Кінематика

Ужгород – 2006

Рейтій О.К. Теоретична механіка (методичний посібник з лабораторних робіт). Частина І. Кінематика. – Ужгород: Видавництво УжНУ „Говерла”, 2006. – 64 с.

Рецензент:

доктор фізико-математичних наук, професор,
декан фізичного факультету, завідувач кафедри теоретичної фізики
Лазур В.Ю.

Відповідальний за випуск:

доктор фізико-математичних наук, професор,
завідувач кафедри диференціальних рівнянь та математичної фізики
Маринець В.В.

В посібнику наведено завдання для лабораторних робіт з кінематики, передбачених програмою курсу з теоретичної механіки. Кожне завдання містить 40 варіантів. В стислій формі подано необхідні теоретичні відомості, а також приклади виконання завдань.

Посібник розрахований на студентів-математиків, також може бути корисний студентам технічних спеціальностей, аспірантам, викладачам та інженерно-технічним працівникам для поглиблення знань з теоретичної механіки.

Рекомендовано до друку Вченою радою математичного факультету (протокол № 1 від 21 вересня 2006 року)

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Теоретична механіка є однією з фундаментальних загальнонаукових дисциплін фізико-математичного профілю, які вивчаються на математичному факультеті УжНУ.

Будучи, по суті, одним із розділів фізики, теоретична механіка виділилась в окрему науку і отримала самостійний розвиток завдяки широким і важливим застосуванням в природознавстві та техніці. В тісному зв'язку з іншими природничими науками (фізикою, хімією, біологією) теоретична механіка відіграє велику роль в розвитку науково-технічного прогресу. Вона є науковою базою багатьох областей сучасної техніки та інженерних дисциплін (опір матеріалів, теорія пластичності, аеро- і гідромеханіка, біомеханіка, будівельна механіка, теорія автоматичного керування, теорія механізмів і машин, приладів, роботів-маніпуляторів тощо).

Мета дисципліни „Теоретична механіка" полягає в тому, щоб ознайомити студента-математика з основними поняттям і законами механіки, навчити його складати математичні моделі механічних явищ, знаходити розв'язки таких задач та давати їх фізичну інтерпретацію, проводити дослідження реальних процесів на основі вивчення якісних властивостей побудованих математичних моделей.

Основна трудність, з якою студент зустрічається із самого початку вивчення механіки – це вироблення самостійних навичок схематизації механічних процесів і явищ та вміння надавати конкретним фізичним задачам абстрактну математичну форму. Найбільш ефективним шляхом навчити застосовувати методи теоретичної механіки є показ їх в дії. Тому значна увага в курсі вивчення даної дисципліни приділяється розв'язанню конкретних задач, які сформульовані у вигляді завдань для лабораторних робіт.

Даний методичний посібник покликаний не тільки полегшити студенту виконання лабораторних робіт, але й допомогти засвоїти необхідний теоретичний матеріал. В ньому наведено завдання для чотирьох лабораторних робіт з кінематики, кожне з яких містить по 40 варіантів. Крім того, в кожному розділі подано необхідні теоретичні відомості з розглядуваної теми, а також приклад виконання типового завдання для лабораторної роботи, причому іноді даються різні методи розв'язування. В подальшому планується випустити аналогічні посібники, присвячені динаміці точки та динаміці матеріальної системи.

Даний посібник можуть використовувати також аспіранти, викладачі, інженери і техніки для поглиблення знань з теоретичної механіки.

ВСТУП

Як відомо, *теоретична механіка* – це наука, яка вивчає найбільш загальні закони механічного руху матеріальних тіл. Під *механічним рухом* розуміють зміну положення тіла в просторі відносно інших тіл з плином часу.

Теоретична механіка складається з трьох розділів – *статики*, *кінематики* й *динаміки*. Статика вивчає методи перетворення одних сукупностей сил в інші, еквівалентні їм, а також умови рівноваги різних систем сил, які діють на тверде тіло. Кінематика вивчає рух матеріальних тіл з геометричної точки зору, незалежно від діючих на них сил. В динаміці механічний рух вивчається з урахуванням сил, що діють на тіла.

Фундаментальні закони теоретичної механіки було чітко сформульовано І. Ньютоном в знаменитій книзі „Математичні начала натуральної філософії”. Основи сучасної кінематики заклав Г. Галілей (1564-1642), який вперше знайшов закони вільного падіння і руху тіл, кинутих під кутом до горизонту, а також сформулював відомий принцип інерції.

Основними поняттями в теоретичній механіці є *простір*, *час*, *сила*, *маса*, *система відліку* та ін. За простір, в якому відбувається рух, береться „звичайний” тривимірний евклідів простір, а час вважається неперервним і однорідним (абсолютним), тобто незалежним від руху тіл і однаковим в усіх точках простору. Крім того, вважається, що взаємодія між тілами передається миттєво. Тому область застосовності класичної механіки обмежується швидкостями, набагато меншими за швидкість світла. Рух матеріальних тіл, швидкості яких є близькими до швидкості світла, вивчає релятивістська механіка, побудована на постулатах теорії відносності А. Ейнштейна.

Коли кажуть про рух тіла, то розуміють під цим зміну його положення з плином часу по відношенню до якогось іншого тіла. Це означає, що при вивченні руху ми завжди маємо вказати, відносно якого іншого тіла розглядується його рух. З тілом, по відношенню до якого вивчається рух, (*тілом відліку*) пов’язують систему координат і годинник. Цю сукупність тіла відліку, пов’язаної з ним системи координат і годинника називають *системою відліку*. Оскільки час в теоретичній механіці вважається однаковий у всіх системах відліку, то, кажучи про систему відліку, можна обмежитися зазначенням тільки тіла відліку або системи координат, пов’язаних з цим тілом.

Теоретична механіка побудована на законах І. Ньютона, справедливість яких перевірена величезною кількістю безпосередніх спостережень, дослідною перевіркою наслідків (часто далеких і зовсім не очевидних) цих законів, а також багатовіковою практичною діяльністю людини. Закони Ньютона справедливі не у всіх системах відліку. В механіці постулюється наявність хоча б однієї такої системи (*інерціальної системи відліку*).

У теоретичній механіці, зокрема кінематиці, при вивченні руху реальні матеріальні тіла замінюють на модельні, в яких зберігаються основні ознаки реальних тіл – адже для моделей набагато простіше встановити загальні закономірності руху, ніж для тіл реальних. Основними моделями в кінематиці є *матеріальна точка* й *абсолютно тверде тіло*.

Матеріальною точкою називають матеріальне тіло, розмірами якого можна знехтувати в порівнянні з розмірами, що характеризують рух. Одне й те саме тіло в деяких задачах можна прийняти за матеріальну точку, в інших задачах – ні. Наприклад, Землю можна вважати матеріальною точкою, якщо розглядати її рух навколо Сонця, коли власний обертальний рух Землі навколо своєї осі є несуттєвим порівняно з її обертальним рухом. Якщо ж йдеться про вплив власного обертання Землі на окремі механічні явища, які відбуваються на ній, то Землю вже не можна прийняти за матеріальну точку.

До другої моделі реального тіла – *абсолютно твердого тіла* – належать тіла, які зберігають свою геометричну форму і об'єм незмінними, незалежно від дії на них інших тіл. Звичайно, абсолютно твердих тіл немає, оскільки в результаті дії сил всі тіла змінюють свою форму, тобто деформуються, але в багатьох випадках деформацією тіла можна знехтувати. Наприклад, при розрахунку польоту ракети ми можемо знехтувати невеликими коливаннями окремих її частин, так як ці коливання мало відобразяться на параметрах її польоту. Але при розрахунку ракети на міцність врахування цих коливань є обов'язковим, оскільки вони можуть викликати руйнування корпусу ракети.

В кінематиці рух вважається заданим, тобто вважаються заданими як функції часу параметри, які визначають положення тіла по відношенню до вибраної системи відліку. Причому не має значення, який рух здійснює вибрана система координат по відношенню до інших тіл, які не входять до нашого розгляду. Однак завжди слід мати на увазі, що характер спостережуваного руху істотно залежить від вибору системи відліку. Так, поршень автомобільного двигуна здійснює прямолінійний коливальний рух відносно автомобіля і синусоїдальний рух відносно дороги, по якій переміщується з постійною швидкістю.

Якщо тіло не переміщується по відношенню до вибраної системи відліку, то кажуть, що воно знаходиться в *стані спокою*. Так як спокій і рух тіла ми розглядаємо лише по відношенню до вибраної системи відліку (яка в свою чергу може переміщуватися довільним чином), то поняття „спокій" і „рух" є відносними. Однак в кінематиці часто користуються термінами „абсолютний рух", „абсолютна швидкість" тощо, які мають, звичайно, умовний характер. Зокрема, якщо немає спеціального застереження, під виразом „нерухома система координат" слід розуміти систему осей, відносно яких розглядається рух.

Рух, як і час, по своїй суті неперервний. Неперервну криву, яку описує точка при своєму русі в просторі, називають *траєкторією точки*. В задачах небесної механіки траєкторію іменують також *орбітою*. Якщо траєкторія точки є прямою лінією, то рух називають *прямолінійним*. Якщо ж траєкторія – крива лінія (не обов'язково плоска), то рух точки називається *криволінійним*.

Ми почнемо з вивчення криволінійного руху точки, оскільки прямолінійний рух є частинним випадком криволінійного. Приступаючи до вивчення руху точки, ми повинні сформулювати ті задачі, які розв'язуються в кінематиці. Виходячи з того, що основними просторово-часовими (кінематичними) характеристиками руху точки є *положення*, *швидкість* і *прискорення*, ми можемо сформулювати ці задачі наступним чином: *знайти способи задання руху і, виходячи з них, дати методи визначення швидкості і прискорення матеріальної точки*.

РОЗДІЛ 1. КІНЕМАТИКА ТОЧКИ

1.1. Способи задання руху точки

Перш за все означимо, що слід розуміти під терміном „задати рух”.

Рух точки по відношенню до вибраної системи відліку вважається заданим, якщо відомий спосіб, за допомогою якого можна визначити положення точки в будь-який момент часу. Отже, задати рух точки це значить в будь-який момент часу визначити її положення по відношенню до вибраної системи відліку або, як кажуть, написати *рівняння (закон) руху*. Існують три способи задання руху точки у просторі: *векторний*, *координатний* і *натуральний*. Розглянемо коротко кожен із них.

Векторний спосіб. Положення точки в просторі при векторному способі задається радіус-вектором $\vec{r}$, який проводиться із якогось заданого центра і відомий як функція часу. Таким чином, рівність

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \tag{1.1}$$

є *кінематичним рівнянням руху у векторній формі* і, одночасно, рівнянням траєкторії.

Криву, яку описує кінець будь-якого вектора за умови, що початок його знаходиться весь час в одній і тій самій точці, називають *годографом* цього вектора. Отже, траєкторія точки є годографом радіус-вектора $\vec{r}$.

Координатний спосіб. Положення точки по відношенню до якої-небудь системи координат повністю визначається координатами точки. Координатний спосіб задання руху полягає в заданні координат точки як відомих функцій часу. Положення точки в тривимірному просторі визначається трьома числами q_1, q_2, q_3, які взагалі називаються криволінійними координатами точки. Отже, *закон руху точки в координатному способі задання руху* буде задаватися рівняннями

$$q_1 = q_1(t), \;\; q_2 = q_2(t), \;\; q_3 = q_3(t). \tag{1.2}$$

Тут всі функції повинні бути однозначними, неперервними і диференційовними.

Найчастіше користуються прямокутними декартовими координатами точки x, y, z. Тоді рівнянням руху буде сукупність трьох рівностей:

$$x = x(t), \;\; y = y(t), \;\; z = z(t), \tag{1.3}$$

які одночасно є рівняннями траєкторії точки в параметричній формі, причому роль параметра відіграє час t. Виключаючи з рівнянь (1.2) параметр t, отримаємо одну з наступних систем рівнянь:

$$\left.\begin{matrix}\varphi(x,y)=0,\\ \chi(x,z)=0\end{matrix}\right\}, \;\; \left.\begin{matrix}\psi(y,z)=0,\\ \varphi(x,y)=0\end{matrix}\right\}, \;\; \left.\begin{matrix}\chi(x,z)=0,\\ \psi(y,z)=0\end{matrix}\right\}, \tag{1.4}$$

кожна з яких задає траєкторію точки як перетин двох циліндричних поверхонь.

Крім декартової, в механіці для вивчення руху точки використовуються часто і інші системи координат, зокрема сферична і циліндрична.

Натуральний спосіб. При натуральному способі задання руху вказуються траєкторія точки і закон її руху по цій траєкторії.

Нехай точка рухається по відношенню до вибраної системи відліку по траєкторії, що визначається рівняннями

$$f_1(x,y,z)=0, \quad f_2(x,y,z)=0. \tag{1.5}$$

Нехай M_0 – деяка фіксована точка на траєкторії. Вибравши напрямок додатного відліку дуги по траєкторії, ми визначимо положення точки M в будь-який момент часу, якщо будемо знати, як змінюється дуга $\sigma = \overset{\frown}{M_0M}$ (рис. 1.1) з часом

$$\sigma = \sigma(t), \tag{1.6}$$

Ця залежність є *законом руху при натуральному способі задання*.

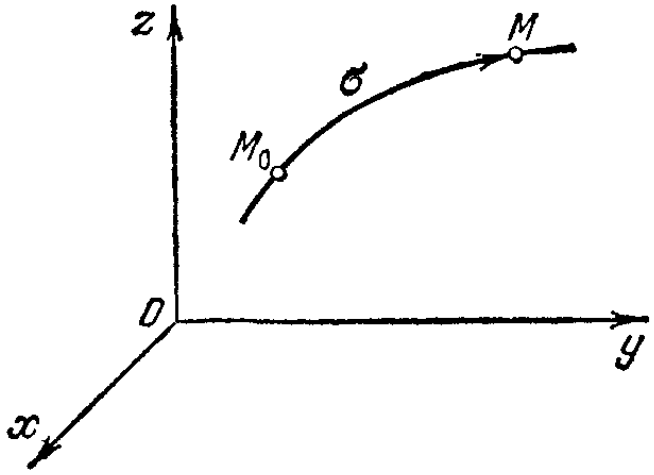


Рис. 1.1

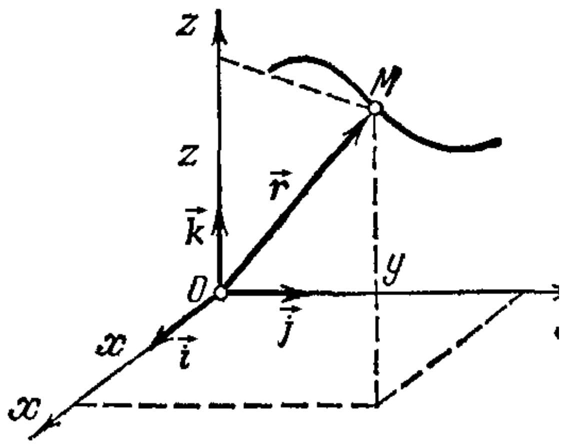


Рис. 1.2

Всі розглянуті способи задання руху взаємопов’язані.

Нехай, наприклад, рух задано координатним способом у вигляді (1.3). Очевидно, що при цьому проекції радіус-вектора $\vec{r}$ (рис. 1.2) на осі координат дорівнюють координатам точки M і, отже, можна записати

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \tag{1.7}$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні вектори (орти) координатних осей x, y, z.

Модуль вектора $\vec{r}$ знаходитиметься за формулою

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

а напрям визначатиметься напрямними косинусами

$$\cos(x,\vec{r}) = x/r, \ \cos(y,\vec{r}) = y/r, \ \cos(z,\vec{r}) = z/r.$$

Розглянемо також перехід від координатного способу до натурального.

Нехай рух задано рівняннями (1.3). Виключаючи з них час t, отримаємо рівняння траєкторії (1.5). Знайдемо тепер закон руху $\sigma = \sigma(t)$.

Диференціал дуги може бути знайдений за формулою (рис. 1.3) $d\sigma = \pm\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$, де dx, dy, dz – диференціали координат точки $dx = \dot{x}(t)dt$, $dy = \dot{y}(t)dt$, $dz = \dot{z}(t)dt$.

Формулу для $d\sigma$ можна переписати у вигляді

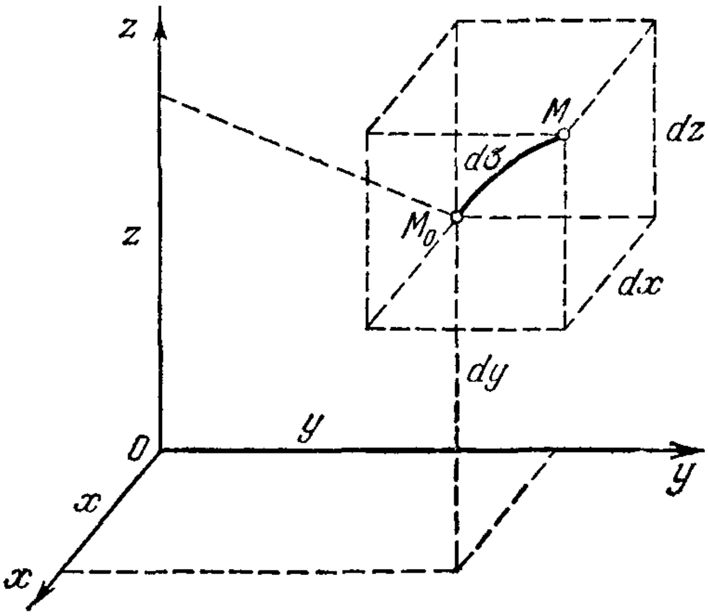


Рис. 1.3

$$d\sigma = \pm\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt\,.$$

Інтегруючи цей вираз в проміжку від $t = 0$ (початок руху) до деякого моменту часу t, отримаємо закон руху

$$\sigma = \pm\int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt\,.$$

Знак „плюс” чи „мінус” перед інтегралом ставиться в залежності від вибору додатного відліку дуги: якщо рух точки починається в бік додатного відліку дуги, то слід ставити знак „плюс”, в протилежному випадку – знак „мінус”.

1.2. Швидкість матеріальної точки

Перейдемо тепер до означення швидкості точки та методам її знаходження в різних способах задання руху.

Векторний спосіб. *Швидкістю точки в даний момент часу (або миттєвою швидкістю) називають границю відношення вектора переміщення точки до проміжку часу, за який це переміщення відбулося, коли цей проміжок прямує до нуля,* тобто

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}\,. \qquad (1.8)$$

Розмірність швидкості буде

$$[v] = \frac{[довжина]}{[час]}.$$

Одиницями вимірювання швидкості можуть бути м/с, см/с, км/год.

Як видно із означення, швидкість точки рівна похідній за часом від радіус-вектора. Таким чином, вектор швидкості завжди напрямлений по дотичній до траєкторії в бік руху точки. Якщо модуль швидкості не змінюється з часом, то рух називається *рівномірним*.

Координатний спосіб. Підставляючи вираз (1.7) в (1.8) і враховуючи, що орти $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ вибраної системи координат сталі, отримуємо формулу для *швидкості точки при координатному способі задання*:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}\,. \qquad (1.9)$$

Вираз (1.8) можна також подати в іншій формі:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}\,, \tag{1.10}$$

де проекції швидкості на координатні осі будуть

$$v_x = \frac{dx}{dt},\ \ v_y = \frac{dy}{dt},\ \ v_z = \frac{dz}{dt}. \tag{1.11}$$

Знаючи їх можна визначити модуль і напрям вектора швидкості точки:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,,$$

$$\cos(x,\vec{v}) = \frac{v_x}{v} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}},$$

$$\cos(y,\vec{v}) = \frac{v_y}{v} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}},$$

$$\cos(z,\vec{v}) = \frac{v_z}{v} = \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}.$$

Натуральний спосіб. Нехай точка *M* рухається по деякій кривій (рис. 1.4). За проміжок часу Δt точка переміститься по кривій із положення *M* в положення M_1. Дуга $\overset{\frown}{MM_1} = \Delta\sigma > 0$, якщо рух точки відбувається в бік додатного відліку дуги, і $\Delta\sigma < 0$, якщо рух відбувається в протилежний бік. Формулу (1.8) для швидкості перепишемо у вигляді

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta\sigma}\cdot\frac{\Delta\sigma}{\Delta t}\right] = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta\sigma}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\sigma}{\Delta t}. \tag{1.12}$$

Оскільки границя відношення дуги до хорди, що її стягує, дорівнює за модулем одиниці, а граничне положення січної MM_1 співпадає з напрямом дотичної до кривої в точці *M*, то

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta\sigma} = \frac{d\vec{r}}{d\sigma} = \vec{\tau}$$

де $\vec{\tau}$ – одиничний вектор дотичної до кривої, напрямлений в бік додатного відліку дуги.

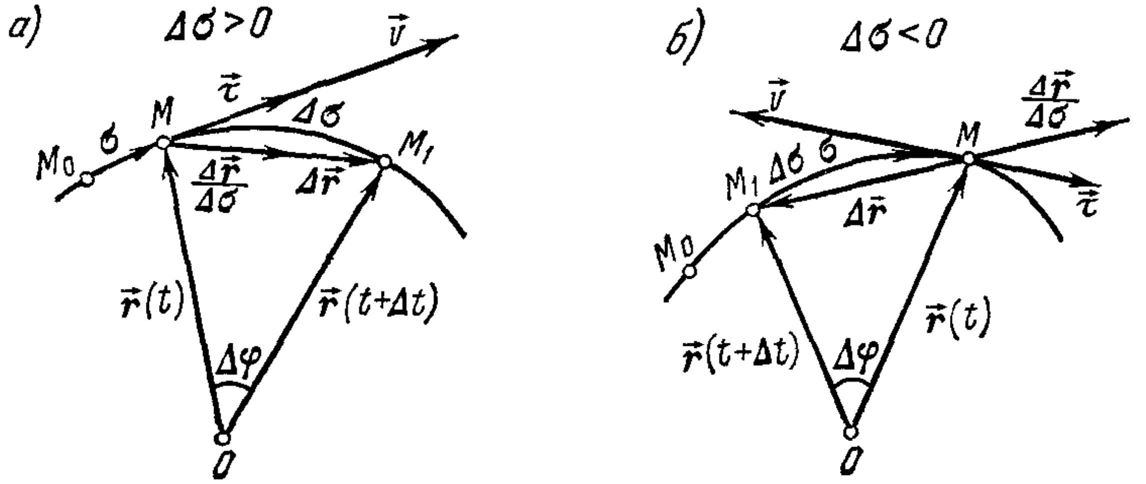


Рис. 1.4

Справді, якщо $\Delta\sigma > 0$, то вектор $\Delta\vec{r}/\Delta\sigma$ напрямлений в бік $\Delta\vec{r}$ (рис. 1.4, *а*), а при $\Delta\sigma < 0$ цей вектор напрямлений в бік, протилежний $\Delta\vec{r}$ (рис. 1.4, *б*). В обох випадках даний вектор, а, отже, і його границя $d\vec{r}/d\sigma = \vec{\tau}$, напрямлені в бік зростання дуги σ.

Беручи до уваги, що

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\sigma}{\Delta t} = \frac{d\sigma}{dt} = \dot{\sigma},$$

маємо

$$\vec{v} = \frac{d\sigma}{dt}\vec{\tau}. \qquad (1.13)$$

Позначаючи $v_\tau = \dfrac{d\sigma}{dt}$, отримаємо

$$\vec{v} = v_\tau\vec{\tau}. \qquad (1.14)$$

Із формули (1.17) випливає, що $v = |v_\tau|$. Очевидно, що $v_\tau = v$, якщо рух відбувається в бік додатного відліку дуги, і $v_\tau = -v$, якщо рух відбувається в протилежний бік.

1.3. Прискорення матеріальної точки

Векторний спосіб. *Прискоренням точки в даний момент часу (миттєвим прискоренням) називають границю відношення приросту швидкості точки до проміжку часу, за який цей приріст відбувся, коли цей проміжок прямує до нуля*, тобто

$$\vec{w} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \qquad (1.15)$$

Можна також використовувати іншу форму запису: $\vec{w} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$. Розмірність прискорення буде

$$[w] = \frac{[\text{швидкість}]}{[\text{час}]} = \frac{[\text{довжина}]}{[\text{час}]^2}.$$

Одиницями вимірювання прискорення можуть бути м/с^2, см/с^2.

