УДК 519.8

А. Ю. Брила (Ужгородський нац. ун-т),
П. П. Антосяк (Ужгородський нац. ун-т)

ДОСЯЖНІСТЬ НЕЧІТКИХ АЛЬТЕРНАТИВНИХ ЗАЛЕЖНИХ ЦІЛЕЙ У ЗАДАНІЙ СУБОРДИНАЦІЇ СТРОГОГО РАНЖУВАННЯ

The decision-making problem with fuzzy goals are considered. Such problems, for example, are in the case of decision-making based on the opinions of several experts who formulate the estimation not clearly. Goals are ranking by importance, i.e. the strict subordination ranking on set of corresponding membership functions are defined. The set of allowed solutions (alternatives) is a subset of the integer numbers. For each of the membership functions defined the minimum value at which criterion is acceptable. It is required to find an optimal solution of the problem considering only acceptable criteria.
Based on the properties of the considered problem is proposed to reduce this decision-making problem which is the lexicographic optimization problem with alternative criteria to the one criterion optimization problem with objective function, which is a positive linear convolution of partial criteria. This method allows to reduce the optimization problem with vector criterion function to an optimization problem with scalar objective function, which allows to apply known methods for its solve. The proved theorem, justifying that ability. The cases with different kinds of membership functions are considered, and for each of them the corresponding rules for calculating of the coefficients of positive linear convolution are described. Also the modification of scalar scheme for solving lexicographic problem with alternative criteria is proposed.

Розглядається задача прийняття рішень із нечітко визначеними цілями, які упорядковано за важливістю і для них визначено умови допустимості та залежності від допустимості цілей вищого рангу. Для розв'язання даної задачі запропоновано модифікацію схеми скаляризації та підхід, що ґрунтується на зведенні її до задачі однокритеріальної оптимізації, цільова функція у якій є скалярною згорткою критеріїв часткових критеріїв.

Вступ. Переважна більшість задач прийняття рішень є задачами з нечітко заданими критеріями на підмножині універсальної множини альтернатив, яка у загальному випадку також нечітка. На даний момент розроблено багато підходів до розв'язання багатокритеріальних задач прийняття рішень [1]. Так у [2] запропоновано підхід до розв'язання задачі прийняття рішень із нечіткими цілями (підхід Белмана-Заде) для випадку рівноважливих нечітких цілей та випадку, коли відомі коефіцієнти відносної важливості ступеню належності до множини альтернатив і відносної важливості цілей. У [3] запропоновано підхід розв'язання задач лексикографічної оптимізації з нечітко заданими цілями шляхом зведення її до задачі однокритеріальної оптимізації з цільовою функцією, яка є додатною згорткою критеріїв.

У даній статті розглядається задача прийняття рішень, у якій експертів упорядковано за важливістю і для кожного експерта визначається мінімальне допустиме значення функції оцінок, при якому думка експерта враховується. Також для деяких експертів може бути накладено додаткову умову залежності, від інших експертів вищого рангу. Для розв'язання даної задачі запропоновано підхід, що ґрунтується на зведенні її до задачі однокритеріальної оптимізації з використанням функціоналу, що наводить лексикографічний порядок віддачі переваги на множині альтернатив.

Постановка задачі. Нехай X $(X \subset Z)$ – універсальна множина альтернатив (розв'язків). Нечіткими цілями можуть бути нечіткі підмножини X типу:

1) «величина x повинна бути приблизно в межах від b до c»;

2) «величина x повинна бути близькою до b»;

3) «величина x не повинна бути більшою за b»;

4) «величина x не повинна бути меншою за b».