Координатний спосіб. За допомогою рівностей (1.9) і (1.3) отримуємо формулу для *прискорення точки при координатному способі задання*:

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k}. \qquad (1.16)$$

Нехай w_x, w_y, w_z – проекції прискорення на координатні осі x, y, z; тоді

$$w_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2},\quad w_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2},\quad w_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}. \qquad (1.17)$$

Модуль прискорення визначається за формулою

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}.$$

Знаючи проекції прискорення та його модуль, легко знаходимо напрямні косинуси вектора прискорення:

$$\cos(x,\vec{w}) = \frac{w_x}{w} = \frac{\ddot{x}}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}},$$

$$\cos(y,\vec{w}) = \frac{w_y}{w} = \frac{\ddot{y}}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}},$$

$$\cos(z,\vec{w}) = \frac{w_z}{w} = \frac{\ddot{z}}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}}.$$

Натуральний спосіб. Перед тим, як визначити прискорення в натуральному способі задання руху, нагадаємо деякі відомості з диференціальної геометрії. У будь-якій точці *M* просторової кривої можна визначити три взаємно перпендикулярні напрями: *дотична*, *головна нормаль* і *бінормаль*, одиничні вектори яких позначимо відповідно $\vec{\tau}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$. Орт $\vec{\tau}$ напрямлений у бік додатного відліку дугової координати σ, орт $\vec{n}$ – у бік угнутості траєкторії, орт $\vec{b}$ напрямлений так, щоб $\vec{\tau}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ утворювали праву систему координат. Вказані рухомі осі (дотична, головна нормаль і бінормаль) називаються *натуральними*, а прямокутний тріедр з вершиною в точці *M*, утворений їх напрямами – *натуральним тригранником*.

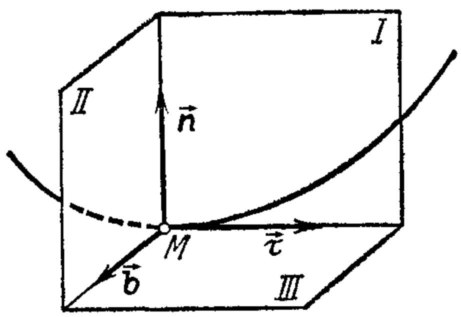


Рис. 1.5

Координатна площина, що проходить через головну нормаль $\vec{n}$ і бінормаль $\vec{b}$, називається нормальною. Площина, що проходить через дотичну $\vec{\tau}$ і головну нормаль $\vec{n}$, називається стичною, а площина, що проходить через дотичну $\vec{\tau}$ і бінормаль $\vec{b}$ – спрямною. На рис. 1.5 стична, нормальна і спрямна площини позначено відповідно цифрами *I*, *II* і *III*. Якщо розглядувана крива є плоскою, то вона розташована в стичній площині.

Кут, що стягує дугу $\Delta\sigma$ між двома дотичними у двох будь-яких точках *M* і M_1 на кривій, називається *кутом суміжності*. Позначимо його через $\Delta\varphi$ (рис. 1.4, 1.6).

Границя відношення кута суміжності $\Delta\varphi$ до елемента дуги $\widehat{MM_1} = \Delta\sigma$ при $\Delta\sigma \to 0$ називається *кривизною k* кривої в даній точці *M*:

$$k = \lim_{\Delta\sigma\to 0} \frac{\Delta\varphi}{|\Delta\sigma|}.$$

Величина

$$\rho = \frac{1}{k} = \lim_{\Delta\sigma\to 0} \frac{|\Delta\sigma|}{\Delta\varphi}$$

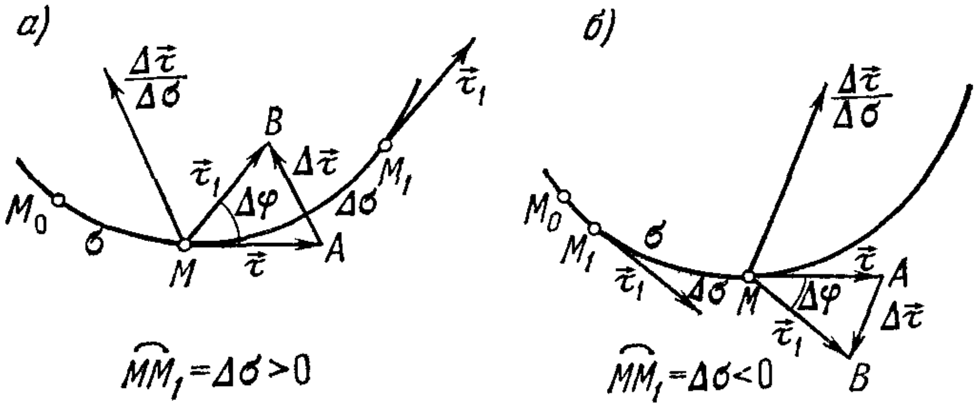


Рис. 1.6

називається *радіусом кривизни* кривої. Відмітимо, що кривизна прямої дорівнює нулю, а її радіус кривизни рівний нескінченності.

Підставляючи (1.17) в формулу (1.9) для прискорення точки, одержимо

$$\vec{w}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d(v_\tau\vec{\tau})}{dt}=\frac{dv_\tau}{dt}\vec{\tau}+v_\tau\frac{d\vec{\tau}}{dt}. \qquad (1.18)$$

Перший доданок є вектором, напрямленим по дотичній $\vec{\tau}$; він називається *дотичною* або *тангенціальною складовою прискорення* і позначається $\vec{w}_\tau$. Отже,

$$\vec{w}_\tau=\frac{dv_\tau}{dt}\vec{\tau}=\frac{d^2\sigma}{dt^2}\vec{\tau}=\ddot{\sigma}\vec{\tau}=w_\tau\vec{\tau}. \qquad (1.19)$$

Щоб визначити другий доданок, знайдемо величину і напрям вектора $d\vec{\tau}/d\sigma$.

Нехай в момент часу t точка знаходиться в положенні M на траєкторії, а в момент часу $t+\Delta t$ – в положенні M_1. Переносячи вектор $\vec{\tau}_1$ в точку M, знайдемо приріст вектора $\vec{\tau}$ за проміжок часу Δt (рис. 1.6, *а*)

$$\Delta\vec{\tau}=\vec{\tau}_1-\vec{\tau}.$$

Вектор $\Delta\vec{\tau}$ при русі точки в бік додатного відліку дуги напрямлений в бік увігнутості траєкторії (рис. 1.6, *а*), а при русі в бік від'ємного відліку дуги напрямлений в бік опуклості траєкторії (рис. 1.6, *б*).

Знайдемо похідну вектора $\vec{\tau}$:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta\sigma}\frac{\Delta\sigma}{\Delta t}\right]=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta\sigma}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\sigma}{\Delta t}=\frac{d\vec{\tau}}{d\sigma}v_\tau. \qquad (1.20)$$

Вектор $\Delta\vec{\tau}/\Delta\sigma$ завжди напрямлений в бік увігнутості траєкторії (див. рис 1.6, *а* і *б*) і лежить в площині, що проходить через точку M і вектори $\vec{\tau}$ та $\vec{\tau}_1$ (площина MAB). Отже, вектор $d\vec{\tau}/d\sigma$ лежить в стичній площині, оскільки при $\Delta\sigma\to 0$ $(\Delta t\to 0)$ площина MAB співпадає зі стичною площиною до траєкторії в точці M.

Диференціюючи тотожність $\vec{\tau}^2=1$ за σ; одержимо $2\vec{\tau}\,d\vec{\tau}/d\sigma=0$. Із цього випливає, що вектори $d\vec{\tau}/d\sigma$ і $\vec{\tau}$ є перпендикулярними. Таким чином, вектор

$d\vec{\tau}/d\sigma$ лежить у стичній площині, напрямлений в бік угнутості траєкторії та перпендикулярний до $\vec{\tau}$, тобто напрямлений по головній нормалі $\vec{n}$ до центра кривизни траєкторії.

Визначимо тепер модуль вектора $d\vec{\tau}/d\sigma$. Із рівнобедреного трикутника MAB (рис. 1.6) випливає, що $AB = |\Delta\vec{\tau}| = |\vec{\tau}_1 - \vec{\tau}| = 2\sin\dfrac{\Delta\varphi}{2}$, де $\Delta\varphi$ – кут суміжності. Тоді

$$\left|\frac{d\vec{\tau}}{d\sigma}\right| = \lim_{\Delta\sigma\to 0}\left|\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta\sigma}\right| = \lim_{\Delta\sigma\to 0}\frac{\sin\dfrac{\Delta\varphi}{2}}{\dfrac{\Delta\varphi}{2}}\frac{\Delta\varphi}{|\Delta\sigma|} = k = \frac{1}{\rho}.$$

Враховуючи, що $\vec{n}$ є одиничним вектором головної нормалі, матимемо

$$\frac{d\vec{\tau}}{d\sigma} = \frac{\vec{n}}{\rho}. \tag{1.21}$$

Таким чином, з урахуванням (1.20) і (1.21) другий доданок виразу (1.18) набуває вигляду

$$v_\tau\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{v_\tau^2}{\rho}\vec{n} = \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$

і називається *нормальним прискоренням* та позначається

$$\vec{w}_n = \frac{v^2}{\rho}\vec{n} = w_n\vec{n}. \tag{1.22}$$

Оскільки складові $\vec{w}_\tau$, $\vec{w}_n$ лежать у стичній площині, то й вектор $\vec{w}$ також розташований у ній. Тому проекція повного прискорення на бінормаль $w_b = 0$.

Отже, на підставі (1.18), (1.19) і (1.22) остаточно одержимо формулу для *прискорення точки в натуральному способі задання руху*:

$$\vec{w} = \vec{w}_\tau + \vec{w}_n. \tag{1.23}$$

Модуль повного прискорення

$$w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2} = \sqrt{\left(\frac{d^2\sigma}{dt^2}\right)^2 + \frac{v^4}{\rho^2}}. \tag{1.24}$$

Дотичне прискорення $w_\tau = dv_\tau/dt$ рівне нулю при русі точки зі сталою за модулем швидкістю і в моменти часу, в які швидкість v_τ досягає екстремальних значень.

Якщо v_τ і w_τ одного знаку, то модуль швидкості $v = |v_\tau|$ зростає і рух називається *прискореним*. Якщо ж v_τ і w_τ різних знаків, то модуль швидкості спадає і рух буде *сповільненим*. При $w_\tau = 0$ модуль швидкості v залишається сталим – рух рівномірний.

Як видно з (1.22), нормальне прискорення є завжди додатною величиною і рівне нулю при прямолінійному русі ($\rho = \infty$), в точках перегину криволінійної траєкторії і в моменти часу, в які швидкість обертається в нуль.

Завдання для лабораторної роботи №1

За заданими рівняннями руху точки M встановити вигляд її траєкторії та в момент часу $t = t_1$ знайти положення точки на траєкторії, її швидкість, повне, дотичне і нормальне прискорення, а також радіус кривизни траєкторії у відповідній точці.

Дані, які необхідні для виконання лабораторної роботи, наведено в таблиці 1.1.

Таблиця 1.1

Номер варіанта	Рівняння руху		t_1, c
	$x = x(t), см$	$y = y(t), см$	
1	$2t^2 + 3$	$-5t$	1/2
2	$4\cos^2 \frac{\pi t}{3} + 2$	$4\sin^2 \frac{\pi t}{3}$	1
3	$-\cos^2 \frac{\pi t^2}{3} + 3$	$\sin^2 \frac{\pi t^2}{3} - 1$	1
4	$4t + 4$	$-\frac{4}{t+1}$	2
5	$2\sin \frac{\pi t}{3}$	$-3\cos \frac{\pi t}{3} + 4$	1
6	$3t^2 + 2$	$-4t$	1/2
7	$3t^2 - t + 1$	$5t^2 - \frac{5}{3}t - 2$	1
8	$7\sin \frac{\pi t^2}{6} + 3$	$2 - 7\cos \frac{\pi t^2}{6}$	1
9	$-\frac{3}{t+2}$	$3t + 6$	2
10	$-4\cos \frac{\pi t}{3}$	$-2\sin \frac{\pi t}{3} - 3$	1
11	$-4t^2 + 1$	$-3t$	1/2
12	$5\sin^2 \frac{\pi t}{6}$	$-5\cos^2 \frac{\pi t}{6} - 3$	1
13	$5\cos \frac{\pi t^2}{3}$	$-5\sin \frac{\pi t^2}{3}$	1
14	$-2t - 2$	$-\frac{2}{t+1}$	2
15	$4\cos \frac{\pi t}{3}$	$-3\sin \frac{\pi t}{3}$	1
16	$3t$	$4t^2 + 1$	1/2

17	$7\sin^2\frac{\pi t}{6}-5$	$-7\cos^2\frac{\pi t}{6}$	1
18	$1+3\cos\frac{\pi t^2}{3}$	$3\sin\frac{\pi t^2}{3}+3$	1
19	$-5t^2-4$	$3t$	1
20	$2-3t-6t^2$	$3-\frac{3}{2}t-3t^2$	0
21	$6\sin\frac{\pi t^2}{6}-2$	$6\cos\frac{\pi t^2}{6}+3$	1
22	$7t^2-3$	$5t$	1/4
23	$3-3t^2+t$	$4-5t^2+\frac{5}{3}t$	1
24	$-4\cos\frac{\pi t}{3}-1$	$-4\sin\frac{\pi t}{3}$	1
25	$-6t$	$-2t^2-4$	1
26	$8\cos^2\frac{\pi t}{6}+2$	$-8\sin^2\frac{\pi t}{6}-7$	1
27	$-3-9\sin\frac{\pi t^2}{6}$	$-9\cos\frac{\pi t^2}{6}+5$	1
28	$-4t^2+1$	$-3t$	1
29	$5t^2+\frac{5}{3}t-3$	$3t^2+t+3$	1
30	$2\cos\frac{\pi t^2}{3}-2$	$-2\sin\frac{\pi t^2}{3}+3$	1
31	$8\sin\frac{\pi t^2}{4}-3$	$8\cos\frac{\pi t^2}{4}+5$	1
32	$7t^2+2t-3$	$5t-1$	1/2
33	t^2+t-5	$4t^2+4t-5$	1
34	$3\cos\frac{\pi t}{3}-7$	$3\sin\frac{\pi t}{3}+9$	1
35	$2t-4$	$-3t^2-5$	1
36	$5\cos^2\frac{\pi t}{6}+1$	$-5\sin^2\frac{\pi t}{6}+8$	1
37	$9\sin\frac{\pi t^2}{6}-3$	$9\cos\frac{\pi t^2}{6}-4$	1
38	$-7t$	t^2-3t+8	1
39	$3t^2+\frac{3}{5}t-7$	$5t^2+t-9$	1
40	$-\cos\frac{\pi t^2}{3}-4$	$\sin\frac{\pi t^2}{3}+5$	1

Приклад виконання завдання

Дано:

$$x = 4t \ см, \quad y = 16t^2 - 1 \ см, \quad t_1 = 1/2 \ с. \qquad (1.25)$$

Знайти: $y = y(x)$, $x(t_1)$, $y(t_1)$, $v(t_1)$, $w(t_1)$, $w_\tau(t_1)$, $w_n(t_1)$, $\rho(t_1)$.

Р о з в ' я з а н н я

Рівняння руху (1.25) є параметричними рівняннями траєкторії точки M. Щоб отримати рівняння траєкторії в звичайному координатному вигляді, виключимо час t із рівнянь руху. Тоді

$$y = x^2 - 1. \qquad (1.26)$$

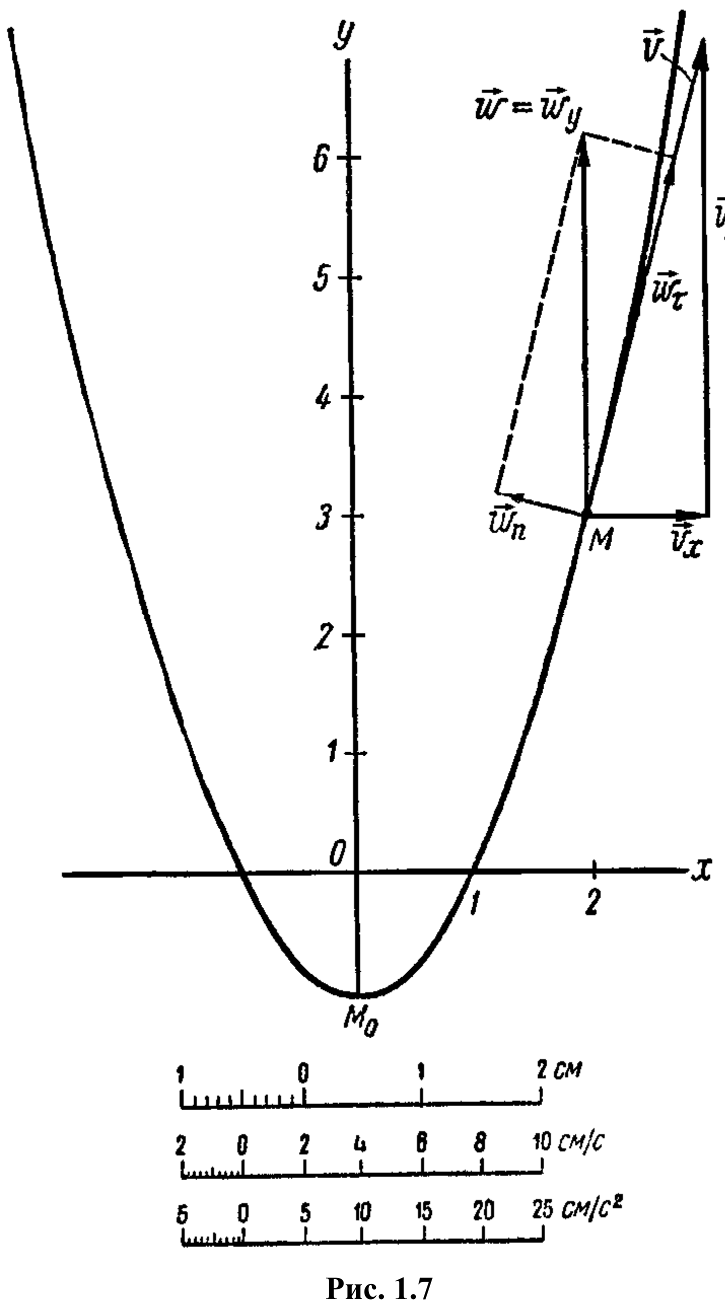


Рис. 1.7

Вираз (1.26) є рівнянням параболи.

Для визначення швидкості точки знаходимо проекції швидкості на осі координат:

$$v_x = \dot{x} = 4 \, см/с;$$

$$v_y = \dot{y} = 32t \, см/с.$$

Модуль швидкості точки

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \qquad (1.27)$$

Аналогічно проекції прискорення точки

$$w_x = \ddot{x} = 0;$$

$$w_y = \ddot{y} = 32 \, см/с^2.$$

Модуль прискорення точки

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = 32 \ см/с^2.$$

Координати точки, а також її швидкість, прискорення та їх проекції на координатні осі для заданого моменту часу $t = 1/2 \ с$ подано в таблиці 1.2.

Дотичне прискорення знаходимо шляхом диференціювання модуля швидкості (1.27):

$$|w_\tau| = \left|\frac{dv}{dt}\right|;$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2v_x\dot{v}_x + 2v_y\dot{v}_y}{2\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} = \frac{v_x w_x + v_y w_y}{v}.$$

При $t = 1/2$ c

$$\frac{dv}{dt} = \frac{4 \cdot 0 + 16 \cdot 32}{16{,}5} = 31\,см/с^2 .$$

Відповідно, модуль дотичного прискорення

$$|w_\tau| = 31\ см/с^2 .$$

Знак „+” при dv/dt показує, що рух точки прискорений і, відповідно, напрямки $\vec{w}_\tau$ і $\vec{v}$ співпадають.

Нормальне прискорення точки в даний момент часу

$$w_n = \sqrt{w^2 - w_\tau^2} = \sqrt{32^2 - 31^2} = 7{,}94\ см/с^2 .$$

Радіус кривизни траєкторії в тій точці, де при $t = 1/2\,c$ знаходиться точка M,

$$\rho = \frac{v^2}{w_n} = \frac{16{,}5^2}{7{,}94} = 34{,}3\ см .$$

Отримані значення w_τ, w_n та ρ також наведено в таблиці 1.2.

Користуючись рівнянням (1.26), креслимо траєкторію (рис. 1.7) та показуємо на ній положення точки M в заданий момент часу. Вектор $\vec{v}$ будуємо за складовими $\vec{v}_x$ та $\vec{v}_y$, причому цей вектор повинен бути напрямлений по дотичній до траєкторії точки. Вектор $\vec{w}$ знаходимо як за складовим $\vec{w}_x$ та $\vec{w}_y$, так і за $\vec{w}_\tau$ та $\vec{w}_n$, чим контролюється правильність обчислень.

Таблиця 1.2

Координати, *см*		Швидкість, $см/с$			Прискорення, $см/с^2$					Радіус кривизни, *см*
x	y	v_x	v_y	v	w_x	w_y	w	w_τ	w_n	ρ
2	3	4	16	16,5	0	32	32	31	7,94	34,3

РОЗДІЛ 2. ПЛОСКИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА

2.1. Загальні властивості і задання руху

Рух твердого тіла називається плоским (плоскопаралельним), якщо всі точки тіла переміщуються в площинах, паралельних деякій нерухомій площині.

Прикладом плоского руху тіла є кочення циліндра по горизонтальній площині, при якому його основа залишається весь час паралельною площині *Oyz* (рис. 2.1).

Розглянемо довільний плоский рух твердого тіла. Нехай всі точки тіла переміщуються у площинах, паралельних площині *Oxy* (рис. 2.2). З означення плоского руху випливає, що будь-яка пряма *AB*, проведена в тілі перпендикулярно площині *Oxy*, буде переміщуватися поступально, тобто траєкторії, швидкості і прискорення всіх точок цієї прямої будуть однакові.

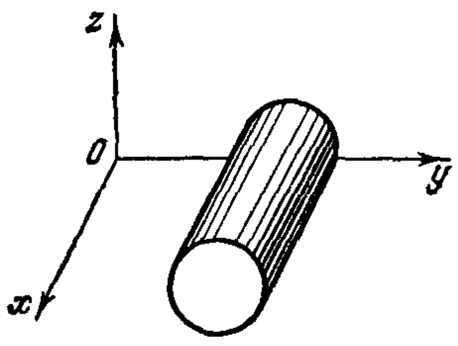


Рис. 2.1

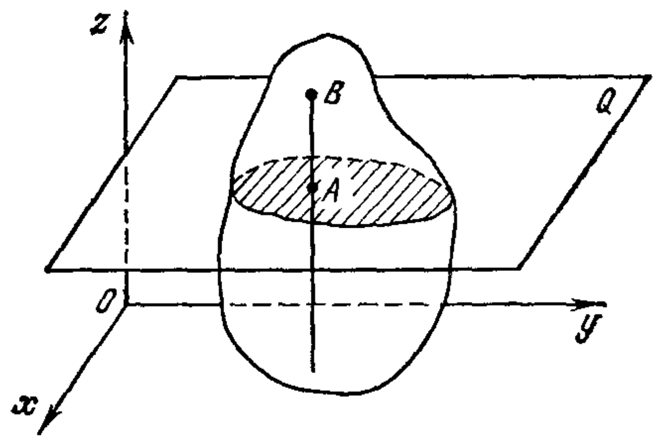


Рис. 2.2

Таким чином, для визначення руху тіла необхідно знати рух тільки однієї точки на кожній прямій, проведеній перпендикулярно площині *Oxy*. Якщо взяти точки в одній площині, паралельній площині *Oxy*, то можна стверджувати, що плоский рух твердого тіла повністю визначається рухом плоскої фігури (перерізу тіла), отриманої перетином тіла будь-якою площиною *Q*, паралельною площині *Oxy* (див. рис. 2.2).

Нехай $A(x_{1A}, y_{1A})$ і $B(x_{1B}, y_{1B})$ – дві точки плоскої фігури, що знаходяться в площині Ox_1y_1 (рис. 2.3, *а*). Оскільки відстань *d* між цими точками залишається незмінною

$$(x_{1A} - x_{1B})^2 + (y_{1A} - y_{1B})^2 = d^2,$$

то із чотирьох координат незалежними залишаються тільки три. Приєднання третьої точки $C(x_{1C}, y_{1C})$ не збільшує числа незалежних координат, бо дві нові координати x_{1C} і y_{1C} повинні задовольняти дві рівності, що виражають незмінність відстаней *AC* і *BC* до раніше вибраних точок *A* і *B*. Отже, для опису плоского руху тіла потрібно знати три незалежні координати (*степені вільності твердого тіла*) як функції часу.

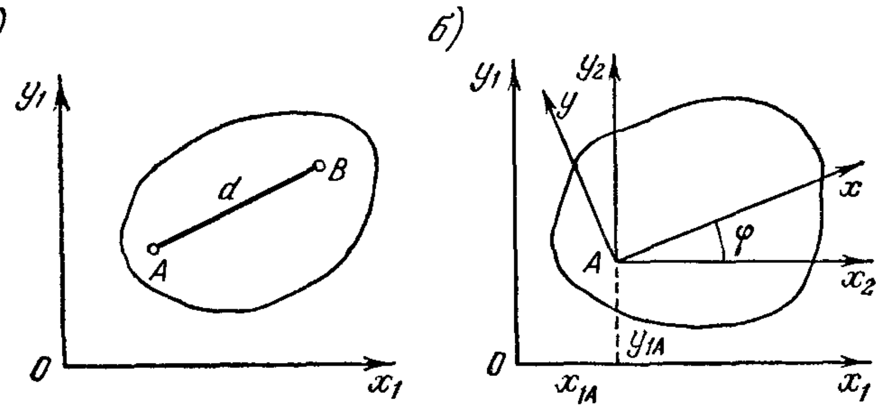


Рис. 2.3

Пов'яжемо жорстко з плоскою фігурою систему координат Axy. Тоді положення системи Axy, а разом з нею і положення плоскої фігури відносно системи координат Ox_1y_1 буде повністю визначатися координатами x_{1A} і y_{1A} точки A, яка називається *полюсом*, і кутом φ між осями Ax_2 і Ax – див. рис. 2.3, *б* (осі Ax_2 і Ay_2 відповідно паралельні осям Ox_1 і Oy_1 та переміщуються при русі фігури поступально). Отже, три функції часу

$$x_{1A} = x_{1A}(t), \;\; y_{1A} = y_{1A}(t), \;\;\; \varphi = \varphi(t) \tag{2.1}$$

визначають положення плоскої фігури в будь-який момент часу. Рівності (2.1) називаються *рівняннями плоского руху твердого тіла*.

2.2. Швидкості точок твердого тіла при плоскому русі

Визначимо швидкість будь-якої точки твердого тіла в плоскому русі.

Нехай система координат Ox_1y_1 є нерухомою, а система координат Ax_2y_2, що має початок в довільно вибраній точці A плоскої фігури, рухається поступально. Систему координат Axy жорстко пов'яжемо з плоскою фігурою.

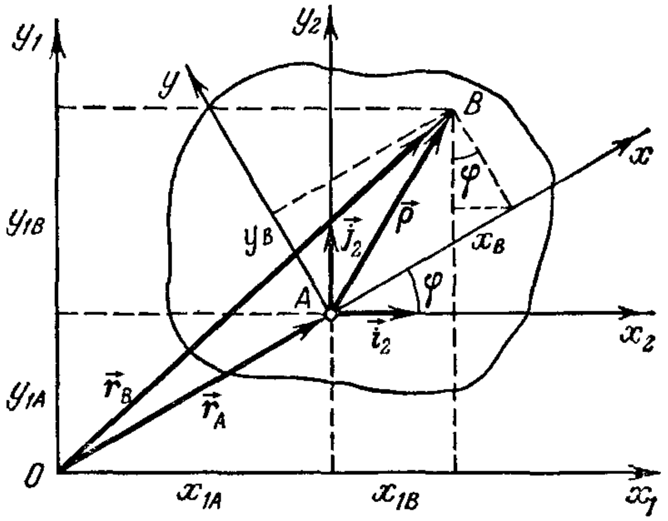


Рис. 2.4

Радіус-вектор $\vec{r}_B$, який визначає положення точки B відносно нерухомої системи координат Ox_1y_1 (рис. 2.4), можна задати за допомогою двох векторів: $\vec{r}_A$, що визначає положення точки A в системі відліку Ox_1y_1, і ρ, що визначає положення точки B в системі відліку Ax_2y_2,

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{\rho}\,. \tag{2.2}$$

За означенням, швидкість точки B дорівнює

$$\vec{v}_B = \frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_A + \vec{\rho}\right) = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt}. \tag{2.3}$$

Похідна $d\vec{r}_A/dt$ в рівнянні (2.3) визначає швидкість точки *A* (полюса) $\vec{v}_A$, а похідна $d\vec{\rho}/dt$ є швидкістю точки *B* відносно рухомої системи координат Ax_2y_2. Позначимо цю швидкість наступним чином

$$\vec{v}_{BA} = \frac{d\vec{\rho}}{dt}.$$

Рух тіла відносно системи координат Ax_2y_2 являє собою обертання тіла навколо осі Az_2, напрямленій перпендикулярно до площини рисунка (рис. 2.4) на читача. Таким чином, швидкість $\vec{v}_{BA}$ є швидкістю точки *B* при обертанні тіла навколо осі Az_2:

$$\vec{v}_{BA} = \vec{\omega}_A \times \vec{\rho},$$

де $\vec{\omega}_A$ – кутова швидкість обертання фігури навколо точки *A* (навколо осі Az_2).

Формула (2.3) набуває тепер вигляду

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_A \times \vec{\rho} = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}, \tag{2.4}$$

тобто *швидкість будь-якої точки B плоскої фігури дорівнює геометричній сумі швидкості полюса A і швидкості точки B при обертанні плоскої фігури навколо полюса A*.

Покажемо, що кутова швидкість обертання фігури не залежить від вибору полюса. Нехай *A* і *B* – дві довільні точки плоскої фігури, причому полюсу *A* відповідає кутова швидкість $\vec{\omega}_A$, а полюсу *B* – кутова швидкість $\vec{\omega}_B$. Знайдемо швидкість точки *B*, прийнявши за полюс точку *A*

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_A \times \vec{\rho}.$$

Візьмемо тепер в якості полюса точку *B* і знайдемо швидкість точки *A*

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega}_B \times (-\vec{\rho}).$$

Додаючи ці дві рівності, отримуємо

$$(\vec{\omega}_A - \vec{\omega}_B) \times \vec{\rho} = 0.$$

Оскільки вектор $(\vec{\omega}_A - \vec{\omega}_B)$ є перпендикулярним до площини плоскої фігури, то остання рівність має місце тільки при $\vec{\omega}_A = \vec{\omega}_B$. Таким чином, зберігати індекс полюса в позначенні вектора кутової швидкості недоцільно, тобто $\vec{\omega}_A = \vec{\omega}_B = \vec{\omega}$.

Формула (2.4) набуває тепер наступного вигляду:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}. \tag{2.5}$$

Оскільки $\vec{v}_{BA} = \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}$, а вектор $\vec{\omega}$ перпендикулярний до площини рисунка, то модуль швидкості точки *B* відносно полюса *A* дорівнює

$$v_{BA} = \omega \cdot AB.$$

Відмітимо також, що вектор $\vec{v}_{BA}$ перпендикулярний до $\overrightarrow{AB}$. Напрямок обертання плоскої фігури навколо полюса визначається за знаком проекції кутової швидкості на вісь Az_2. Так як $\omega_z = \dot{\varphi}$, то при $\omega_z > 0$ обертання відбувається проти ходу годинникової стрілки, а при $\omega_z < 0$ – за годинниковою стрілкою.

2.3. Миттєвий центр швидкостей. Центроїди

Швидкість будь-якої точки плоскої фігури можна визначити також за допомогою *миттєвого центра швидкостей*.

Миттєвим центром швидкостей (МЦШ) називається точка площини плоскої фігури, швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю.

Доведемо теорему про існування миттєвого центра швидкостей: *якщо кутова швидкість плоскої фігури відмінна від нуля, то миттєвий центр швидкостей існує.*

Нехай швидкість $\vec{v}_A$ довільної точки плоскої фігури відмінна від нуля (в протилежному випадку точка A була б миттєвим центром швидкостей).

За знаком проекції кутової швидкості $\omega_z = \dot{\varphi}$ визначаємо напрямок обертання плоскої фігури навколо полюса A і в цьому напрямку відкладаємо від точки A відрізок $AP = v_A / \omega$ перпендикулярно швидкості $\vec{v}_A$.

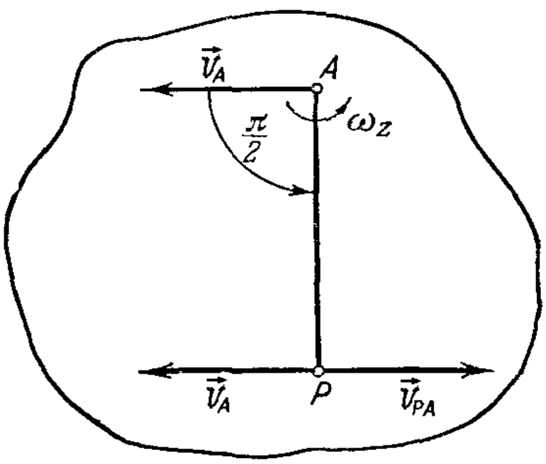


Рис. 2.5

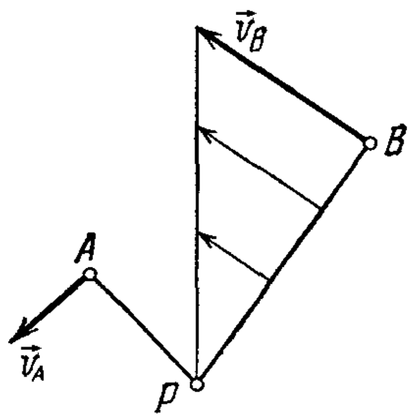


Рис. 2.6

На рис. 2.5 вважається, що $\omega_z = \dot{\varphi} > 0$, і тому відрізок AP повернуто відносно $\vec{v}_A$ проти ходу годинникової стрілки.

Згідно (2.5) маємо

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_{PA}.$$

Оскільки швидкість $\vec{v}_{PA}$ перпендикулярна до AP, то вектор $\vec{v}_{PA}$ є колінеарним до $\vec{v}_A$. Крім того, у відповідності з правилом побудови відрізка AP вектори $\vec{v}_A$ і $\vec{v}_{PA}$ мають протилежні напрямки. Модуль швидкості $\vec{v}_{PA}$ рівний

$$v_{PA} = \omega \cdot AP = \frac{v_A}{\omega}\omega = v_A.$$

Два рівні за величиною і протилежно напрямлені вектора в сумі дають нуль. Таким чином,

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_{PA} = 0,$$

тобто швидкість точки P дорівнює нулю і, отже, P – миттєвий центр швидкостей. Теорему доведено.

Виберемо тепер за полюс миттєвий центр швидкостей P. Тоді швидкість довільної точки A плоскої фігури шукатиметься за формулою (рис. 2.6)

$$\vec{v}_A = \vec{v}_P + \vec{\omega} \times \overrightarrow{PA} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{PA}.$$

Звідси випливає, що швидкості точок тіла при його плоскому русі розподіляються так само, як і при обертальному русі. Роль нерухомої осі відіграє миттєва вісь, що проходить через МЦШ перпендикулярно площині руху. Таким чином, швидкості всіх точок фігури перпендикулярні відрізкам, що сполучають ці точки з МЦШ ($\vec{v}_A \perp AP$), а модулі швидкостей пропорційні відстаням до МЦШ ($v_A = \omega \cdot PA$).

Знаючи положення миттєвого центра швидкостей та швидкість якої-небудь її точки, можна знайти швидкості всіх точок плоскої фігури.

Справді, нехай відомо, наприклад, швидкість $\vec{v}_A$ точки A; тоді із рівності $v_A = \omega \cdot PA$ знайдемо кутову швидкість $\omega = v_A / AP$ і швидкість будь-якої точки B буде

$$v_B = \omega \cdot PB = v_A \frac{PB}{PA}.$$

З'єднавши кінець вектора $\vec{v}_B$ з точкою P, отримаємо епюру розподілу швидкостей вздовж відрізка PB (див. рис. 2.6).

Використовуючи основні властивості МЦШ, можна визначити його положення і в інших випадках. На рис. 2.7, *а* показано, як знаходиться ця точка, коли відомо напрямки швидкостей двох точок. На рис. 2.7, *б* і *в* показано, як знаходиться МЦШ, якщо швидкості точок A і B паралельні між собою і $AB \perp \vec{v}_A$. У випадку, коли швидкості точок A і B паралельні між собою, але $\vec{v}_A$ не перпендикулярний до AB (рис. 2.7, *г*), прямі, перпендикулярні $\vec{v}_A$ і $\vec{v}_B$, перетинаються на нескінченості і миттєвого центра швидкостей не існує. При коченні без ковзання одного тіла по поверхні іншого нерухомого тіла (рис. 2.7, *д*) МЦШ співпадає з точкою дотику тіл, оскільки за відсутності ковзання швидкість точки дотику рівна нулю.

Як буде показано нижче (на прикладі виконання типового завдання до лабораторної роботи), використання миттєвого центра швидкостей часто суттєво спрощує розв'язання задачі.

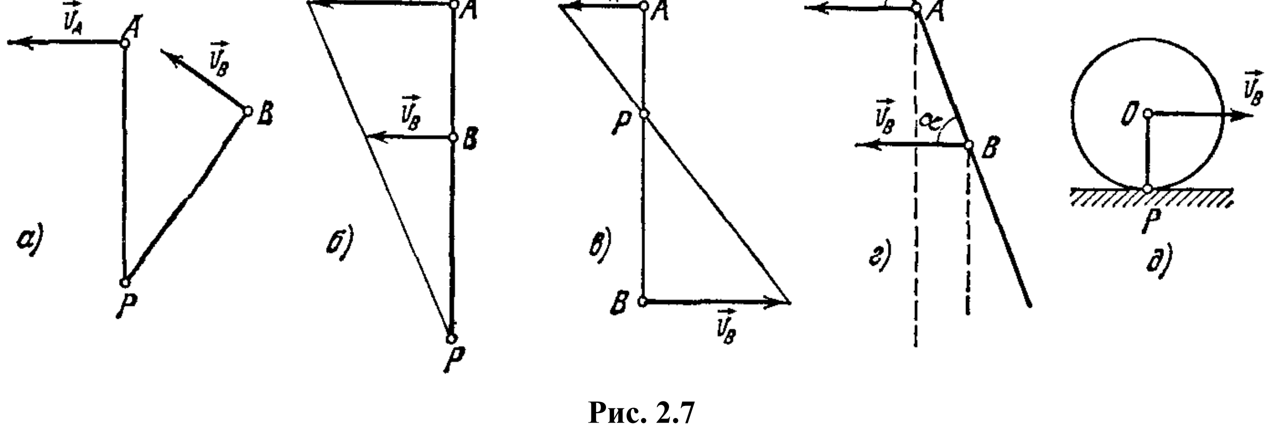


Рис. 2.7

На відміну від чисто обертального руху, при плоскому русі миттєвий центр швидкостей змінює, взагалі кажучи, своє положення на площині. Якщо наклеїти на фігуру, що здійснює плоский рух, аркуш паперу і в кожний момент часу проколювати голкою миттєвий центр швидкостей, то отримаємо дві серії відміток: одна на нерухомій площині, інша на аркуші, пов'язаному з фігурою. Кожна з цих серій утворить в просторі неперервну криву.

Геометричне місце миттєвих центрів швидкостей на нерухомій площині називається *нерухомою центроїдою*, а на площині, жорстко пов'язаною з фігурою – *рухомою центроїдою*.

Наприклад, при коченні циліндра по горизонтальній площині (рис. 2.7, *д*) нерухомою центроїдою буде горизонтальна пряма, а рухомою – коло.

В кожний момент часу рухома і нерухома центроїди мають спільну точку дотику – миттєвий центр швидкостей *P*, тобто точку, швидкість якої дорівнює нулю. Тому плоский рух можна уявити як кочення без ковзання рухомої центроїди по нерухомій.

2.4. Прискорення точок при плоскому русі. Миттєвий центр прискорень

Для визначення прискорення точки плоскої фігури продиференціюємо рівність (2.4) за часом:

$$\frac{d\vec{v}_B}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{\rho}}{dt}.$$

В цьому співвідношенні $d\vec{v}_B/dt = \vec{w}_B$, $d\vec{v}_A/dt = \vec{w}_A$ – відповідно прискорення точок *B* і *A*, $d\vec{\rho}/dt = \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \vec{v}_{BA}$, $d\vec{\omega}/dt = \vec{\varepsilon}$ – вектор кутового прискорення. Вектор $\vec{\varepsilon}$, як і вектор $\vec{\omega}$, напрямлений перпендикулярно до площини фігури і визначається формулою

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\varphi}\vec{k}\right) = \ddot{\varphi}\vec{k}.$$

Таким чином, прискорення точок *A* і *B* пов'язані між собою співвідношенням

$$\vec{w}_B = \vec{w}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{BA}. \qquad (2.6)$$

Два останні доданки в рівності (2.6) визначають прискорення точки *B* при закріпленій точці *A* ($\vec{w}_A = 0$). Тому їх сума

$$\vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{BA} = \vec{w}_{BA}$$

дає прискорення точки *B* у обертальному русі відносно системи координат Ax_2y_2, яке має дві складові – доцентрове (доосьове) і обертальне прискорення, тобто

$$\vec{w}_{BA}^{доос} = \vec{\omega} \times \vec{v}_{BA}, \quad \vec{w}_{BA}^{об} = \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}.$$

Модулі цих складових будуть

$$w_{BA}^{доос} = \omega^2 \rho = \omega^2 AB, \quad w_{BA}^{об} = \varepsilon\rho = \varepsilon \cdot AB. \qquad (2.7)$$

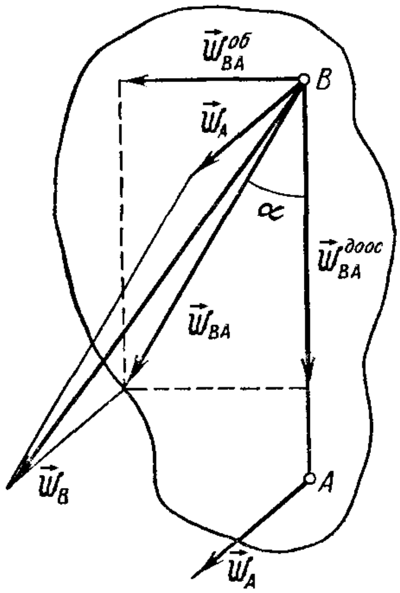


Рис. 2.8

На рис. 2.8 геометрично додаються три вектори, і визначено прискорення точки *B* за допомогою формули

$$\vec{w}_B = \vec{w}_A + \vec{w}_{BA}^{доос} + \vec{w}_{BA}^{об}. \tag{2.8}$$

Таким чином, *прискорення будь-якої точки плоскої фігури є геометричною сумою прискорення полюса та доосьового і обертального прискорень в обертальному русі фігури відносно цього полюса*.

Із (2.7) знайдемо кут, складений вектором $\vec{w}_{BA}$ з напрямком на полюс (рис. 2.8),

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{w_{BA}^{об}}{w_{BA}^{доос}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Звідси видно, що цей кут, по-перше, не залежить від вибору полюса і, по-друге, в кожен момент часу для всіх точок однаковий.

Модуль прискорення точки при її обертанні навколо полюса також знаходиться із рівності (2.7)

$$w_{BA} = AB\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \tag{2.9}$$

Він залежить від відстані точки до полюса.

Введемо поняття *миттєвого центра прискорень.*

Миттєвим центром прискорень (МЦП) називається точка площини плоскої фігури, прискорення якої в даний момент часу дорівнює нулю

Для побудови миттєвого центра прискорень вважатимемо, що нам відомо прискорення однієї з точок $\vec{w}_A$, кутова швидкість $\vec{\omega}$ і кутове прискорення $\vec{\varepsilon}$, причому вважається, що $\vec{\omega}$ і $\vec{\varepsilon}$ не рівні нулю одночасно. Із точки *A* відкладемо під кутом $\alpha = \mathrm{arctg}(\varepsilon/\omega^2)$ до прискорення $\vec{w}_A$ відрізок *AQ*

$$AQ = \frac{w_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}. \tag{2.10}$$

При цьому, якщо $\varepsilon_z = \ddot{\varphi} > 0$, то кут α відкладається проти ходу годинникової стрілки (рис. 2.9), а при протилежному знакові $\ddot{\varphi}$ – за годинниковою стрілкою.

Вибравши за полюс точку *A*, отримаємо

$$\vec{w}_Q = \vec{w}_A + \vec{w}_{QA}.$$

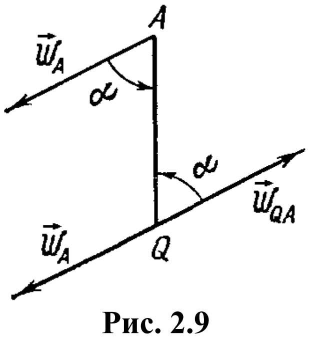


Рис. 2.9

Як уже відмічалося вище, кут між прискоренням точки відносно полюса $\vec{w}_{QA}$ і напрямком на полюс не залежить від вибору полюса. Отже, якщо $\vec{w}_{QA}$ складає з напрямком *QA* кут α, то такий самий кут буде між $\vec{w}_A$ і *AQ*. Тому вектори $\vec{w}_{QA}$ і $\vec{w}_A$ паралельні (рис. 2.9). Згідно прийнятого нами правила відліку кута α прискорення $\vec{w}_{QA}$ і $\vec{w}_A$

будуть завжди протилежно напрямлені. Згадуючи (2.9) і підставляючи (2.10), одержимо

$$w_{QA} = AQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = \frac{w_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = w_A .$$

Звідси випливає:

$$\vec{w}_Q = \vec{w}_A + \vec{w}_{QA} = 0 .$$

Таким чином ми довели, що точка Q – миттєвий центр прискорень.

Прискорення будь-якої точки в даний момент часу тепер можна визначити так само, як при обертанні навколо нерухомої осі:

$$\vec{w}_A = \vec{w}_Q + \vec{w}_{AQ} = \vec{w}_{AQ} = \vec{w}_{AQ}^{доос} + \vec{w}_{AQ}^{об}$$

(оскільки $\vec{w}_Q = 0$).

Слід відмітити, що миттєвий центр прискорень і миттєвий центр швидкостей, взагалі кажучи, різні точки. В цьому легко переконатися, розглянувши простий приклад. Нехай диск котиться по горизонтальній площині без ковзання (рис. 2.7, *д*), і швидкість його центра *O* стала. Як ми знаємо, МЦШ знаходиться в точці дотику *P*. Оскільки вектор швидкості точки *O* сталий, то прискорення центра диска рівне нулю. Таким чином, миттєвий центр прискорень співпадає з центром диска, а миттєвий центр швидкостей – з точкою дотику.

Завдання для лабораторної роботи №2

Для заданого положення механізму знайти швидкості і прискорення точок *B* і *C*. Схеми механізмів зображено на рис. 2.10-2.13, а необхідні розрахункові дані наведено в табл. 2.1.

Таблиця 2.1

Номер варіанта (рис. 2.10-2.13)	Розміри, *см*				ω_{OA}, c^{-1}	ε_{OA}, c^{-2}	v_A, $см/с$	w_A, $см/с^2$
	OA	*r*	*AB*	*AC*				
1	40	15	–	8	2	2	–	–
2	30	15	–	8	3	2	–	–
3	–	50	–	–	–	–	50	100
4	35	–	–	45	4	8	–	–
5	25	–	–	20	1	1	–	–
6	40	15	–	6	1	3	–	–
7	35	–	75	60	5	10	–	–
8	–	–	20	10	–	–	40	20
9	–	–	45	30	–	–	20	10

10	25	–	80	20	1	2	–	–
11	–	–	30	15	–	–	10	0
12	–	–	30	20	–	–	20	20
13	25	–	55	40	2	4	–	–
14	45	15	–	8	3	1	–	–
15	40	15	–	8	1	1	–	–
16	55	20	–	–	2	5	–	–
17	–	30	–	10	–	–	80	50
18	10	–	10	5	2	6	–	–
19	20	15	–	10	1	2	–	–
20	–	–	20	6	–	–	10	15
21	30	–	60	15	3	8	–	–
22	35	–	60	40	4	10	–	–
23	–	–	60	20	–	–	5	10
24	25	–	35	15	2	3	–	–
25	20	–	70	20	1	2	–	–
26	20	15	15	10	2	4	–	–
27	–	15	–	5	–	–	60	30
28	20	–	50	25	1	1	–	–
29	12	–	35	15	4	6	–	–
30	40	–	–	20	5	10	–	–
31	–	20	–	7	–	–	50	40
32	30	–	–	15	10	5	–	–
33	50	20	–	10	4	8	–	–
34	40	–	–	50	5	7	–	–
35	35	–	85	25	3	6	–	–
36	40	20	–	11	5	9	–	–
37	–	–	30	10	–	–	10	5
38	15	–	60	15	3	8	–	–
39	25	20	–	15	6	2	–	–
40	20	–	50	35	7	3	–	–

Примітки. 1. ω_{OA} і ε_{OA} – кутова швидкість і кутове прискорення кривошипа *OA* при заданому положенні механізму.

2. $\vec{v}_A$ і $\vec{w}_A$ – швидкість і прискорення точки *A*.

3. Кочення коліс проходить без ковзання.