Кожна нечітка ціль подається відповідною функцією належності ([4])

$$\mu_i(x),\ i = 1, 2, ..., q, \text{ де } 0 \le \mu_i(x) \le 1,\ i = 1, 2, ..., q.$$

Нечіткі цілі упорядковано за важливістю, тобто на множині відповідних функцій належностей задано субординацію строгого ранжування $Rg(1, 2, ..., q)$. Позначимо κ^L критерій, що є векторною згорткою критеріїв $\mu_i, i = 1, 2, ..., q$ у субординації $Rg(1, 2, ..., q)$ з векторною цільовою функцією

$$F(x) = (\mu_1(x), \mu_2(x), ..., \mu_q(x)).$$

Задача знаходження непокращуваного розв'язку у заданій субординації строгого ранжування є задачею лексикографічної оптимізації [5]

$$\max{}^L F(x),\ x \in X. \qquad (1)$$

На основі задачі (1) побудуємо задачу лексикографічної оптимізації, у якій розглядаються тільки ті нечітко задані цілі , для яких у оптимальному розв'язку x^* цієї задачі виконуватиметься нерівність (умова допустимості)

$$\mu_i(x^*) \ge m_i, \qquad (2)$$

де $0 \le m_i \le 1,\ i = 1, 2, ..., q$ – деякі задані наперед константи. Іншими словами, якщо для деякого $\mu_l(x)$ у оптимальному розв'язку x^*

$$\mu_l(x^*) < m_l,$$

то $\mu_l(x)$ має бути виключено з розгляду, і рішення повинно прийматись ґрунтуючись на цілях з меншим значенням рангу для яких виконується умова (2). Цілі, для яких виконується умова допустимості (2) називають допустимими. Задачу лексикографічної оптимізації (1) із додатковими умовами допустимості (2) називають задачею з альтернативними критеріями [5]

$$\max{}^L \tilde{F}(x),\ x \in X, \qquad (3)$$

де

$$\tilde{F}(x) = (\mu_{j_1}(x), \mu_{j_2}(x), ..., \mu_{j_k}(x)), k \le q,$$
$$\{j_1, j_2, ..., j_k\} \subset \{1, 2, ..., q\}, j_1 < j_2 < ... < j_k,$$
$$\mu_{j_i}(x^*) \ge m_i, i = 1, 2, ..., k.$$

Розглянемо випадок, коли у задачі лексикографічної оптимізації з альтернативними критеріями для допустимості критерію $\mu_i(x),\ i \in \{1, 2, ..., q\}$, крім виконання умови (2), додатково вимагається, щоб така умова виконувалась хоча б для одного із критеріїв $\mu_j(x), j \in G_i \subset \{1, 2, ..., q\}$. Задачу знаходження оптимального розв'язку в залежності від вибору $p(p>1)$ допустимих критеріїв якнайвищого рангу

$$\max{}^{L}\hat{F}\left(x\right),\, x\in X, \tag{3'}$$

де

$$\tilde{F}\left(x\right)=\left(\mu_{j_1}\left(x\right),\mu_{j_2}\left(x\right),...,\mu_{j_k}\left(x\right)\right),k\leq q,$$
$$D=\{j_1,j_2,...,j_k\}\subset\{1,2,...,q\},j_1<j_2<...<j_k,$$
$$\mu_{j_i}\left(x^*\right)\geq m_i,\ G_{j_i}\bigcap D\neq\emptyset,i=1,2,...,k.$$

назвемо задачею лексикографічної оптимізації з альтернативними залежними критеріями.

Позначимо X^* множину оптимальних розв'язків задачі (3').

Для розв'язання задачі (3') у роботі розглянуто модифікацію схеми скаляризації та підхід, що ґрунтується на зведенні її до задачі однокритеріальної оптимізації використовуючи функціонал, що представляє лексикографічний порядок віддачі переваги на множині альтернатив.

Модифікована схема скаляризації розв'язання задачі лексикографічної оптимізації з альтернативними залежними цілями (3'). Одним із підходів до розв'язання задачі лексикографічної оптимізації (1) є схема скаляризації [6]. Розглянемо модифікацію схеми скаляризації, що може бути використана для розв'язання задачі лексикографічної оптимізації з альтернативними залежними критеріями.