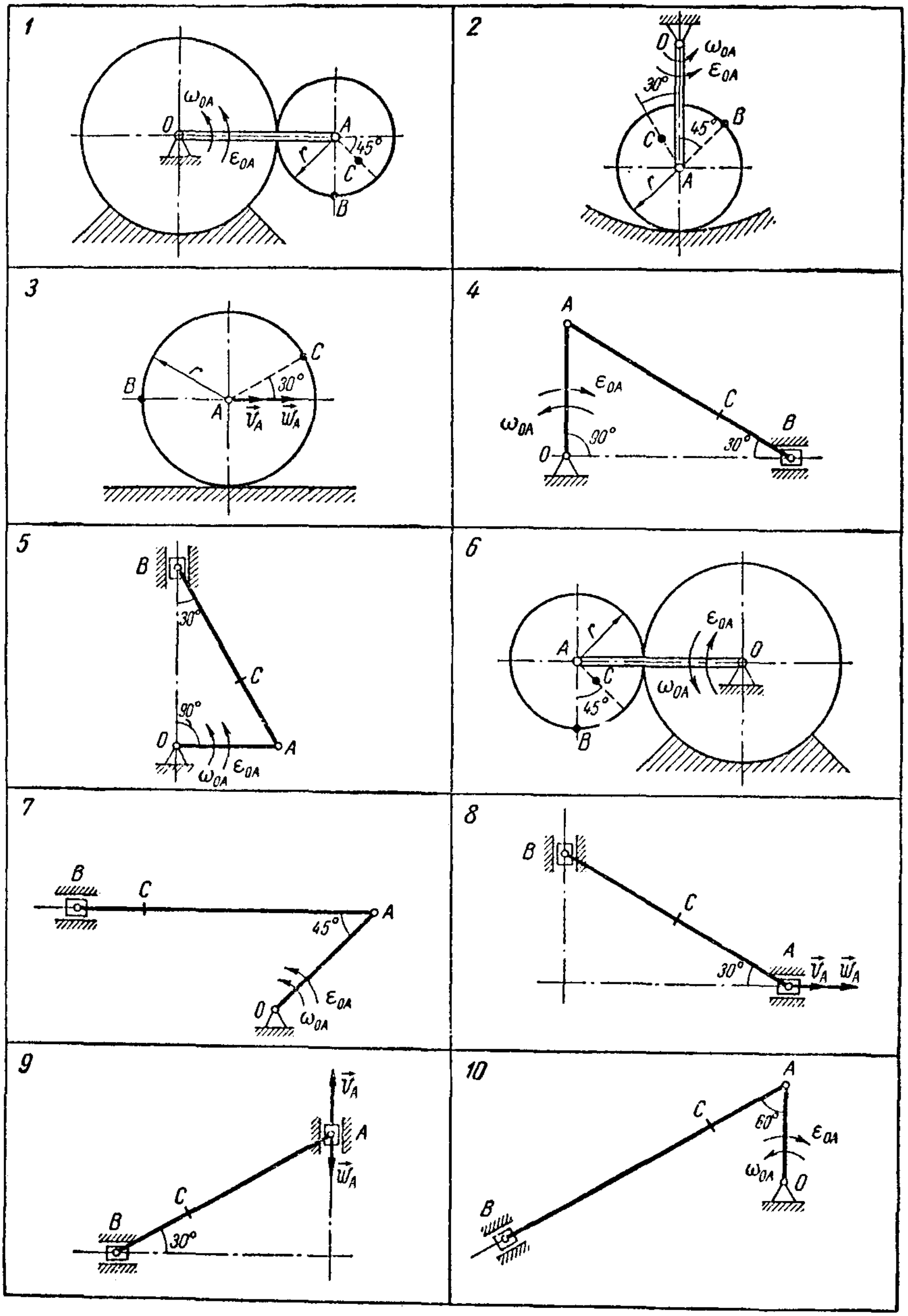
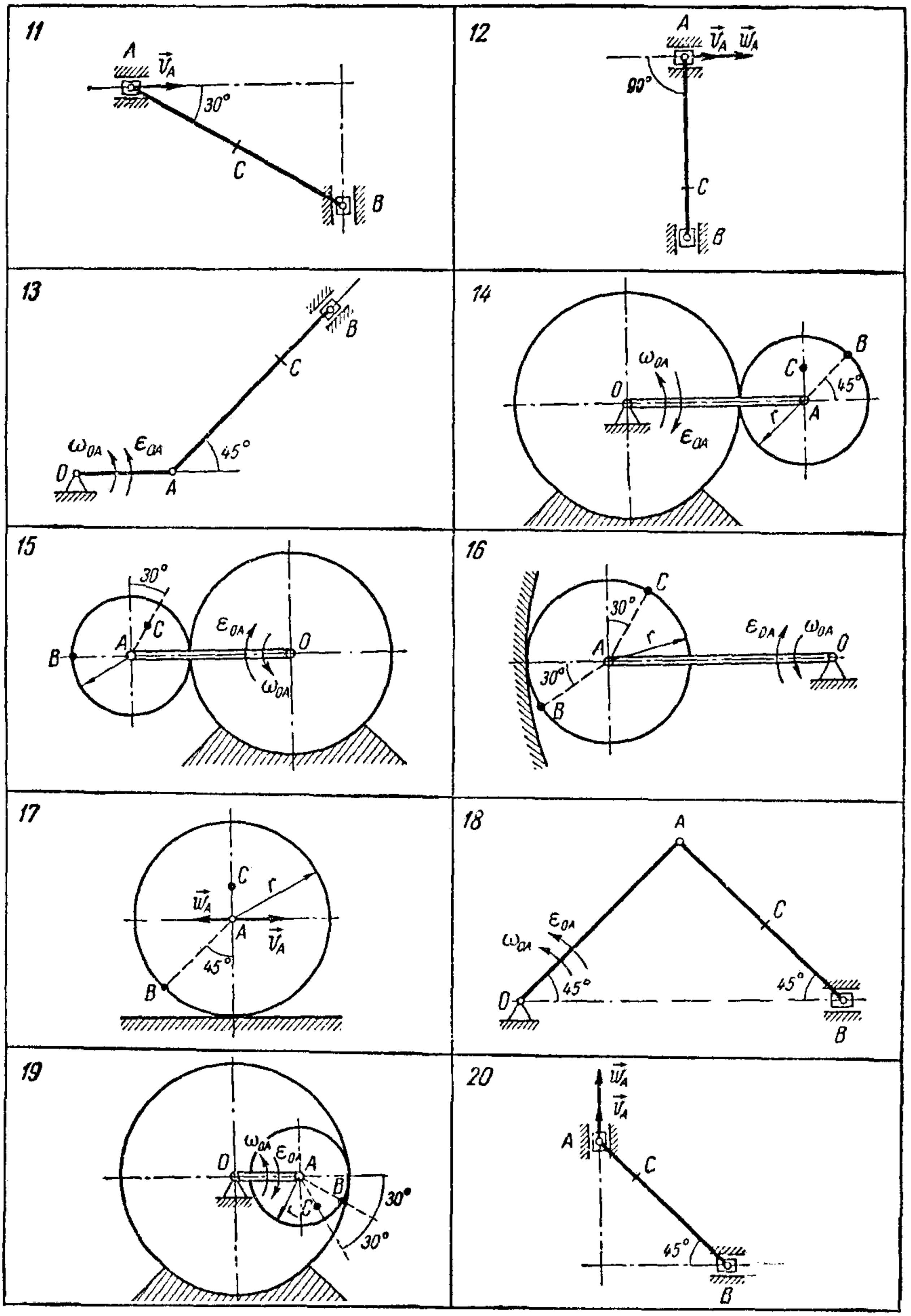

1
O
A
ω0A
ε0A
r
45°
C
B
2
O
ω0A
ε0A
30°
45°
B
C
A
r
3
B
C
r
30°
A
VA
WA
4
A
ε0A
C
ω0A
B
90°
30°
O
5
B
30°
C
90°
O
A
ω0A
ε0A
6
A
r
ε0A
O
C
ω0A
45°
B
7
B
C
A
45°
ε0A
O
ω0A
8
B
C
A
30°
VA
WA
9
VA
A
WA
C
B
30°
10
A
C
60°
ε0A
ω0A
O
B

Рис. 2.10



11
A
$\vec{V}_A$
30°
C
B
12
A
$\vec{V}_A$ $\vec{W}_A$
90°
C
B
13
B
C
ω_{OA} ε_{OA}
45°
O
A
14
ω_{OA}
C
B
O
45°
r
A
ε_{OA}
15
30°
C
A
ε_{OA}
O
B
ω_{OA}
16
C
30°
r
ε_{OA} ω_{OA}
A
O
30°
B
17
C
r
$\vec{W}_A$
A
$\vec{V}_A$
45°
B
18
A
C
ε_{OA}
ω_{OA}
45°
45°
O
B
19
ω_{OA} ε_{OA}
O
A
B
30°
C
30°
20
$\vec{W}_A$
$\vec{V}_A$
A
C
45°
B

Рис. 2.11

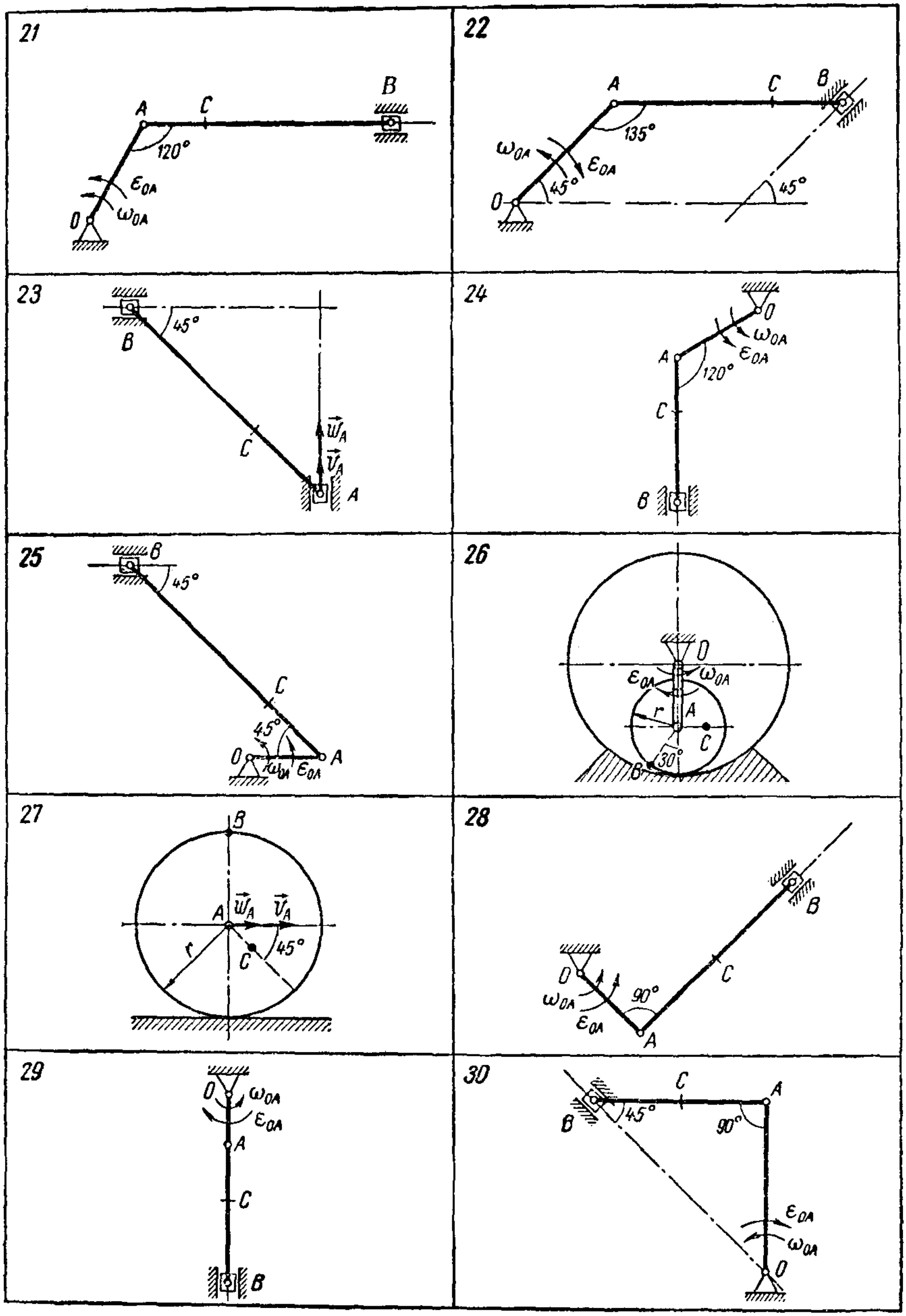


Рис. 2.12

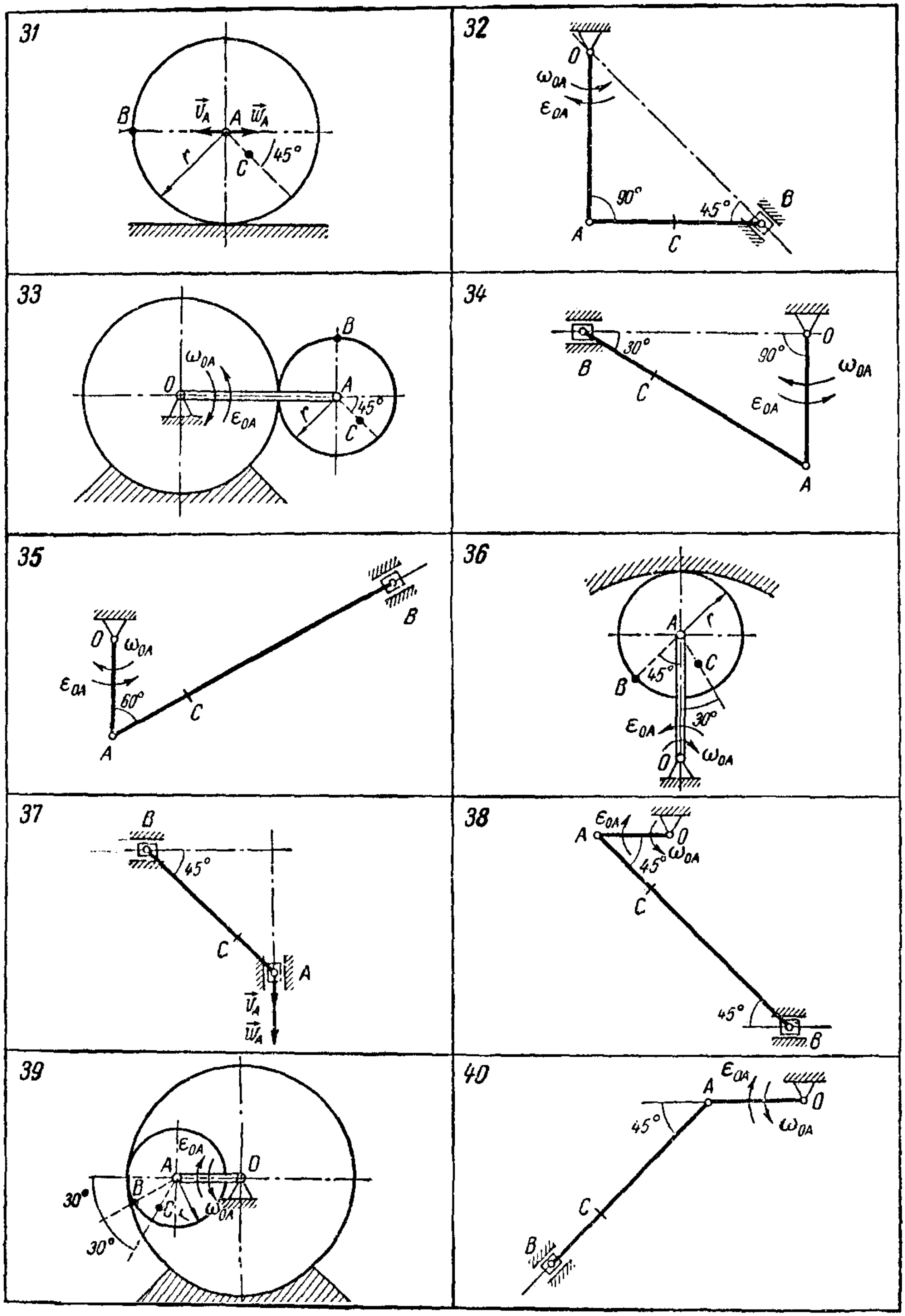

31
B
$\vec{v}_A$
A
$\vec{w}_A$
r
C
45°
32
O
ω_{OA}
ε_{OA}
90°
45°
B
A
C
33
B
ω_{OA}
O
A
45°
ε_{OA}
r
C
34
30°
O
B
90°
ω_{OA}
C
ε_{OA}
A
35
B
O
ω_{OA}
ε_{OA}
60°
C
A
36
A
r
C
45°
B
30°
ε_{OA}
O
ω_{OA}
37
B
45°
C
A
$\vec{v}_A$
$\vec{w}_A$
38
ε_{OA}
A
O
ω_{OA}
45°
C
45°
B
39
ε_{OA}
A
O
30°
B
C
ω_{OA}
30°
40
ε_{OA}
A
O
45°
ω_{OA}
C
B

Рис. 2.13

Приклад виконання завдання

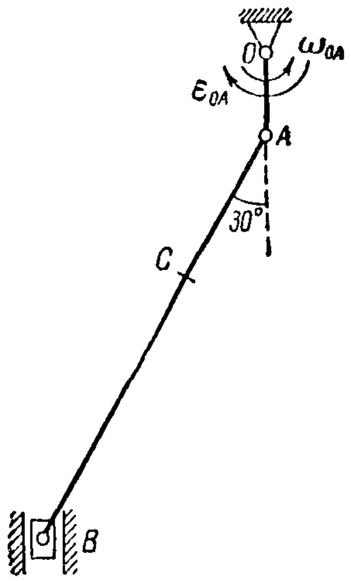


Рис. 2.14

Дано: 1) схема механізму в заданому положенні (рис. 2.14);

2) вихідні дані (табл. 2.2).

Т а б л и ц я 2.2

Розміри, *см*			ω_{OA}, c^{-1}	ε_{OA}, c^{-2}
OA	*AB*	*AC*		
10	60	20	1,5	2

Знайти: v_B, v_C, w_B, w_C.

Р о з в ' я з а н н я

1. *Визначення швидкостей точок* (рис. 2.15). Обчислюємо швидкість пальця *A* кривошипа *OA* при заданому положенні механізму:

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA = 1{,}5 \cdot 10 = 15 \ \text{см}/c.$$

Швидкість точки *A* перпендикулярна до кривошипа *OA*. Швидкість повзуна *B* напрямлена по вертикалі. Миттєвий центр швидкостей *P* шатуна *AB* знаходиться в точці перетину перпендикулярів, проведених із точок *A* і *B* до їх швидкостей.

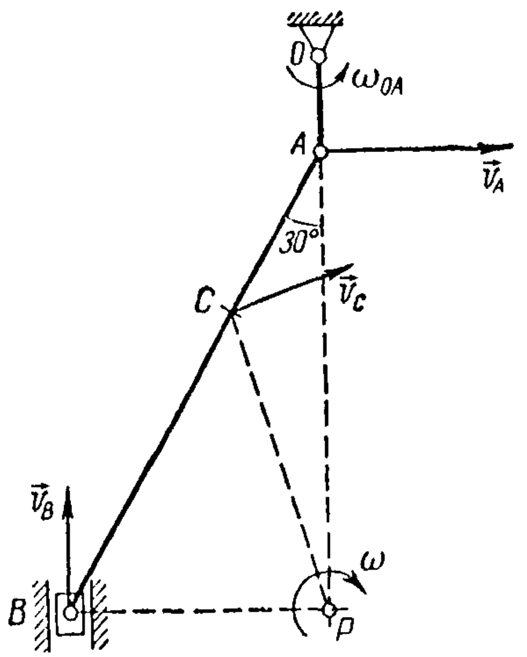


Рис. 2.15

Кутова швидкість ланки *AB*

$$\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{15}{60 \cdot \cos 30^\circ} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = 0{,}29 \ c^{-1}.$$

Швидкості точок *B* і *C*:

$$v_B = \omega \cdot BP; \qquad v_C = \omega \cdot CP,$$

де

$$BP = AB \cdot \sin 30^\circ = 60 \cdot 0{,}5 = 30{,}0 \ \text{см};$$

$$CP = \sqrt{BC^2 + BP^2 - 2BC \cdot BP \cdot \cos 60^\circ} =$$

$$= \sqrt{40^2 + 30^2 - 2 \cdot 40 \cdot 30 \cdot 0{,}5} = 36{,}1 \ \text{см}.$$

Отже,

$$v_B = 0{,}29 \cdot 30{,}0 = 8{,}7 \ \text{см}/c;$$

$$v_C = 0{,}29 \cdot 36{,}1 = 10{,}5 \ \text{см}/c.$$

Вектор $\vec{v}_C$ напрямлений перпендикулярно до відрізка CP в бік, що відповідає обертанню ланки *AB*.

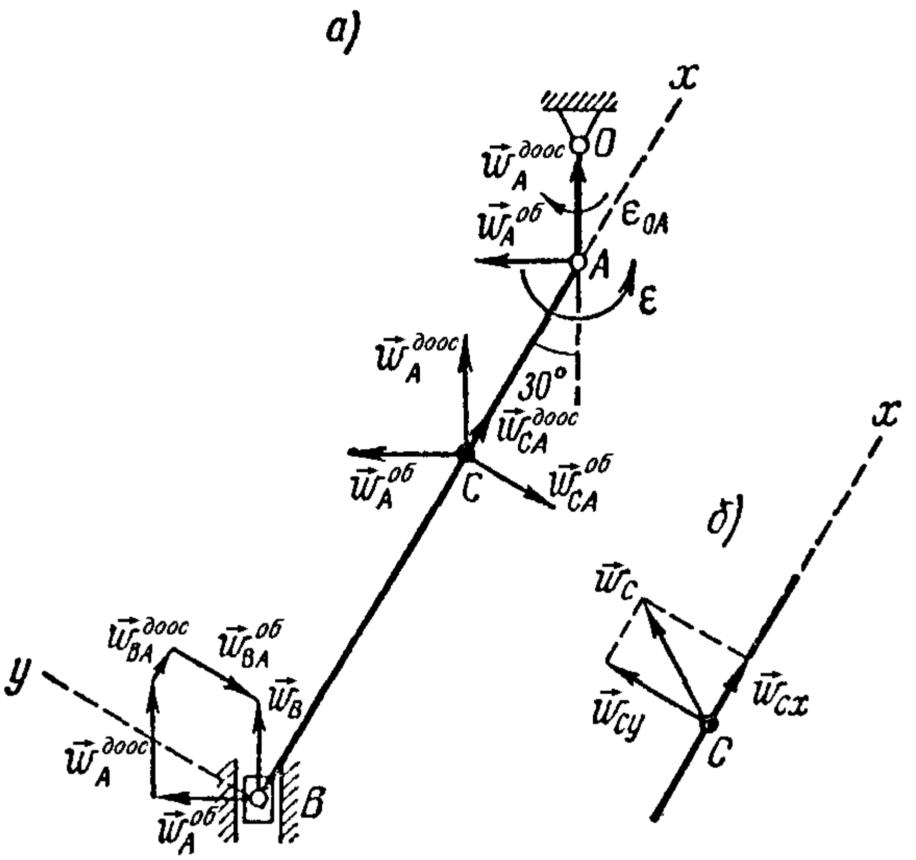


Рис. 2.16

2. *Визначення прискорень точок* (рис. 2.16).

Прискорення точки A складається із обертального і доосьового прискорень:

$$\vec{w}_A = \vec{w}_A^{об} + \vec{w}_A^{доос};$$

$$w_A^{об} = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 2 \cdot 10 = 20 \ \ см/c^2 \ ;$$

$$w_A^{доос} = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 1{,}5^2 \cdot 10 = 22{,}5 \ \ см/c^2 \ .$$

Вектор $\vec{w}_A^{доос}$ напрямлений від A до O. Вектор $\vec{w}_A^{об}$ перпендикулярний до вектора $\vec{w}_A^{доос}$ і напрямлений відповідно до напрямку кутового прискорення ε_{OA}.

Згідно теореми про прискорення точок плоскої фігури маємо:

$$\vec{w}_B = \vec{w}_A + \vec{w}_{BA}^{об} + \vec{w}_{BA}^{доос}$$

або

$$\vec{w}_B = \vec{w}_A^{об} + \vec{w}_A^{доос} + \vec{w}_{BA}^{об} + \vec{w}_{BA}^{доос} \ . \tag{2.11}$$

Доосьове прискорення точки B в обертальному русі шатуна AB навколо полюса A:

$$w_{BA}^{доос} = \omega^2 \cdot AB = \frac{1}{12} \cdot 60 = 5{,}0 \ \ см/c^2 \ .$$

Вектор $\vec{w}_{BA}^{доос}$ напрямлений від B до A, а обертальне прискорення $\vec{w}_{BA}^{об}$ перпендикулярне до нього.

Побудуємо багатокутник прискорень. При цьому скористаємося тим, що пряма, по якій напрямлено прискорення $\vec{w}_B$, відома. Повзун B рухається по вертикальній прямій, вздовж якої напрямлене і прискорення точки B. Відкладемо з точки B послідовно вектори $\vec{w}_A^{об}$ і $\vec{w}_A^{доос}$, що складають прискорення полюса A, і доосьове прискорення $\vec{w}_{BA}^{доос}$ (паралельне AB). Через кінець вектора $\vec{w}_{BA}^{доос}$ проведемо пряму, паралельну обертальному прискоренню $\vec{w}_{BA}^{об}$, тобто перпендикулярну AB до перетину її прямою, по якій напрямлене прискорення $\vec{w}_B$. Прискорення $\vec{w}_B$ визначається як замикаючий вектор многокутника прискорень (рис. 2.16, *а*).

Проектуючи векторну рівність (2.11) на осі x і y, отримуємо:

$$w_B \cos 30^\circ = -w_A^{об} \cos 60^\circ + w_A^{доос} \cos 30^\circ + w_{BA}^{доос}; \tag{2.12}$$

$$w_B \cos 60^\circ = w_A^{об} \cos 30^\circ + w_A^{доос} \cos 60^\circ - w_{BA}^{об}. \tag{2.13}$$

Із рівняння (2.12)

$$w_B = \frac{-w_A^{об} \cos 60^\circ + w_A^{доос} \cos 30^\circ + w_{BA}^{об}}{\cos 30^\circ} = \frac{-20 \cdot 0,5 + 22,5 \cdot 0,866 + 5}{0,866} = 16,7\, см/с^2.$$

Для визначення прискорення точки C знайдемо кутове прискорення шатуна AB.

Із рівняння (2.13)

$$w_{BA}^{об} = w_A^{об} \cos 30^\circ + w_A^{доос} \cos 60^\circ - w_B \cos 60^\circ =$$

$$= 20 \cdot 0,866 + 22,5 \cdot 0,5 - 16,7 \cdot 0,5 = 20,2\, см/с^2.$$

Але $w_{BA}^{об} = \varepsilon \cdot AB$, звідси $\varepsilon = \dfrac{w_{BA}^{об}}{AB} = \dfrac{20,2}{60} = 0,34\ c^{-2}$.

Напрямок прискорення $\vec{w}_{BA}^{об}$ відносно полюса A визначає напрямок кутового прискорення $\vec{\varepsilon}$. В даному випадку воно протилежне до $\vec{\omega}$.

Визначимо прискорення точки C:

$$\vec{w}_C = \vec{w}_A^{об} + \vec{w}_A^{доос} + \vec{w}_{CA}^{об} + \vec{w}_{CA}^{доос}.$$

Обертальне і доосьове прискорення точки C під час обертального руху шатуна AB навколо полюса A:

$$w_{CA}^{об} = \varepsilon \cdot AC = 0,34 \cdot 20 = 6,8\, см/с^2;$$

$$w_{CA}^{доос} = \omega^2 \cdot AC = \frac{1}{12} \cdot 20 = 1,7\, см/с^2.$$

Вектор $\vec{w}_{AC}^{об}$ перпендикулярний до вектора $\vec{w}_{AC}^{доос}$ і напрямлений згідно кутового прискорення $\vec{\varepsilon}$.

Прискорення точки C знаходиться методом проекцій:

$$w_{Cx} = w_{CA}^{доос} + w_A^{доос} \cos 30^\circ - w_A^{об} \cos 60^\circ = 1,7 + 22,5 \cdot 0,866 - 20 \cdot 0,5 = 11,2\, см/с^2;$$

$$w_{Cy} = w_A^{доос} \cos 60^\circ + w_A^{об} \cos 30^\circ - w_{CA}^{об} = 22,5 \cdot 0,5 + 20 \cdot 0,866 - 6,8 = 21,8\, см/с^2;$$

$$w_C = \sqrt{w_{Cx}^2 + w_{Cy}^2} = \sqrt{11,2^2 + 21,8^2} = 24,5\, см/с^2$$

(див. рис. 2.16, *б*).

РОЗДІЛ 3. СФЕРИЧНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА

3.1. Задання руху. Кути Ейлера

Рух тіла, що має одну нерухому точку, називають сферичним рухом або обертанням тіла навколо нерухомої точки.

При сферичному русі тверде тіло має три степені вільності. Три параметри, які визначають положення такого тіла відносно нерухомої системи координат $Ox_1y_1z_1$ (рис. 3.1), можуть бути вибрані різними способами. В теоретичній механіці положення тіла з однією нерухомою точкою, як правило, визначають за допомогою *кутів Ейлера*, які вводяться наступним чином.

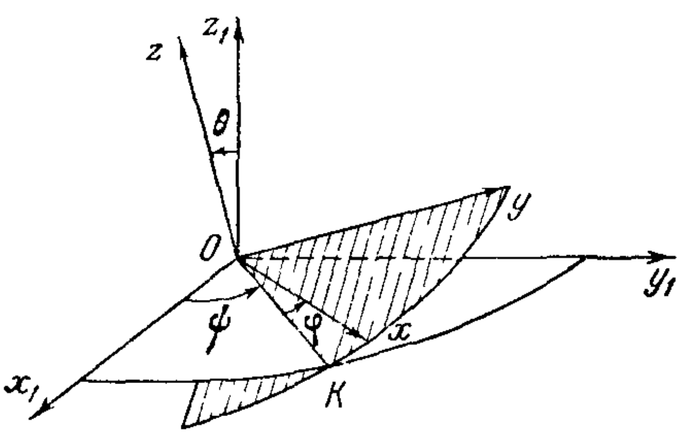


Рис. 3.1

Пов'яжемо жорстко з тілом рухому систему координат $Oxyz$, вибравши початок координат в нерухомій точці O.

Координатна площина xOy перетинається з нерухомою площиною x_1Oy_1 вздовж прямої OK, яка називається *лінією вузлів*. Кут між нерухомою віссю Ox_1 та лінією вузлів називається *кутом прецесії* і позначається ψ. Кут між лінією вузлів і рухомою віссю Ox називається *кутом власного обертання* і позначається φ. Кут між осями Oz_1 і Oz називається *кутом нутації* і позначається θ. Всі кути відраховуються відповідно від осей Ox_1, OK і Oz_1 проти руху годинникової стрілки, як показано на рис. 3.1.

Таким чином, рівності

$$\psi = \psi(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad \theta = \theta(t)$$

задають *рівняння руху тіла при обертанні навколо нерухомої точки*.

Кути, які визначають положення тіла, можна ввести і іншими способами. Наприклад, положення корабля відносно його центра ваги C визначається *корабельними кутами* або *кутами Ейлера-Крилова* (див., наприклад, [1,2]).

3.2. Швидкості точок твердого тіла при сферичному русі. Миттєва вісь обертання

Нехай тверде тіло має одну нерухому точку O. Пов'яжемо жорстко з тілом систему координат $Oxyz$ (рис. 3.2). Система координат $Oxyz$ однозначно визначає його положення відносно нерухомої системи відліку $Ox_1y_1z_1$. Положення довільної точки M твердого тіла визначається радіус-вектором $\vec{r}$ (рис. 3.2). Якщо x, y і z – координати точки M в рухомій системі координат, а $\vec{i}$, $\vec{j}$ і $\vec{k}$ – оди-

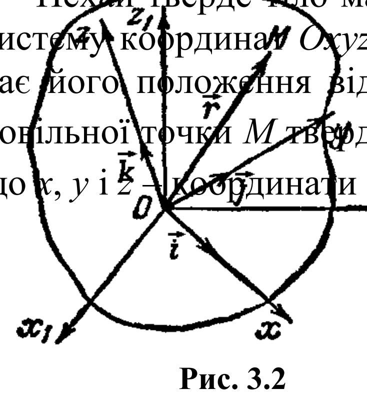


Рис. 3.2

ничні вектори осей цієї системи координат, то радіус-вектор можна подати у вигляді

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\,. \tag{3.1}$$

Координати x, y і z точки M в рухомій системі відліку є сталими величинами, а орти $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ будуть функціями часу, оскільки система координат $Oxyz$ рухається разом із твердим тілом.

Швидкість точки M визначається за формулою $\vec{v} = d\vec{r}/dt$, тому диференціюючи (3.1) за t, отримаємо

$$\vec{v} = x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt}\,. \tag{3.2}$$

Помноживши обидві частини рівності (3.1) скалярно на $\vec{i}$, $\vec{j}$ і $\vec{k}$, одержимо

$$\begin{aligned} v_x &= \vec{v}\cdot\vec{i} = x\frac{d\vec{i}}{dt}\cdot\vec{i} + y\frac{d\vec{j}}{dt}\cdot\vec{i} + z\frac{d\vec{k}}{dt}\cdot\vec{i}\,,\\ v_y &= \vec{v}\cdot\vec{j} = x\frac{d\vec{i}}{dt}\cdot\vec{j} + y\frac{d\vec{j}}{dt}\cdot\vec{j} + z\frac{d\vec{k}}{dt}\cdot\vec{j}\,,\\ v_z &= \vec{v}\cdot\vec{k} = x\frac{d\vec{i}}{dt}\cdot\vec{k} + y\frac{d\vec{j}}{dt}\cdot\vec{k} + z\frac{d\vec{k}}{dt}\cdot\vec{k}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Оскільки вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$ і $\vec{k}$ взаємно перпендикулярні, то

$$\vec{i}^{\,2} = 1,\; \vec{j}^{\,2} = 1,\; \vec{k}^{\,2} = 1,\quad \vec{i}\cdot\vec{j} = 0,\; \vec{j}\cdot\vec{k} = 0,\; \vec{k}\cdot\vec{i} = 0. \tag{3.4}$$

Диференціюючи ці рівності за часом, знайдемо дві групи формул:

$$\frac{d\vec{i}}{dt}\cdot\vec{i} = 0,\quad \frac{d\vec{j}}{dt}\cdot\vec{j} = 0,\quad \frac{d\vec{k}}{dt}\cdot\vec{k} = 0, \tag{3.5}$$

$$\frac{d\vec{i}}{dt}\cdot\vec{j} = -\frac{d\vec{j}}{dt}\cdot\vec{i}\,,\quad \frac{d\vec{j}}{dt}\vec{k}\cdot = -\frac{d\vec{k}}{dt}\cdot\vec{j}\,,\quad \frac{d\vec{k}}{dt}\cdot\vec{i} = -\frac{d\vec{i}}{dt}\cdot\vec{k}. \tag{3.6}$$

Вирази (3.3) при цьому набудуть вигляду

$$v_x = z\frac{d\vec{k}}{dt}\cdot\vec{i} - y\frac{d\vec{i}}{dt}\cdot\vec{j}\,,\quad v_y = x\frac{d\vec{i}}{dt}\cdot\vec{j} - z\frac{d\vec{j}}{dt}\cdot\vec{k}\,,\quad v_z = y\frac{d\vec{j}}{dt}\cdot\vec{k} - x\frac{d\vec{k}}{dt}\cdot\vec{i}\,. \tag{3.7}$$

Формули (3.7) містять три скалярні функції часу, для яких введемо позначення:

$$\omega_x = \frac{d\vec{j}}{dt}\vec{k},\quad \omega_y = \frac{d\vec{k}}{dt}\vec{i}\,,\quad \omega_z = \frac{d\vec{i}}{dt}\vec{j}. \tag{3.8}$$

Перепишемо тепер формули (3.3) у вигляді

$$v_x = \omega_y z - \omega_z y,\quad v_y = \omega_z x - \omega_x z,\quad v_z = \omega_x y - \omega_y x. \tag{3.9}$$

Так як

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}\,,$$

то, у відповідності з виразом (3.9), маємо

$$\vec{v} = (\omega_y z - \omega_z y)\vec{i} + (\omega_z x - \omega_x z)\vec{j} + (\omega_x y - \omega_y x)\vec{k}\,.$$

Якщо тепер ввести вектор $\vec{\omega}$ з проекціями $\omega_x,\ \omega_y,\ \omega_z$,

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k},$$

то швидкість точки можна представити у вигляді векторного добутку

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

Отже, швидкість точки тіла, що здійснює сферичний рух, визначається формулою

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \tag{3.10}$$

Геометричне місце точок, швидкість яких дорівнює нулю, визначається з рівняння

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = 0, \tag{3.11}$$

яке являє собою умову колінеарності векторів $\vec{\omega}$ і $\vec{r}$. Це векторне рівняння в системі координат $Oxyz$ можна записати у вигляді

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z}. \tag{3.12}$$

Рівняння (3.12) визначають пряму лінію, напрямні косинуси якої пропорційні проекціям $\omega_x,\ \omega_y,\ \omega_z$ вектора $\vec{\omega}$. В загальному випадку вектор $\vec{\omega}$ і його проекції є функціями часу, тому положення прямої (3.12) змінюється як відносно тіла, так і відносно нерухомої системи координат $Ox_1y_1z_1$.

Пряма (3.12), в кожній точці якої швидкості точок тіла в даний момент часу рівні нулю, називається *миттєвою віссю обертання* або *миттєвою віссю швидкостей*.

Введений нами вектор $\vec{\omega}$ завжди напрямлений по миттєвій осі обертання.

Формула (3.10) співпадає за формою з виразом для швидкостей точок твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$. Отже, *швидкості точок твердого тіла при сферичному русі розподіляються так, наче тіло обертається навколо осі, що співпадає в даний момент часу з миттєвою віссю обертання*. Зокрема, модуль швидкості точки M в даний момент визначається рівністю

$$v = \omega\rho,$$

де ρ – відстань від точки M до миттєвої осі обертання. Швидкість точки M напрямлена перпендикулярно до площини, що проходить через її радіус-вектор $\vec{r}$ і миттєву вісь обертання (рис. 3.3).

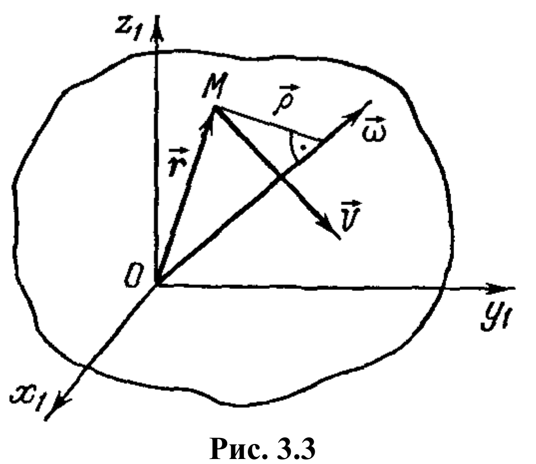


Рис. 3.3

За аналогією з обертанням тіла навколо нерухомої осі назвемо в розглядуваному нами випадку сферичного руху тіла вектор $\vec{\omega}$ *вектором кутової швидкості*.

Якщо відомо напрямки швидкостей двох точок тіла, то миттєву вісь обертання можна знайти графічно. Як випливає із картини розподілу швидкостей точок тіла в даний момент часу, миттєва вісь обертання лежить в площині, перпендикулярній напрямку швидкості точки тіла, і проходить через нерухому точку тіла. Отже, якщо через точки тіла, напрямки швидкостей яких відомо, провести площини, перпендикулярні цим швидкостям, то лінія перетину цих площин і буде миттєвою віссю обертання.

Миттєву вісь обертання можна визначити і у випадку, коли відомо одну точку тіла, швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю. З'єднуючи цю точку з нерухомою точкою тіла, знайдемо миттєву вісь обертання.

Положення точки M тіла в нерухомій системі відліку визначається координатами x_1, y_1 і z_1, а вектор $\vec{\omega}$ має проекції ω_x, ω_y, ω_z. Тоді, у відповідності з (3.10), проекції швидкості точки M на нерухомі осі координат будуть

$$v_{x_1} = \omega_{y_1} z_1 - \omega_{z_1} y_1, \quad v_{y_1} = \omega_{z_1} x_1 - \omega_{x_1} z_1, \quad v_{z_1} = \omega_{x_1} y_1 - \omega_{y_1} x_1. \tag{3.13}$$

Рівняння миттєвої осі обертання в нерухомій системі відліку має вигляд

$$\frac{x_1}{\omega_{x_1}} = \frac{y_1}{\omega_{y_1}} = \frac{z_1}{\omega_{z_1}}. \tag{3.14}$$

Геометричне місце миттєвих осей обертання, побудованих в нерухомій системі координат, називається *нерухомим аксоїдом*, а в рухомій системі координат – *рухомим аксоїдом*.

3.3. Прискорення точок тіла при сферичному русі

Введемо спочатку поняття кутового прискорення.

Кутовим прискоренням називається похідна кутової швидкості за часом, тобто

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \tag{3.15}$$

Із означення видно, що, оскільки початок вектора $\vec{\omega}$ завжди нерухомий (точка O), то вектор кутового прискорення можна розглядати як швидкість кінця вектора кутової швидкості (рис. 3.4). Кутове прискорення $\vec{\varepsilon}$ спрямоване завжди по дотичній до годографа вектора кутової швидкості (рис.3.4), тому його напрямок може бути будь-яким в залежності від закону зміни вектора $\vec{\omega}$. Відмітимо також, що годограф вектора кутової швидкості – крива, що лежить на нерухомому аксоїді.

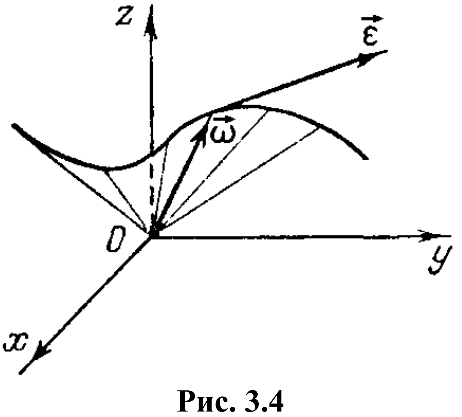


Рис. 3.4

Перейдемо до визначення прискорення довільної точки тіла. Виходячи із означення прискорення (1.15) і використовуючи рівність (3.10), отримаємо

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega}\times\vec{r})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Але

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \text{ , а } \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon} \text{ ,}$$

отже,

$$\vec{w} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} \text{ .} \qquad (3.16)$$

Таким чином, прискорення $\vec{w}$ можна подати у вигляді суми двох прискорень: *обертального*

$$\vec{w}^{об} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$$

і *доосьового*

$$\vec{w}^{доос} = \vec{\omega} \times \vec{v} \text{ .}$$

Модуль обертальної складової прискорення рівний

$$w^{об} = \varepsilon r \sin(\vec{\varepsilon}, \vec{r}) = \varepsilon h$$

де h – відстань від точки M до вектора $\vec{\varepsilon}$. Напрямлене це прискорення перпендикулярно до площини векторів $\vec{\varepsilon}$ і $\vec{r}$ в той бік, звідки найкоротший перехід від вектора $\vec{\varepsilon}$ до вектора $\vec{r}$ видно проти ходу годинникової стрілки. Відмітимо, що внаслідок розбіжності в напрямках кутової швидкості і кутового прискорення обертальна складова прискорення може бути напрямлена по відношенню до напрямку швидкості під будь-яким кутом, залишаючись перпендикулярною до вектора $\vec{r}$. В цьому суттєва відмінність між обертанням тіла навколо нерухомої осі і сферичним рухом тіла.

Доосьове прискорення напрямлене по перпендикуляру до площини векторів $\vec{\omega}$ і $\vec{v}$, тобто по напрямку вектора $\vec{d}$ (рис. 3.5), який має початок в точці M і кінець в основі перпендикуляра, опущеного з точки M на миттєву вісь обертання.

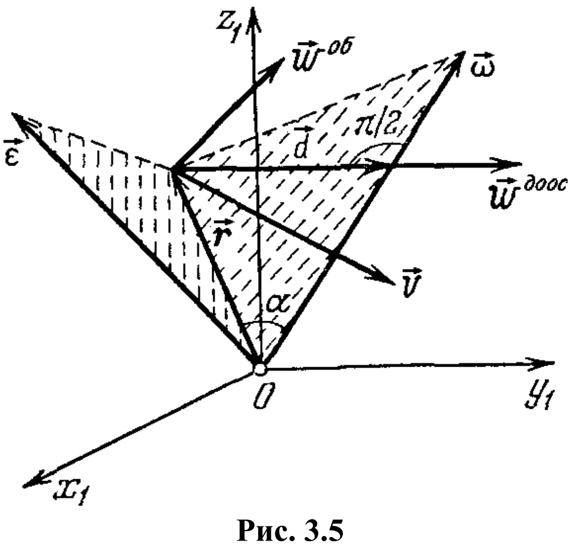


Рис. 3.5

Модуль доосьового прискорення дорівнює

$$w^{доос} = \omega v = \omega^2 d \text{ ,}$$

оскільки

$$v = \omega r \sin\alpha = \omega d \text{ .}$$

Отже, можна записати

$$\vec{w}^{доос} = \vec{\omega} \times \vec{v} = \omega^2 \vec{d} \text{ .}$$

Таким чином, прискорення будь-якої точки твердого тіла при сферичному русі дорівнює сумі обертальної і доосьової складових прискорення

$$\vec{w} = \vec{w}^{об} + \vec{w}^{доос} \text{ .} \qquad (3.17)$$

Завдання для лабораторної роботи №3

Тіло *A* котиться без ковзання по поверхні нерухомого тіла *B*, маючи нерухому точку *O*. Визначити кутову швидкість і кутове прискорення тіла *A*, а також швидкість і прискорення точки *M* при заданому положенні тіла *A*, якщо його вісь $O\zeta$ обертається з сталою кутовою швидкістю ω_1 навколо нерухомої осі Oz.

Схеми зображено на рис. 3.6-3.9, а необхідні для обчислення дані наведено в табл. 3.1.

Т а б л и ц я 3.1

Номер варіанта (рис. 3.6-3.9)	$OM_0, см$	ω_1, c^{-1}	$M_0M, см$	Номер варіанта (рис. 3.6-3.9)	$OM_0, см$	ω_1, c^{-1}	$M_0M, см$
1	30	2,3	16	21	40	4,0	25
2	45	3,0	5	22	30	1,6	5
3	50	1,2	–	23	40	2,0	5
4	40	2,0	10	24	60	3,5	10
5	40	0,8	10	25	40	1,6	15
6	70	4,0	30	26	40	2,2	15
7	60	1,5	–	27	30	4,1	10
8	40	2,1	20	28	45	3,0	5
9	50	3,2	10	29	40	1,4	15
10	20	1,3	10	30	50	2,9	15
11	30	0,9	20	31	40	2,3	45
12	40	2,2	–	32	30	3,2	45
13	20	3,8	10	33	60	1,7	20
14	30	1,4	10	34	35	3,6	10
15	40	0,7	15	35	50	1,4	15
16	45	2,4	20	36	35	2,0	10
17	50	3,5	10	37	30	1,2	15
18	30	1,0	10	38	50	2,3	20
19	50	2,7	20	39	45	3,1	10
20	30	3,3	10	40	30	1,2	–

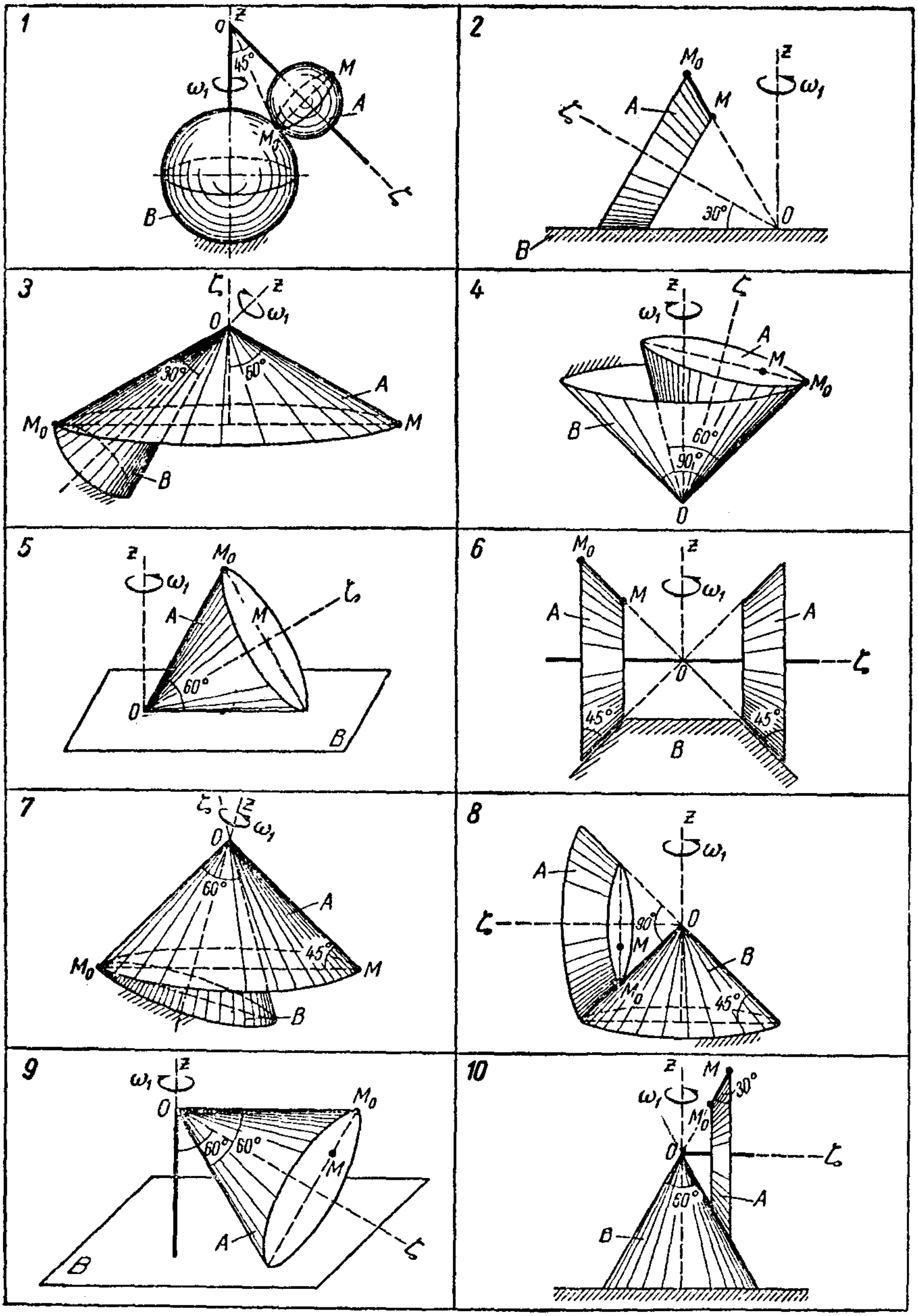

1
O
z
45°
ω_1
M
A
M_0
B
ζ
2
M_0
z
ω_1
M
A
ζ
30°
O
B
3
ζ
z
ω_1
O
30°
60°
A
M_0
M
B
4
z
ζ
ω_1
A
M
M_0
B
60°
90°
O
5
z
M_0
ω_1
ζ
A
M
60°
O
B
6
M_0
z
M
ω_1
A
A
ζ
O
45°
45°
B
7
ζ
z
ω_1
O
60°
A
45°
M_0
M
B
8
z
ω_1
A
ζ
90°
O
M
B
M_0
45°
9
z
ω_1
O
M_0
60°
60°
M
A
B
ζ
10
z
M
30°
ω_1
M_0'
O
ζ
60°
A
B