Покладаємо $X_1 = X,\ D=\emptyset$.

1-й крок. Знаходимо оптимальний розв'язок задачі однокритеріальної оптимізації

$$\mu_1^* = \max_{x\in X_1}\mu_1(x). \tag{4}$$

Позначимо $X_1^*=\{x\in X|\mu_1(x)=\mu_1^*\}$ множину оптимальних розв'язків задачі (4). Якщо $\mu_1^*<m_1$, то покладаємо $X_2=X$ і переходимо до кроку 2. Якщо ж $\mu_1^*\geq m_1$ і X_1^* містить тільки одну альтернативу, то $X^*=X_1^*$. В іншому випадку покладаємо $X_2=X_1^*,\ D=\{1\}$ і переходимо до 2-го кроку.

2-й крок. Знаходимо оптимальний розв'язок задачі однокритеріальної оптимізації

$$\mu_2^* = \max_{x\in X_2}\mu_2(x). \tag{5}$$

Позначимо $X_2^*=\{x\in X_2|\mu_2(x)=\mu_2^*\}$ множину оптимальних розв'язків задачі (5). Якщо $\mu_2^*<m_2$ або $G_2\neq\emptyset$ і $G_2\bigcap D=\emptyset$, то покладаємо $X_3=X_2$ і переходимо до кроку 3. Якщо ж $\mu_2^*\geq m_2$ і або $G_2=\emptyset$ або $G_2\neq\emptyset$ і $G_2\bigcap D\neq\emptyset$ і X_2^* містить тільки одну альтернативу, то $X^*=X_2^*$. В іншому випадку покладаємо $X_3=X_2^*$, $D=D\bigcup\{2\}$ і переходимо до 3-го кроку.

q-й крок. Знаходимо оптимальний розв'язок задачі однокритеріальної оптимізації

$$\mu_q^* = \max_{x\in X_q}\mu_q(x). \tag{6}$$

Позначимо $X_q^*=\left\{x\in X_q|\mu_q(x)=\mu_q^*\right\}$ множину оптимальних розв'язків задачі (6). Якщо $\mu_q^*<m_q$, або $G_q\neq\emptyset$ і $G_q\bigcap D=\emptyset$ то $X^*=X_q$. В іншому випадку – $X^*=X_q^*$.

Досяжність оптимальних розв'язків задачі (3'). Спочатку дослідимо випадок, коли для кожної із функцій належностей

$$\mu_i\left(x\right) \in \left\{0,1\right\}, \ x \in X, \, i \in \left\{1,2,...,q\right\}. \tag{7}$$

Графічно такі функції виглядають так:

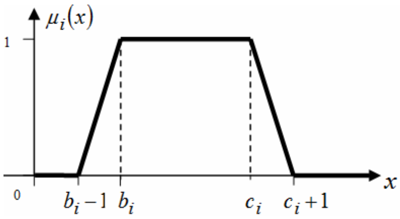

Рис. 1. «Величина x повинна бути приблизно в межах від b до c»

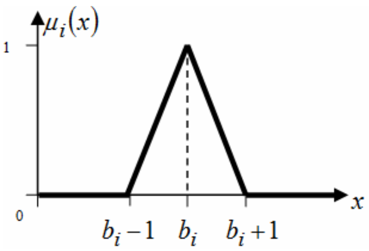

Рис. 2. «Величина x повинна бути близькою до b»

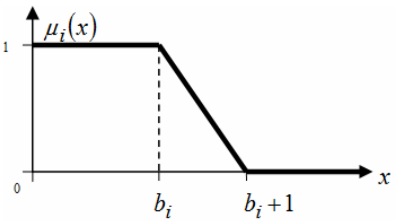

Рис. 3. «Величина x не повинна бути більшою за b»

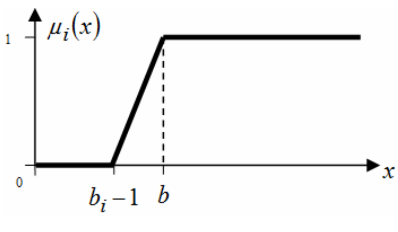

Рис. 4. «Величина x не повинна бути меншою за b»

Будемо вважати, що параметри b_i, c_i, $i = 1, 2, ..., q$ є цілочисловими.