Рис. 3.6

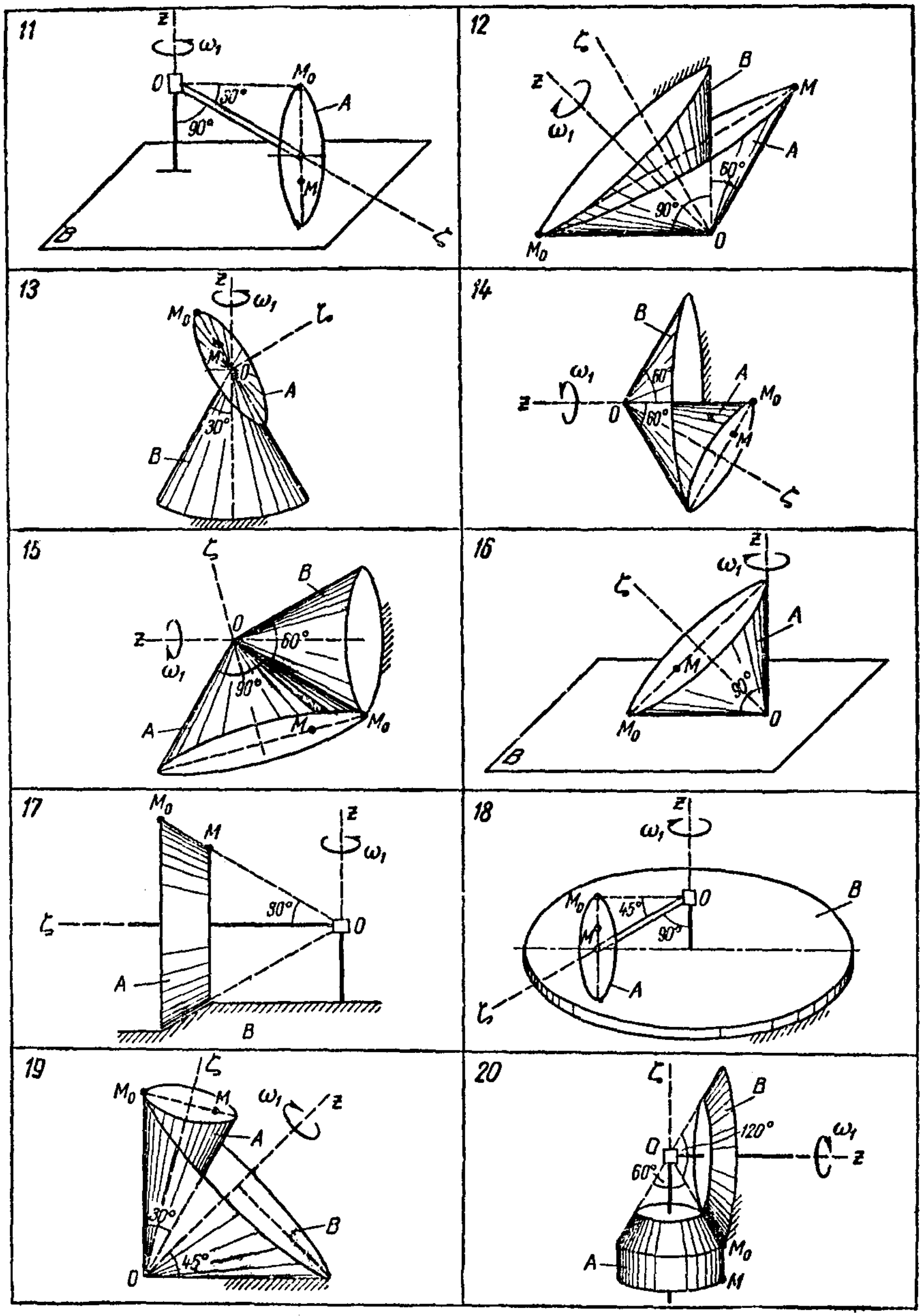

11
z
ω1
O
M0
30°
A
90°
M
ζ
B
12
ζ
B
z
M
ω1
A
60°
90°
M0
O
13
z
ω1
M0
ζ
M
O
A
30°
B
14
B
ω1
A
M0
60°
z
O
60°
M
ζ
15
ζ
B
O
z
60°
ω1
90°
A
M
M0
16
z
ω1
ζ
A
M
90°
M0
O
B
17
M0
z
M
ω1
90°
ζ
O
A
B
18
z
ω1
M0
45°
O
B
90°
M
A
ζ
19
ζ
M0
M
ω1
z
A
30°
B
45°
O
20
ζ
B
120°
ω1
O
z
60°
M0
A
M

Рис. 3.7

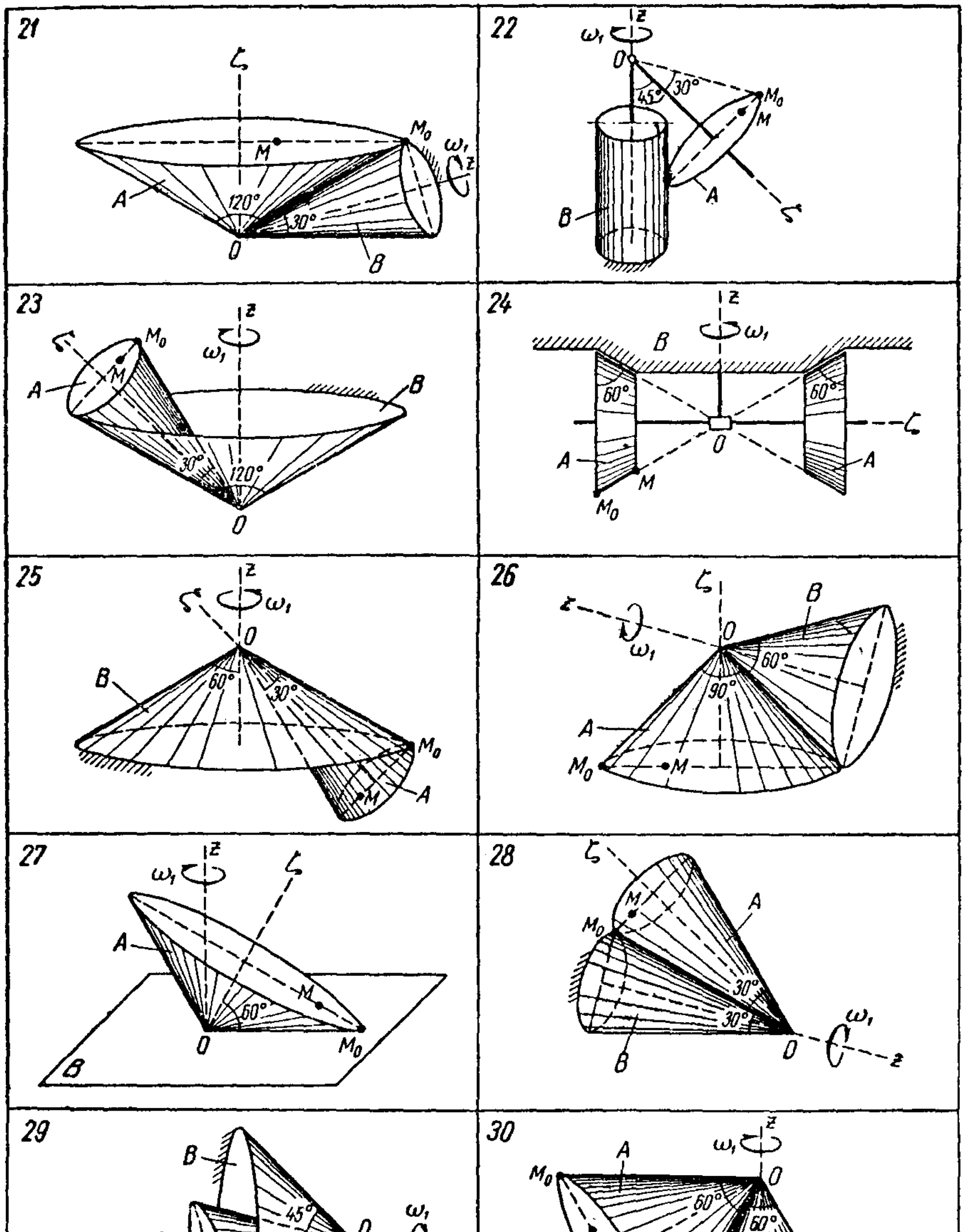

21
ζ
M
M0
ω1
z
A
120°
30°
0
B
22
z
ω1
0
30°
45°
M0
M
A
ζ
B
23
z
ω1
ζ
M0
M
A
B
30°
120°
0
24
z
ω1
B
60°
60°
ζ
0
A
A
M
M0
25
z
ω1
ζ
0
B
60°
30°
M0
M
A
26
ζ
B
z
ω1
0
60°
90°
A
M0
M
27
z
ω1
ζ
A
M
60°
0
M0
B
28
ζ
M
A
M0
30°
30°
ω1
B
0
z
29
B
45°
0
ω1
z
A
60°
ζ
M
M0
30
z
ω1
A
M0
0
60°
60°
M
ζ
B

Рис. 3.8

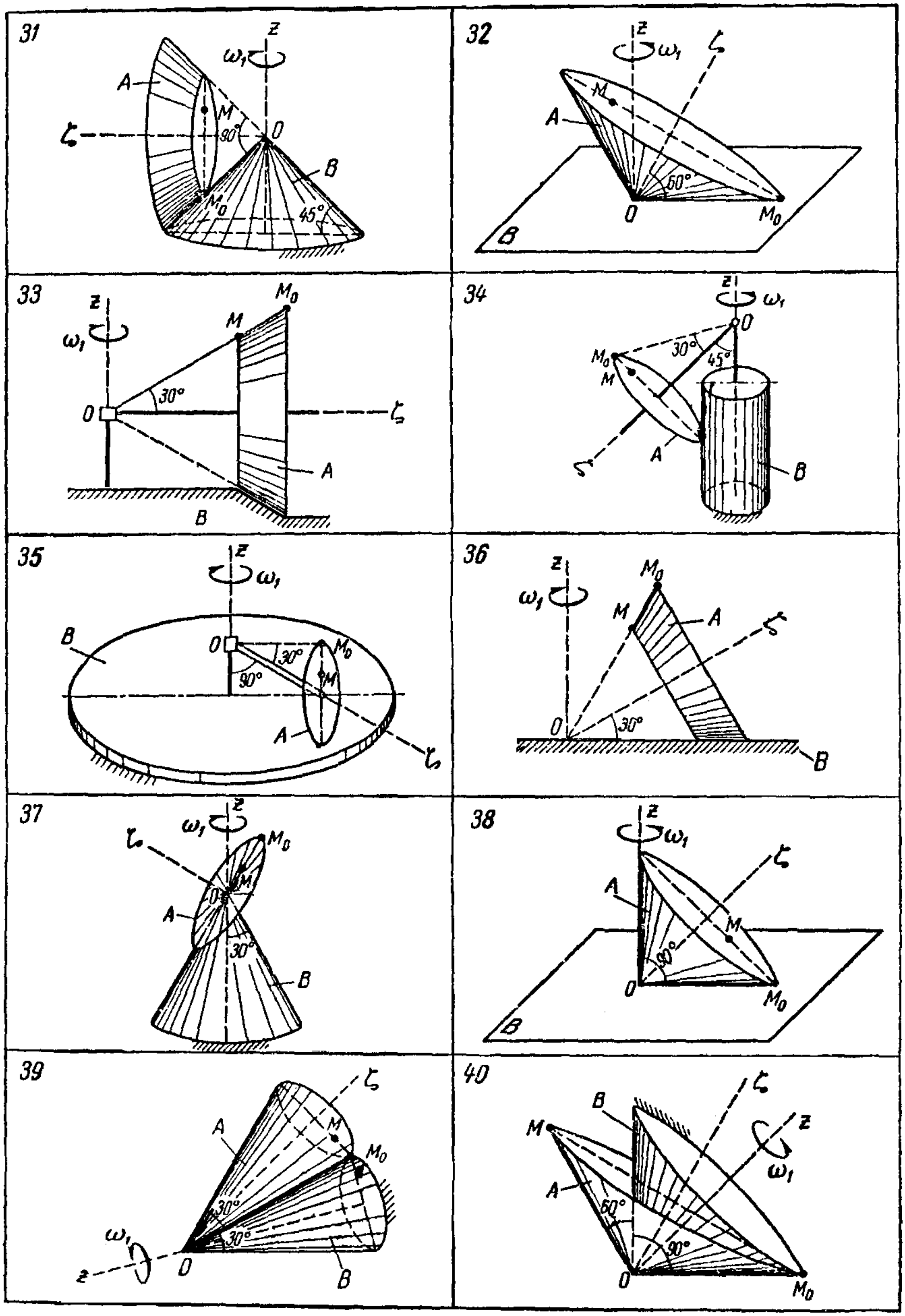

31
z
ω1
A
M
ζ
90°
O
B
M0
45°
32
z
ω1
ζ
M
A
60°
O
M0
B
33
z
ω1
M0
M
30°
O
ζ
A
B
34
z
ω1
O
M0
30°
45°
M
ζ
A
B
35
z
ω1
B
O
30°
M0
90°
M
A
ζ
36
z
ω1
M0
M
A
ζ
O
30°
B
37
ω1
z
M0
ζ
M
O
A
30°
B
38
z
ω1
ζ
A
M
90°
O
M0
B
39
ζ
A
M
M0
30°
30°
ω1
z
O
B
40
B
ζ
M
z
ω1
A
60°
90°
O
M0

Рис. 3.9

Приклад виконання завдання

Дано: 1) прямі круглі конуси A і B (рис. 3.10);

2) $\alpha = 60^\circ$; $\beta = 90^\circ$; $OM_0 = l = 30\,см$; $\omega_1 = 1{,}2\,c^{-1}$; $M_0M = 10\,см$.

Знайти: ω, ε, v_M, w_M.

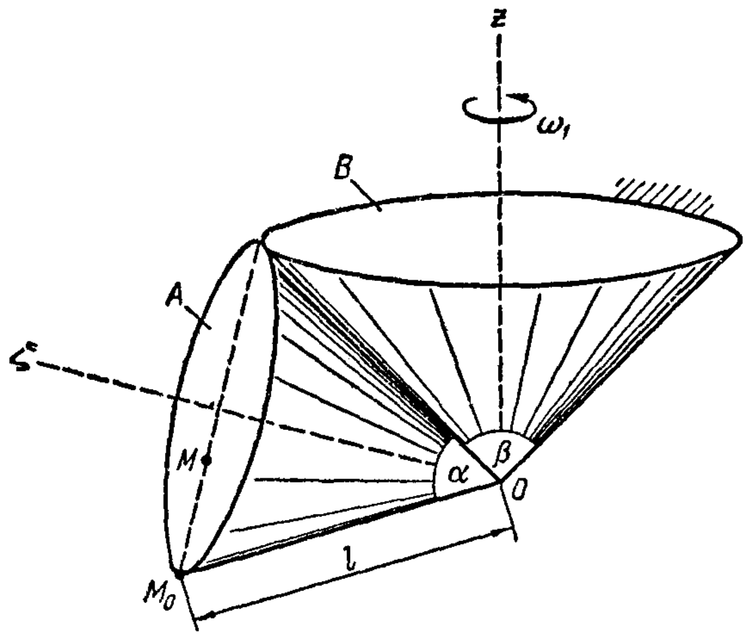


Рис. 3.10

Р о з в ’ я з а н н я

1. *Визначення кутової швидкості тіла*. Конус A здійснює сферичний рух, при якому миттєва вісь обертання $O\Omega$ співпадає з спільною твірною конусів (рис. 3.11). Швидкість v_C точки C є обертальною швидкістю навколо миттєвої осі. Відповідно, кутова швидкість конуса

$$\omega = \frac{v_C}{CK}.$$

З іншого боку, швидкість точки C, що описує коло радіусом CK_1, можна визначити за формулою

$$v_C = CK_1 \cdot \omega_1$$

Згідно рис. 3.11

$$CK_1 = l \cdot \cos 30^\circ \cdot \sin 75^\circ = 30 \cdot 0{,}866 \cdot 0{,}966 = 25{,}1\,см.$$

Тому

$$v_C = 25{,}1 \cdot 1{,}2 = 30{,}1\,см/с.$$

Так як

$$CK = l \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 60^\circ = 30 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}866 = 13{,}0\,см,$$

то

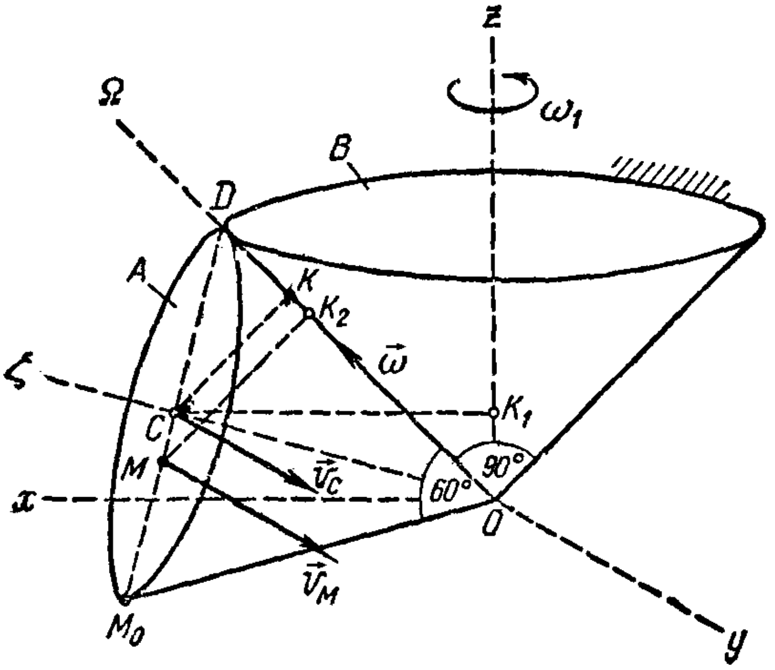


Рис. 3.11

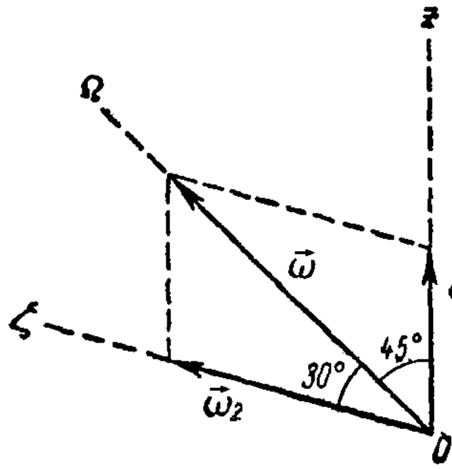


Рис. 3.12

$$\omega = \frac{30{,}1}{13} = 2{,}32\ c^{-1}.$$

Напрямок $\vec{\omega}$ визначається напрямком $\vec{v}_C$ (рис. 3.11).

Кутову швидкість конуса A можна знайти також шляхом додавання обертань навколо осей, які перетинаються, за допомогою побудови паралелограма кутових швидкостей (рис. 3.12).

Тут $\vec{\omega}_2$ – кутова швидкість конуса A при обертанні відносно власної осі $O\zeta$.

Згідно теореми синусів $\dfrac{\omega}{\sin 75^\circ} = \dfrac{\omega_1}{\sin 30^\circ}$, звідки

$$\omega = \omega_1 \frac{\sin 75^\circ}{\sin 30^\circ} = 1{,}2 \cdot \frac{0{,}966}{0{,}5} = 2{,}32\ c^{-1}.$$

2. *Визначення кутового прискорення тіла*. Кутове прискорення конуса A геометрично дорівнює швидкості $\vec{u}$ кінця вектора $\vec{\omega}$, який описує коло радіусом $\omega \cdot \sin 45^\circ$ навколо осі Oz (рис. 3.13):

$$u = \omega \cdot \sin 45^\circ \cdot \omega_1 = 2{,}32 \cdot 0{,}707 \cdot 1{,}2 = 1{,}97\ c^{-2}; \quad \varepsilon = u = 1{,}97\ c^{-2}.$$

Вектор $\vec{\varepsilon}$ прикладений в точці O і напрямлений перпендикулярно до площини $zO\zeta$. Отже, вісь кутового прискорення OE співпадає з віссю Oy.

3. *Визначення швидкості точки тіла*. Швидкість точки M визначаємо як обертальну швидкість навколо миттєвої осі.

$$v_M = MK_2 \cdot \omega = MD \cos 30^\circ \cdot \omega;$$

$$MD = 2l \cdot \sin 30^\circ - M_0M = 2 \cdot 30 \cdot 0{,}5 - 10 = 20\ см;$$

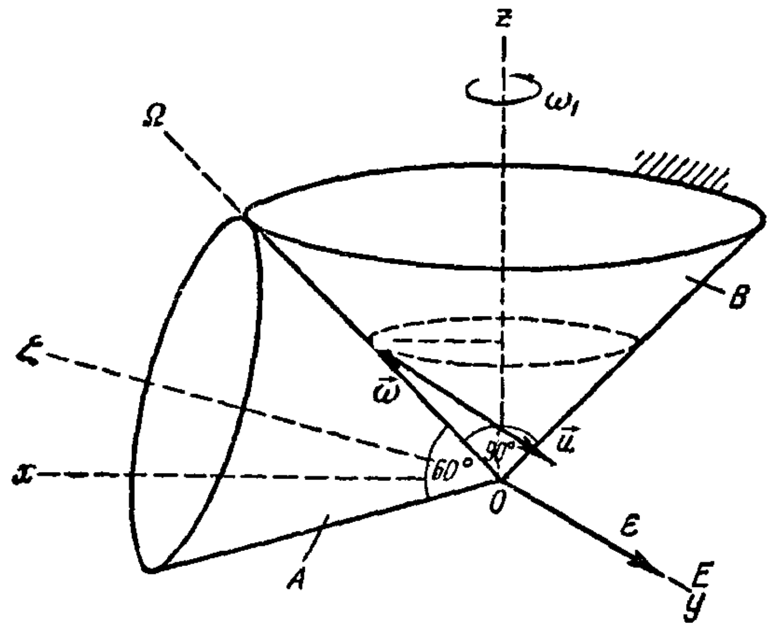


Рис. 3.13

$$v_M = 20 \cdot 0{,}866 \cdot 2{,}32 = 40{,}2 \ \ см/с .$$

Вектор $\vec{v}_M$ паралельний вектору $\vec{v}_C$ і має однаковий з ним напрямок (див. рис. 3.11).

4. *Визначення прискорення точки тіла*. Прискорення точки M знаходимо як геометричну суму доосьового і обертального прискорень:

$$\vec{w}_M = \vec{w}_M^{доос} + \vec{w}_M^{об} .$$

Доосьове прискорення напрямлене по перпендикуляру до миттєвої осі обертання (рис. 3.14):

$$w_M^{доос} = MK_2 \cdot \omega^2 = MD \cdot \cos 30^\circ \cdot \omega^2 = 20 \cdot 0{,}866 \cdot 2{,}32^2 = 93{,}3 \ \ см/с^2 .$$

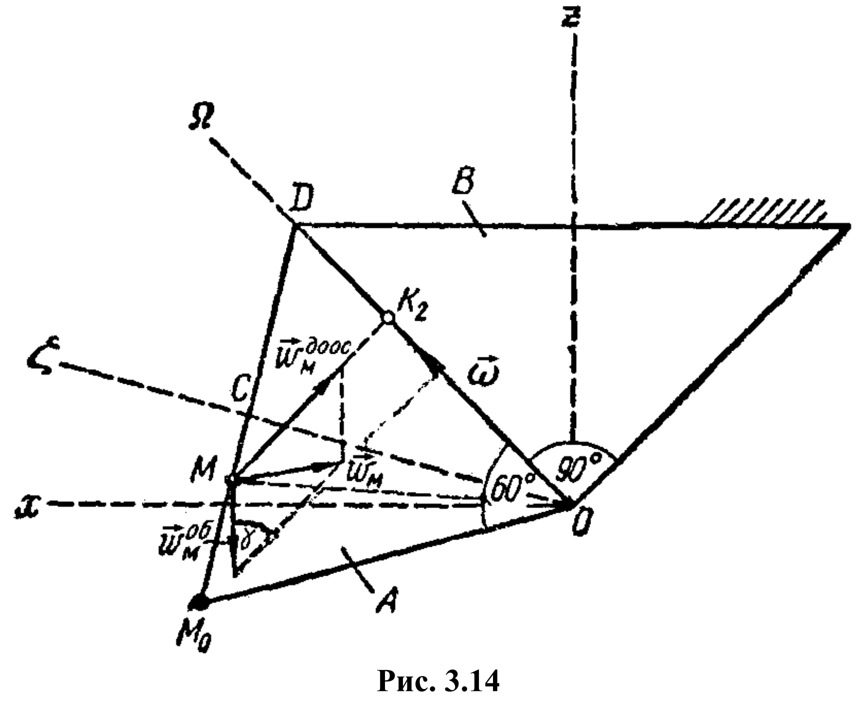


Рис. 3.14

Обертальне прискорення напрямлене перпендикулярно до OM в площині $zO\zeta$ (zOx), як показано на рис. 3.14,

$$w_M^{об} = OM \cdot \varepsilon ;$$

$$OM = \sqrt{l^2 + \left(M_0 M\right)^2 - 2l \cdot M_0 M \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{900 + 100 - 2 \cdot 30 \cdot 10 \cdot 0{,}5} = 26{,}5\ см;$$

$$w_M^{об} = 26{,}5 \cdot 1{,}97 = 52{,}2\ \ см/c^2 .$$

Обидві складові знаходяться в площині $zO\zeta$ $\left(zOx\right)$. Величину $\vec{w}_M$ знайдемо як діагональ паралелограма, побудованого на цих складових:

$$w_M = \sqrt{(w_M^{доос})^2 + (w_M^{об})^2 - 2 w_M^{доос} \cdot w_M^{об} \cdot \cos\gamma} ;$$

$$\cos\ \gamma = \cos\angle K_2 OM = \frac{l - MD \cdot \sin 30^\circ}{OM} = \frac{30 - 20 \cdot 0{,}5}{26{,}5} = 0{,}75 ;$$

$$w_M = \sqrt{93{,}3^2 + 52{,}2^2 - 2 \cdot 93{,}3 \cdot 52{,}2 \cdot 0{,}75} = \sqrt{4125} = 64{,}2\ \ \ см/c^2 .$$

РОЗДІЛ 4. АБСОЛЮТНИЙ РУХ ТОЧКИ

4.1. Основні означення. Абсолютна і відносна похідні вектора

В першому розділі ми досліджували основні характеристики руху точки по відношенню до заданої системи відліку. Однак в деяких випадках доцільно вивчати рух точки одночасно відносно двох систем координат, одна з яких здійснює заданий рух відносно іншої (основної), яку умовно приймають за нерухому.

Абсолютним (складним) рухом точки називається її рух відносно нерухомої системи координат.

Рух точки відносно рухомої системи координат називається відносним. Траєкторія, швидкість і прискорення точки, розглядувані відносно нерухомої і рухомої систем координат називаються відповідно абсолютними і відносними.

Переносним рухом називається рух рухомої системи відліку відносно нерухомої. Відповідно швидкості й прискорення точки, незмінно зв'язаної з рухомою системою координат, в якій у даний момент часу знаходиться рухома точка, називаються переносними.

Величини, що характеризують абсолютний рух точки, прийнято позначати індексом „*a*”, відносний рух – індексом „*r*”, а переносний – індексом „*e*”.

Встановлення зв'язку між абсолютним, відносним і переносним рухами дозволить розв'язувати різноманітні задачі з визначення кінематичних характеристик абсолютного руху.

В цьому розділі ми зустрінемося з необхідністю диференціювання вектора, визначеного в системі координат, яка може рухатися довільним чином. В зв'язку з цим ми введемо поняття *абсолютної* і *відносної* похідних вектора.

Нехай дано основну систему координат і рухому систему відліку, що здійснює довільний рух. Нехай деякий вектор $\vec{a} = \vec{a}(t)$ визначений в рухомій системі координат, тобто проекції цього вектора a_x, a_y, a_z на осі рухомої системи – задані функції часу. Якщо $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – одиничні вектори осей рухомої системи координат, то вектор $\vec{a}$ може бути представлений у вигляді

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}. \tag{4.1}$$

Встановимо тепер правило знаходження похідної в нерухомій системі відліку (абсолютної похідної) від цього вектора. Диференціюючи обидві частини рівності (4.1) за часом, матимемо на увазі, що вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$ і $\vec{k}$ внаслідок руху рухомої системи змінюють свій напрямок, тобто є функціями часу.

Таким чином, абсолютна похідна вектора $\vec{a}$ за часом буду рівна

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt}\vec{i} + \frac{da_y}{dt}\vec{j} + \frac{da_z}{dt}\vec{k} + a_x\frac{d\vec{i}}{dt} + a_y\frac{d\vec{j}}{dt} + a_z\frac{d\vec{k}}{dt}. \tag{4.2}$$

Сума перших трьох доданків являє собою похідну від вектора $\vec{a}$ в рухомій системі координат. Справді, якщо б ми поставили задачу вивчити зміну вектора

$\vec{a}$ тільки по відношенню до рухомої системи координат, то ми враховували би при цьому лише зміну проекції вектора на осі цієї системи координат. Рух же самої системи нас би не цікавив.

Назвемо суму перших трьох доданків в (4.2) відносною або локальною похідною і позначимо її через $\breve{d}\vec{a}/dt$, тобто

$$\frac{\breve{d}\vec{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt}\vec{i} + \frac{da_y}{dt}\vec{j} + \frac{da_z}{dt}\vec{k}\,. \tag{4.3}$$

Замінюючи в формулах (1.8) і (3.10) радіус-вектор $\vec{r}$ послідовно на $\vec{i}, \vec{j}$ і $\vec{k}$, отримаємо

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{i}, \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{j}, \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{k}.$$

Тому сума останніх трьох доданків в (4.2) може бути подана у вигляді

$$a_x\frac{d\vec{i}}{dt} + a_y\frac{d\vec{j}}{dt} + a_z\frac{d\vec{k}}{dt} = a_x(\vec{\omega}\times\vec{i}) + a_y(\vec{\omega}\times\vec{j}) + a_z(\vec{\omega}\times\vec{k}) =$$

$$= \vec{\omega}\times(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) = \vec{\omega}\times\vec{a}\,, \tag{4.4}$$

де $\vec{\omega}$ – кутова швидкість рухомої системи координат.

Отже,

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{\breve{d}\vec{a}}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{a}\,. \tag{4.5}$$

Таким чином*, абсолютна похідна вектора дорівнює сумі відносної похідної цього вектора і векторного добутку кутової швидкості рухомої системи на цей вектор*.

Дане твердження інколи ще називають *теоремою про абсолютну і локальну похідні*.

4.2. Теорема про додавання швидкостей

Якщо радіус-вектор $\vec{r} = \vec{r}(t)$ визначає положення точки *M* по відношенню до системи координат $Ox_1y_1z_1$, радіус-вектор $\vec{r}_A = \vec{r}_A(t)$ визначає положення початку системи координат *Axyz* в системі $Ox_1y_1z_1$, а радіус-вектор $\vec{\rho} = \vec{\rho}(t)$ визначає положення точки *M* в системі відліку *Axyz*, то у відповідності з рис. 4.1 маємо

$$\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{\rho}\,. \tag{4.6}$$

Нехай координати точки в рухомій системі координат будуть *x*, *y* і *z*; тоді

$$\vec{\rho} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\,,$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні вектори осей рухомої системи координат.

За означенням абсолютна похідна радіус-вектора за часом буде абсолютною швидкістю точки. Отже, диференціюючи рівність (4.6) за часом, знайдемо абсолютну швидкість точки

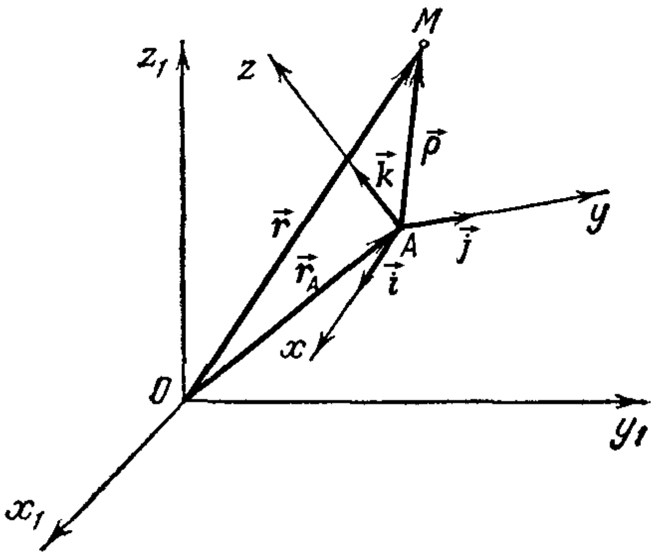


Рис. 4.1

$$\vec{v}_a = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt}. \quad (4.7)$$

Оскільки вектор $\vec{\rho}$ визначений в рухомій системі координат, то для знаходження абсолютної похідної від нього скористаємось формулою (4.5):

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{\breve{d}\vec{\rho}}{dt} + \vec{\omega}_e \times \vec{\rho}, \quad (4.8)$$

де $\vec{\omega}_e$ – кутова швидкість рухомої системи координат, а

$$\frac{\breve{d}\vec{\rho}}{dt} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

є відносною похідною від $\vec{\rho}$ за часом. Згідно означення це буде відносна швидкість точки, тобто

$$\vec{v}_r = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}. \quad (4.9)$$

Підставляючи вирази (4.8) і (4.9) в (4.7), отримаємо

$$\vec{v}_a = \vec{v}_A + \vec{\omega}_e \times \vec{\rho} + \vec{v}_r, \quad (4.10)$$

де $\vec{v}_A = d\vec{r}_A / dt$ – швидкість початку рухомої системи координат по відношенню до основної.

Для визначення переносної швидкості точки закріпимо її в рухомій системі координат, тобто покладемо в формулі (4.10) $\vec{v}_r = 0$, тоді одержимо

$$\vec{v}_e = \vec{v}_A + \vec{\omega}_e \times \vec{\rho}. \quad (4.11)$$

Таким чином, маємо

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r, \quad (4.12)$$

тобто *абсолютна швидкість точки при складному русі дорівнює векторній сумі відносної і переносної швидкостей*.

4.3. Теорема про додавання прискорень (теорема Коріоліса)

Для того, щоб знайти абсолютне прискорення точки, тобто її прискорення по відношенню до основної системи координат, продиференціюємо формулу (4.10) за часом:

$$\vec{w}_a = \frac{d\vec{v}_a}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt} + \frac{d\vec{\omega}_e}{dt} \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_e \times \frac{d\vec{\rho}}{dt} + \frac{d\vec{v}_r}{dt}. \quad (4.13)$$

Абсолютну похідну вектора відносної швидкості $\vec{v}_r$ знайдемо за формулою (4.5):

$$\frac{d\vec{v}_r}{dt} = \frac{\breve{d}\vec{v}_r}{dt} + \vec{\omega}_e \times \vec{v}_r. \quad (4.14)$$

В цьому співвідношенні $\breve{d}\vec{v}_r / dt$ є відносна похідна вектора $\vec{v}_r$ за часом і, отже, являє собою відносне прискорення $\vec{w}_r$, тобто прискорення точки відносно рухомої системи координат

$$\vec{w}_r = \frac{\breve{d}\vec{v}_r}{dt} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} . \qquad (4.15)$$

Використовуючи рівності (4.8), (4.9), (4.14) і (4.15), перетворимо формулу (4.13) до вигляду

$$\vec{w}_a = \vec{w}_A + \vec{\varepsilon}_e \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_e \times [\vec{v}_r + (\vec{\omega}_e \times \vec{\rho})] + \vec{w}_r + \vec{\omega}_e \times \vec{v}_r =$$
$$= \vec{w}_A + \vec{\varepsilon}_e \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{\rho}) + \vec{w}_r + 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r , \qquad (4.16)$$

де $\vec{w}_A = \dot{\vec{v}}_A$ – прискорення початку рухомої системи координат, а $\vec{\varepsilon}_e = \dot{\vec{\omega}}_e$ – її кутове прискорення.

Для того, щоб знайти переносне прискорення $\vec{w}_e$ (прискорення тієї точки рухомої системи координат, з якою в даний момент співпадає рухома точка), закріпимо точку в рухомій системі координат, тобто покладемо $\vec{v}_r = 0$, $\vec{w}_r = 0$.

В цьому випадку згідно формули (4.16) матимемо

$$\vec{w}_e = \vec{w}_A + \vec{\varepsilon}_e \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{\rho}) , \qquad (4.17)$$

тобто переносне прискорення являє собою прискорення точки вільного твердого тіла, з яким жорстко зв'язана рухома система координат. Таким чином, маємо

$$\vec{w}_a = \vec{w}_e + \vec{w}_r + 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r . \qquad (4.18)$$

Прискорення, яке визначається членом $2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$, називається *поворотним* або *коріолісовим* прискоренням і позначається $\vec{w}_c$, тобто

$$\vec{w}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r . \qquad (4.19)$$

Отже, маємо

$$\vec{w}_a = \vec{w}_e + \vec{w}_r + \vec{w}_c . \qquad (4.20)$$

Дана формула виражає зміст теореми Коріоліса: *абсолютне прискорення точки дорівнює геометричній сумі переносного, відносного і коріолісового прискорень.*

При використанні формули (4.20) слід мати на увазі, що переносне прискорення потрібно визначати за правилами прискорення точок твердого тіла. При знаходженні відносного прискорення рухому систему координат слід вважати нерухомою і використовувати правила, викладені в розділі 1.

Зупинимося дещо детальніше на коріолісовому прискоренні $\vec{w}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$. Модуль цього прискорення, очевидно, рівний

$$w_c = 2|\vec{\omega}_e||\vec{v}_r|\sin(\vec{\omega}_e, \vec{v}_r) . \qquad (4.21)$$

Напрямок коріолісового прискорення визначається напрямком векторного добутку векторів $\vec{\omega}_e$ і $\vec{v}_r$, тобто коріолісове прискорення буде напрямлене перпендикулярно площині, що проходить через вектори $\vec{\omega}_e$ і $\vec{v}_r$, в той бік, звідки найкоротший перехід від $\vec{\omega}_e$ до $\vec{v}_r$ видно як рух проти ходу годинникової стрілки (рис. 4.2). Якщо вектори $\vec{\omega}_e$ і $\vec{v}_r$ не лежать в одній площині, зручно буває

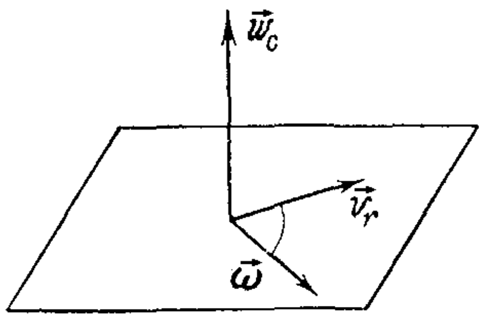


Рис. 4.2

подумки перенести вектор $\vec{\omega}_e$ паралельно самому собі в початок вектора швидкості $\vec{v}_r$ і застосувати вказане вище правило.

На основі формули (4.21) можна сказати, що коріолісове прискорення рівне нулю в наступних випадках:

1) $\vec{\omega}_e = 0$, це буле при поступальному переміщенні рухомої системи координат;

2) кутова швидкість $\vec{\omega}_e$ рухомої системи паралельна відносній швидкості $\vec{v}_r$;

3) в момент часу, коли відносна швидкість $\vec{v}_r$ точки дорівнює нулю.

Завдання для лабораторної роботи №4

За заданими рівняннями відносного руху точки M і переносного руху тіла D визначити для моменту часу $t = t_1$ абсолютну швидкість і абсолютне прискорення точки M.

Схеми механізмів показано на рис. 4.3-4.6, а необхідні для розрахунку дані наведено в табл. 4.1.

Т а б л и ц я 4.1

Номер варіанту (рис. 4.3-4.6)	Рівняння обертального руху тіла D $\varphi_e = f_1(t)$, *рад*	Рівняння відносного руху точки M $OM = \sigma_r = f_2(t)$, *см*	t_1,*с*	R, *см*	a, *см*	α, *град*
1	$2t^3 - t^2$	$18\sin\frac{\pi t}{4}$	2/3	—	25	—
2	$0{,}4t^2 + t$	$20\sin\pi t$	5/3	20	—	—
3	$0{,}5t^2 + 2t$	$6t^3$	2	—	30	—
4	$0{,}6t^2$	$10\sin\frac{\pi t}{6}$	1	—	—	60
5	$3t - 0{,}5t^3$	$40\pi\cos\frac{\pi t}{6}$	2	30	—	—
6	$0{,}5t^2 + 2t$	$150\pi t^2$	1/6	25	—	—
7	$0{,}5t^2$	$20\cos 2\pi t$	3/8	—	40	60
8	$t^3 - 5t$	$6(t + 0{,}5t^2)$	2	—	—	30

9	$1{,}6t^2+4t$	$10+10\sin 2\pi t$	1/8	—	—	—
10	$1{,}2t-t^2$	$20\pi\cos\frac{\pi t}{4}$	4/3	20	20	—
11	$2t^2-0{,}5t$	$10\sin\frac{\pi t}{6}$	4	—	25	—
12	$5t-4t^2$	$\frac{15}{8}\pi t^3$	2	30	30	—
13	$8t^2-3t$	$150\pi t^2$	1/3	40	—	—
14	$4t-2t^2$	$3+14\sin\pi t$	2/3	—	—	30
15	$0{,}2t^3+t$	$5\sqrt{2}(t+t^2)$	2		60	45
16	$t-0{,}5t^2$	$20\sin\pi t$	1/3	—	20	
17	$0{,}5t^2$	$8t^3+2t$	1	—	$4\sqrt{5}$	—
18	$8t-t^2$	t^3+10t	2	—		60
19	$t+3t^2$	$4t^3+6t$	2	40	—	—
20	$6t+t^2$	$30\pi\cos\frac{\pi t}{6}$	3	60	—	—
21	$2t-4t^2$	$25\pi(t+t^2)$	1/2	25	—	—
22	$4t-0{,}2t^2$	$10\pi\sin\frac{\pi t}{4}$	2/3	30	—	—
23	$2t-0{,}25t^2$	$3t^2+4t$	2	—	—	30
24	$2t-0{,}3t^2$	$75\pi(0{,}1t+0{,}3t^3)$	1	30	—	—
25	$10t-0{,}1t^2$	$15\sin\frac{\pi t}{3}$	5	—	—	—
26	$-2\pi t^2$	$8\cos\frac{\pi t}{2}$	3/2	—	—	45
27	$t-0{,}5t^3$	$10\sqrt{2}\pi\cos 2\pi t$	1/8	30	—	—
28	$t-0{,}5t^3$	$2{,}5\pi t^2$	2	40	—	—

29	$0{,}6t^2$	$6\sqrt{6}\sin\frac{\pi t}{16}$	4	36	—	30
30	$2t^2-3t$	$\frac{5\sqrt{3}}{3}t^3$	2	20	—	30
31	$6t+t^2$	$2t^3-4t^2$	3	—		60
32	$1{,}5t^2$	$20\sin\pi t$	3/4	—	50	60
33	t^2+2t	$4t^2$	1	40	—	30
34	$0{,}4t^2$	$8\sin\frac{\pi t}{12}$	2	—	—	45
35	$t+0{,}5t^2$	$1{,}7t^2+3t$	2	—	—	45
36	t^3+t^2	$10\cos\frac{\pi t}{4}$	1	—	35	—
37	$3t^3-t$	$4(2t+t^2)$	2		70	45
38	$3t-t^2$	$3+10\sin\frac{\pi t}{2}$	1/2	—	—	30
39	$0{,}5t^2-4t$	$120\pi t^2$	1/3	40	—	—
40	$t-3t^2$	$2\pi t^3$	3	108	40	—

Примітка. В варіантах 5, 6, 10, 12, 13, 20-22, 24, 27, 28, 39, 40 *OM* – дуга кола; для кожного варіанта положення точки *M* на схемі відповідає додатному значенню σ_r; на схемах 5, 10, 12, 21, 24, 27, 40 *OM* – дуга, яка відповідає меншому центральному куту.

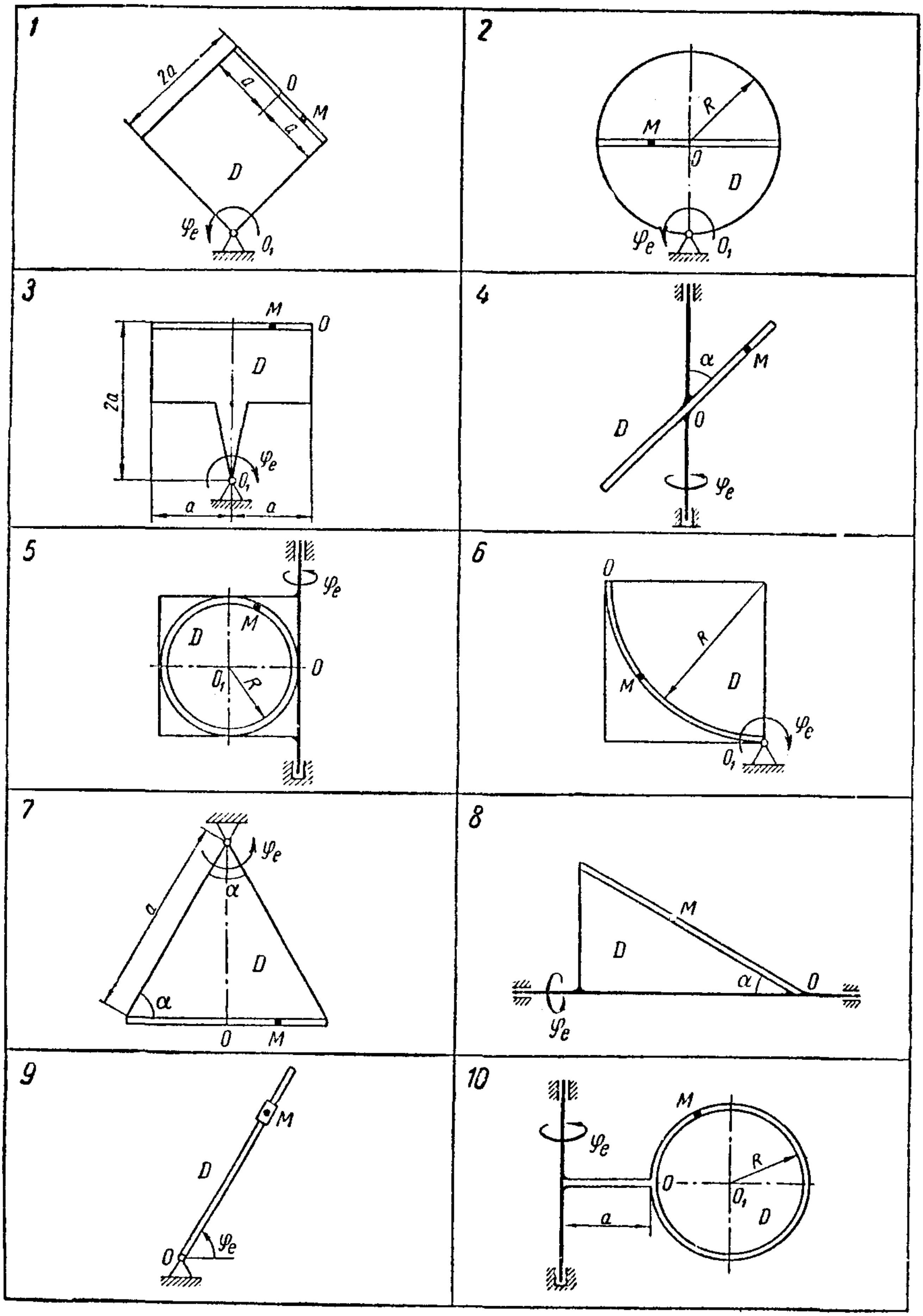

1
2a
a
a
O
M
D
φe
O1
2
R
M
O
D
φe
O1
3
M
O
D
2a
φe
O1
a
a
4
α
M
D
O
φe
5
φe
M
D
O
O1
R
6
O
R
M
D
φe
O1
7
φe
a
α
D
α
O
M
8
M
D
α
O
φe
9
M
D
φe
O
10
M
φe
R
O
O1
D
a

Рис. 4.3

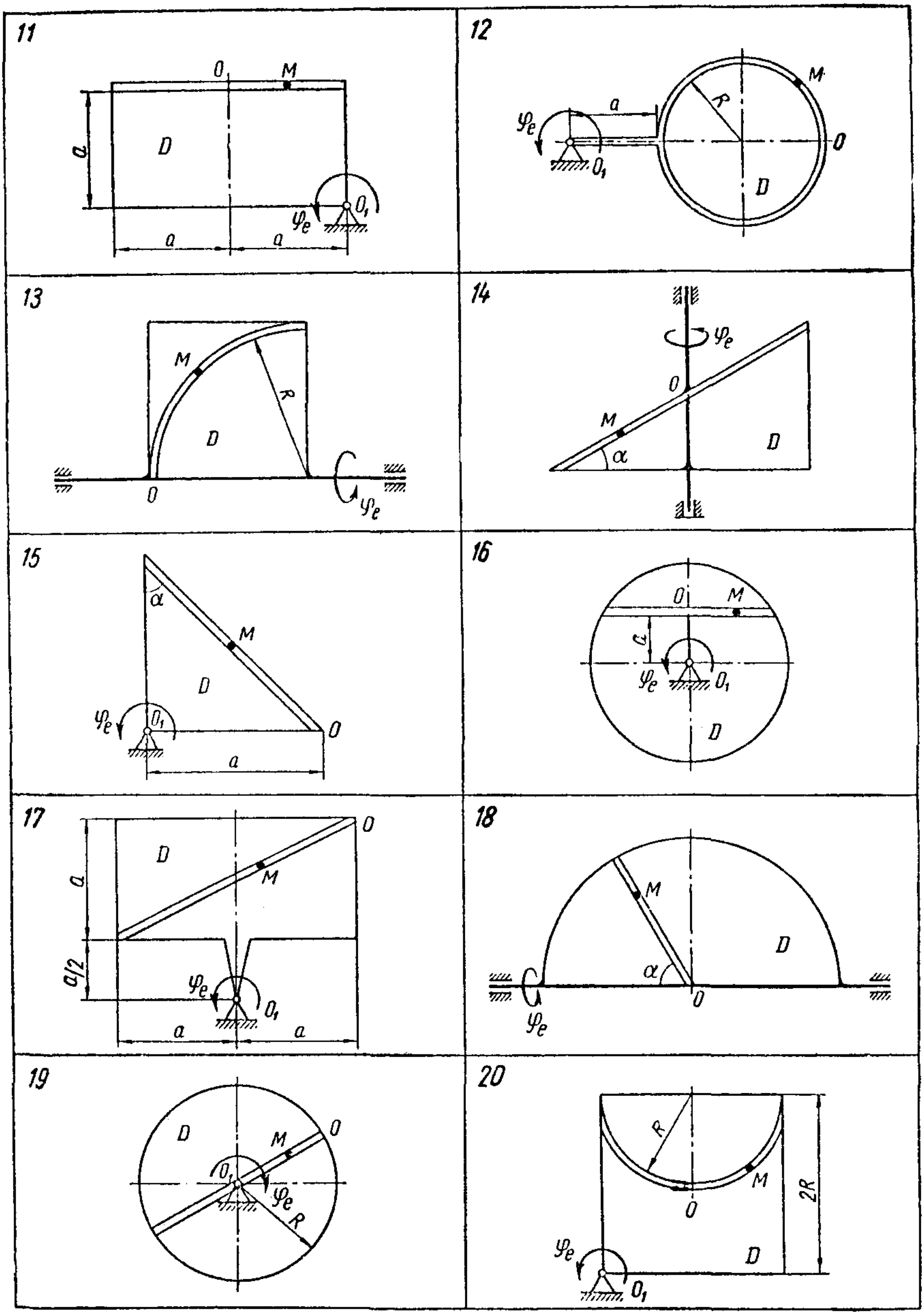

11
O
M
a
D
O1
φe
a
a
12
a
M
R
φe
O
O1
D
13
M
R
D
O
φe
14
φe
O
M
α
D
15
α
M
D
φe
O1
O
a
16
O
M
a
φe
O1
D
17
O
D
a
M
a/2
φe
O1
a
a
18
M
D
α
O
φe
19
D
M
O
O1
φe
R
20
R
M
2R
O
φe
D
O1

Рис. 4.4

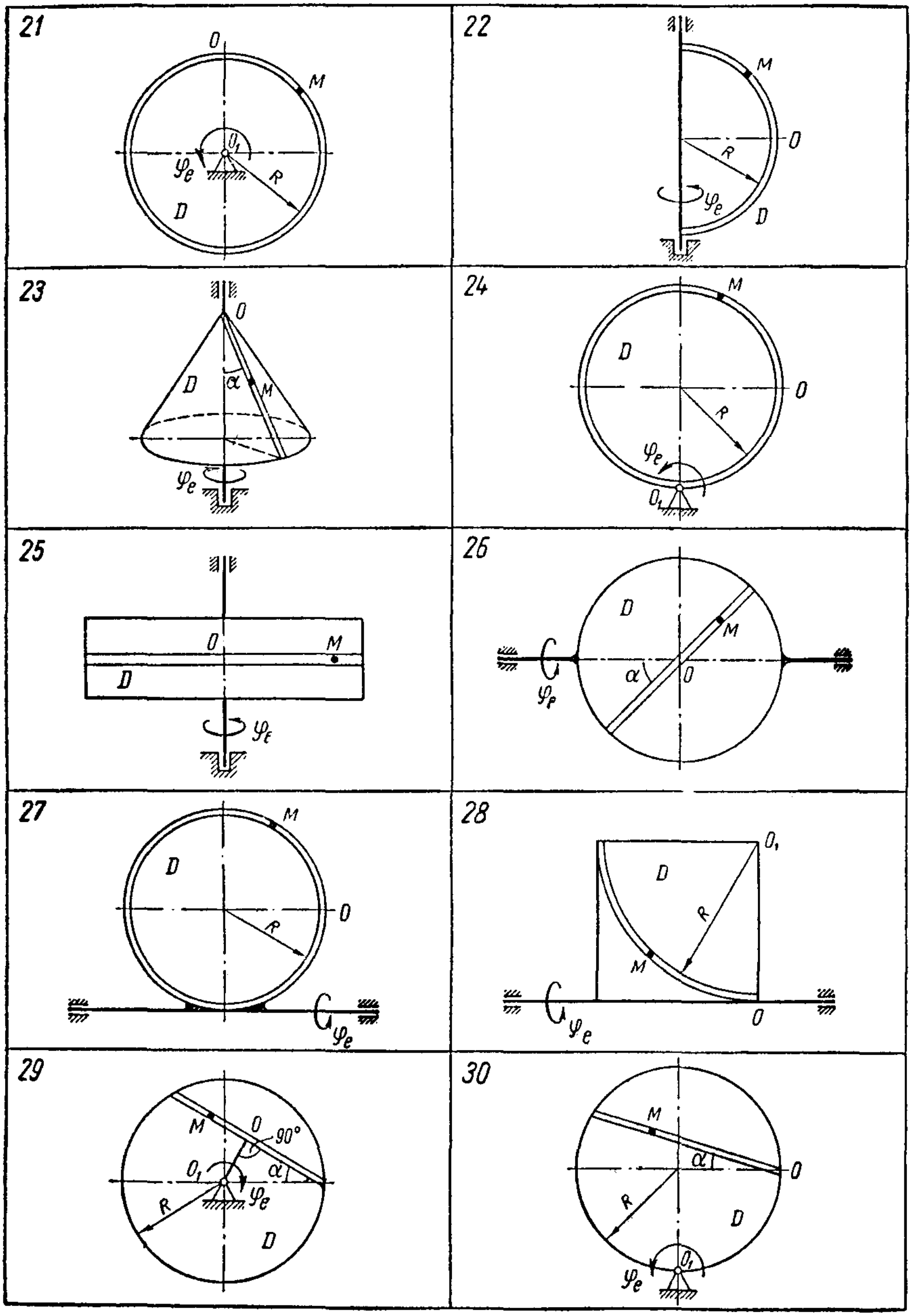

21
O
M
O1
φe
R
D
22
M
O
R
φe
D
23
O
D
α
M
φe
24
M
D
O
R
φe
O1
25
O
M
D
φe
26
D
M
α
O
φe
27
M
D
O
R
φe
28
O1
D
R
M
O
φe
29
M
O
90°
O1
α
φe
R
D
30
M
α
O
R
D
O1
φe

Рис. 4.5

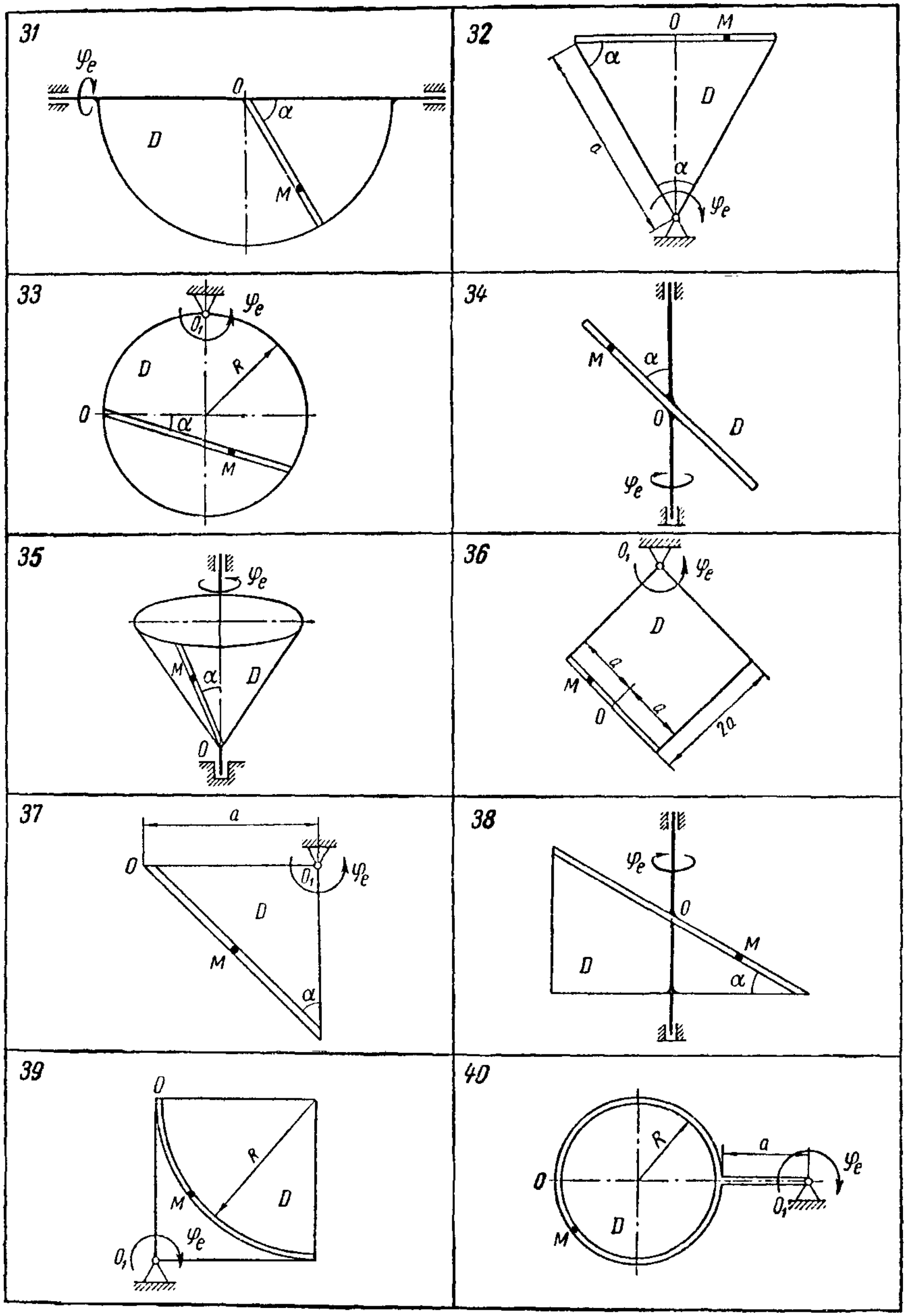


Рис. 4.6

Приклад виконання завдання

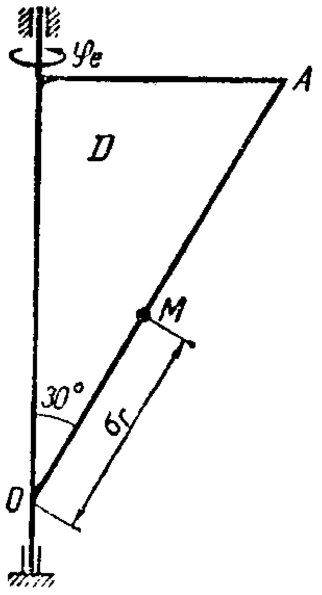


Рис. 4.7

Дано: 1) схема механізму (рис. 4.7),

2) $\varphi_e = 0{,}9t^2 - 9t^3\ рад$;

$\sigma_r = OM = 16 - 8\cos 3\pi t\ см$; $t_1 = 2/9\ с$.

Знайти: v, w.

Р о з в ' я з а н н я

Вважатимемо, що в розрахунковий момент часу площина рисунка співпадає з площиною трикутника D (рис. 4.8). Положення точки M на тілі D визначається відстанню $\sigma_r = OM$. При $t = 2/9\ с$

$$\sigma_r = 16 - 8\cos(3\pi\, 2/9) = 16 + 4 = 20{,}0\ см.$$

Абсолютну швидкість точки M знайдемо як геометричну суму відносної і переносної швидкостей

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_e.$$

Модуль відносної швидкості

$$v_r = |v_{r\tau}|;$$

$$v_{r\tau} = \frac{d\sigma_r}{dt} = 24\pi\sin 3\pi t.$$

При $t = 2/9\ с$

$$v_{r\tau} = 24\pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 65{,}2\ см/с.$$

Додатній знак біля величини $v_{r\tau}$ показує, що вектор $\vec{v}_r$ напрямлений в бік зростання σ_r.

Відповідно модуль відносної швидкості

$$v_r = 65{,}2\ см/с.$$

Модуль переносної швидкості

$$v_e = R|\omega_e|,$$

де R – радіус кола L, що описує та точка тіла, з якою в даний момент співпадає точка M,

$$R = \sigma_r \sin 30^\circ = 20 \cdot 0{,}5 = 10{,}0\ \text{см};$$

$|\omega_e|$ – модуль кутової швидкості тіла,

$$\omega_e = \frac{d\varphi_e}{dt} = 1{,}8t - 27t^2\ (c^{-1}).$$

При $t = 2/9\ с$

$$\omega_e = 1{,}8\frac{2}{9} - 27\frac{4}{81} = -0{,}93\ c^{-1},\quad |\omega_e| = 0{,}93\ c^{-1}.$$

Від'ємний знак біля величини ω_e показує, що обертання трикутника відбувається навколо осі Oz в протилежний бік до напрямку відрахування кута φ_e. Тому вектор $\vec{\omega}_e$ напрямлений по осі Oz вниз (рис. 4.8, *а*).

Переносна швидкість

$$v_e = 10 \cdot 0{,}93 = 9{,}3\ \text{см/с}.$$

Вектор $\vec{v}_e$ напрямлений по дотичній до кола L в бік обертання тіла. Так як $\vec{v}_e$ і $\vec{v}_r$ взаємноперпендикулярні, модуль абсолютної швидкості точки M

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} = \sqrt{9{,}3^2 + 65{,}2^2} = 65{,}9\ \text{см/с}.$$

Абсолютне прискорення точки дорівнює геометричній сумі відносного, переносного та коріолісового прискорень:

$$\vec{w} = \vec{w}_r + \vec{w}_e + \vec{w}_c$$

або в розгорнутому вигляді

$$\vec{w} = \vec{w}_{r\tau} + \vec{w}_{rn} + \vec{w}_e^{об} + \vec{w}_e^{доос} + \vec{w}_c.$$

Відносне дотичне прискорення

$$w_{r\tau} = \frac{d^2\sigma_r}{dt^2} = 72\pi^2 \cos 3\pi t.$$

При $t = 2/9\, c$

$$w_{r\tau} = -36\pi^2 = -355\ \text{см}/c^2;\ |w_{r\tau}| = 355\,\text{см}/c^2.$$

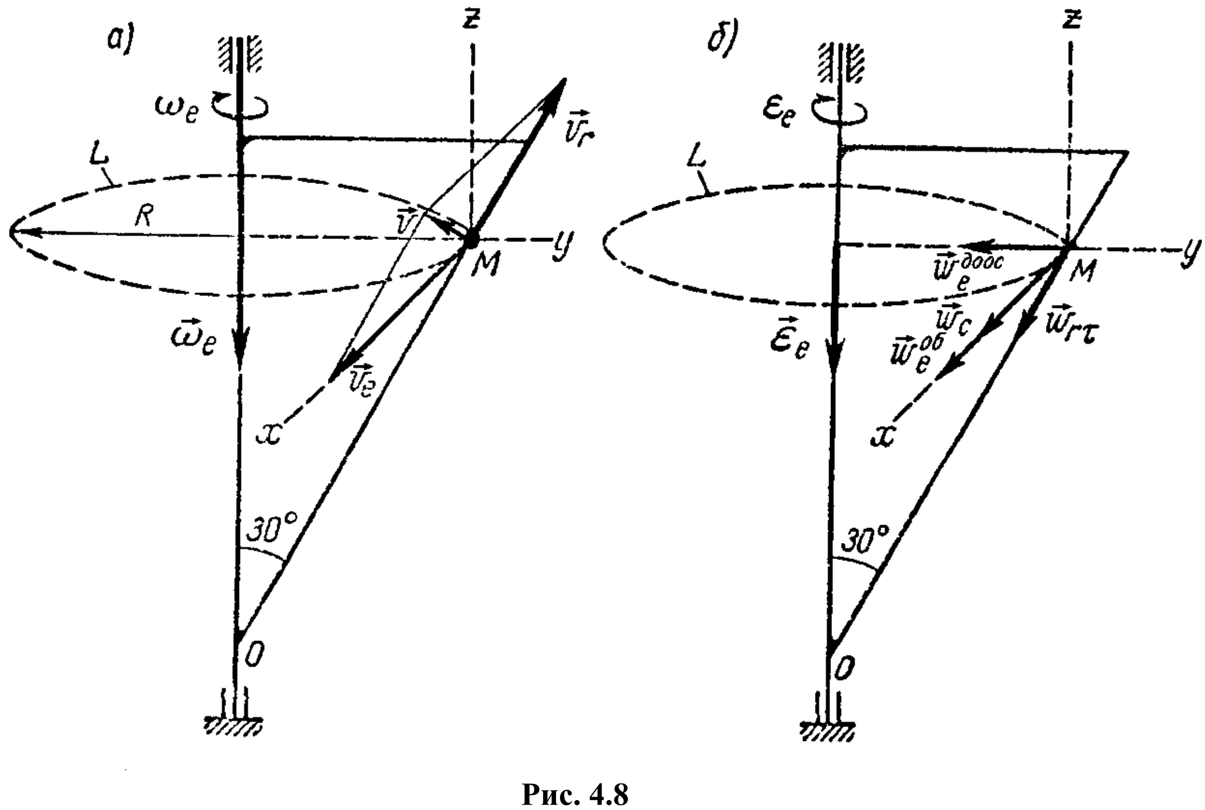


Рис. 4.8

Від'ємний знак $w_{r\tau}$ показує, що вектор $\vec{w}_{r\tau}$ напрямлений в бік від'ємних значень σ_r.

Відносне нормальне прискорення

$$w_{rn} = \frac{v_r^2}{\rho} = 0,$$

так як траєкторія відносного руху – пряма ($\rho = \infty$).

Модуль переносного обертального прискорення

$$w_e^{об} = R\left|\varepsilon_e\right|,$$

де $\left|\varepsilon_e\right|$ – модуль кутового прискорення тіла D;

$$\varepsilon_e = \frac{d^2\varphi_e}{dt^2} = 1{,}8 - 54t.$$

При $t = 2/9\,c$

$$\varepsilon_e = 1{,}8 - 54\frac{2}{9} = -10{,}2\ c^{-2};\ \left|\varepsilon_e\right| = 10{,}2\ c^{-2}.$$

Однакові знаки у величин ε_e і ω_e вказують на те, що обертання трикутника D прискорене; напрямки векторів $\vec{\omega}_e$ і $\vec{\varepsilon}_e$ співпадають (див. рис. 4.8).

$$w_e^{об} = 10 \cdot 10{,}2 = 102\ см/c^2.$$

Вектор $\vec{w}_e^{об}$ напрямлений в той же бік, що і вектор $\vec{v}_e$.

Модуль переносного доосьового прискорення

$$w_e^{доос} = R\omega_e^2 = 10 \cdot 0{,}93^2 = 8{,}7 \approx 9\ см/c^2.$$

Вектор $\vec{w}_e^{доос}$ напрямлений до центра кола L.

Прискорення Коріоліса

$$\vec{w}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r.$$

Модуль коріолісового прискорення

$$w_c = 2\left|\omega_e\right| v_r \sin(\vec{\omega}_e, \vec{v}_r).$$

Так як

$$\sin(\vec{\omega}_e, \vec{v}_r) = \sin 150^\circ = 0{,}5,$$

то

$$w_c = 2 \cdot 0{,}93 \cdot 65{,}2 \cdot 0{,}5 = 61\ см/c^2.$$

У відповідності з правилом векторного добутку вектор $\vec{w}_c$ напрямлений перпендикулярно до площини трикутника в той же бік, що і вектори $\vec{v}_e$ і $\vec{w}_{\mathring{a}}^{\hat{\imath}\acute{a}}$ (див. рис. 4.8, *б*).

Модуль абсолютного прискорення точки M знаходимо за допомогою проекцій:

$$w_x = w_e^{об} + w_c = 102 + 61 = 163\ см/c^2;$$

$$w_y = -w_e^{доос} - w_{r\tau}\cos 60^\circ = -9 - 355 \cdot 0{,}5 = -186\ см/c^2;$$

$$w_z = -w_{r\tau}\cos 30^\circ = -355\frac{\sqrt{3}}{2} = -308\ \ см/с^2\ ;$$

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2} = 395\ \ см/с^2\ .$$

Результати обчислень наведено в таблиці:

Т а б л и ц я 4.2

ω_e, c^{-1}	Швидкість $см/с^2$			ε_e, c^{-1}	Прискорення, $см/с^2$								
	v_e	v_r	v		$w_e^{доос}$	$w_e^{об}$	$w_{r\tau}$	w_{rn}	w_c	w_x	w_y	w_z	w
–0,93	9,3	65,2	65,9	–10,2	9	102	–355	0	61	163	–186	–308	395

ЛІТЕРАТУРА

1. *Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Д.* Курс теоретической механики: в 2 Т. – М.: Наука, 1998. – 736 с.
2. *Бухгольц Н.Н.* Основной курс теоретической механики. Т. 1. – М.: Наука, 1972.– 362 с.
3. *Кільчевський М.О.* Курс теоретичної механіки. Т. 1. – К.: Вища школа, 1972. – 376 с.
4. *Лойцянский Л.Г., Лурье А.И.* Курс теоретической механики. Т.1. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
5. *Мещерский И.В.* Сборник задач по теоретической механике. – М.: Наука, 1981. – 480 с.
6. *Никитин Н.Н.* Курс теоретической механики. – М.: Наука, 1990. – 607 с.
7. *Павловський М.А.* Теоретична механіка. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
8. *Путята Т.В., Фрадлін Б.Н.* Методика розв’язання задач з теоретичної механіки. – К.: Радянська школа, 1962. – 366 с.
9. *Старжинский В.М.* Теоретическая механика. – М.: Наука, 1980. – 464 с.
10. *Тарг С.М.* Краткий курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1986. – 486 с.
11. *Токар А.М.* Теоретична механіка. Кінематика (методи і задачі). – К.: Либідь, 2001. – 416 с.
12. *Яблонский А.А. и др.* Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. – М.: Высшая школа, 1972. – 432 с.

Підписано до друку Формат 60х84/16. Умовн. друк. арк.

Облік.-вид. арк. Друк офсетний. Зам. № Наклад

Видавництво УжНУ «Говерла»
м. Ужгород, вул. Капітульна, 18.

*Свідоцтво про внесення до державного реєстру видавців, виготовників і розповсюджувачів видавничої продукції – **Серія 3т №32***