У [3] вказано спосіб знаходження додатних коефіцієнтів $\bar{\alpha}_i, i = 1, 2, ..., q$, таких, що функціонал $L\left(x\right) = \sum_{i=1}^{q} \bar{\alpha}_i \mu_i\left(x\right)$ представляє лексикографічний порядок віддачі переваги на множині X. При цьому коефіцієнт $\bar{\alpha}_q > 0$ вибрано довільним чином, а інші додатні коефіцієнти вибрано згідно умови

$$\bar{\alpha}_i > \sum_{l=i+1}^{q} \bar{\alpha}_l, \ i = q-1, q-2, ..., 1. \tag{8}$$

Особливістю такого функціоналу є те, що розв'язок задачі

$$\max L\left(x\right),\ x \in X \tag{9}$$

є розв'язком задачі лексикографічної оптимізації (1) [3].

Якщо розв'язок багатокритеріальної задачі оптимізації може бути отриманий як розв'язок відповідної однокритеріальної задачі, з цільовою функцією, яка є лінійною згорткою критеріїв цієї багатокритеріальної задачі оптимізації, то вважають ([5]), що даний розв'язок є досяжним за зваженою сумою різноважливих критеріїв.

Ґрунтуючись на даних коефіцієнтах розглянемо задачу

$$P(x) = \alpha_1\mu_1(x) + \alpha_2\mu_2(x) + ... + \alpha_q\mu_q(x) \to \max \tag{10}$$

де

$$\begin{array}{l} x \in X, \\ \mu_i\left(x\right) \geq m_i y_i,\ i = 1,2,...,q, \\ \alpha_i = \bar{\alpha}_i y_i,\ i = 1,2,...,q, \\ x_j \geq 0,\ j = 1,2,...,n, \\ y_i \in \{0,1\},\ i = 1,2,...,q, \\ \sum_{j \in G_l} y_j \geq y_l,\ l \in D, G_l \neq \emptyset. \end{array} \tag{11}$$

Теорема 1. *Нехай* $g^* = (x^*, y^*, \alpha^*) \in R^{n+q+q}$ *є оптимальним розв'язком задачі* (10)-(11). *Тоді* x^* *є розв'язком задачі* (3') *знаходження оптимального розв'язку задачі оптимального вибору з альтернативними нечіткими залежними цілями.*

Доведення теореми легко отримати враховуючи вибір коефіцієнтів $\bar{\alpha}_i, i = 1,2,...,q$, за правилом (8), які дозволяють побудувати функціонал $L\left(x\right)$, що представляє лексикографічний порядок віддачі переваги на множині альтернатив. Кожен з коефіцієнтів α_i визначається на основі $\bar{\alpha}_i$ і змінної y_i

$$\alpha_i = \bar{\alpha}_i y_i, \tag{12}$$

яка при неможливості виконання умови допустимості $\mu_i\left(x^*\right) \geq m_i$ перетворюється в нуль за рахунок обмеження

$$\mu_i\left(x\right) \geq m_i y_i.$$

А отже, у нуль перетворюється і коефіцієнт α_i, що призводить до виключення з розгляду відповідної функції $\mu_i\left(x\right)$. Якщо ж множина G_i номерів критеріїв вищого рангу, від яких залежить даний критерій $\mu_i\left(x\right)$ непорожня, але жоден з них не є допустимим, то для всіх із них значення відповідних змінних

$$y_j = 0,\ j \in G_i.$$

Тому, за рахунок обмеження

$$\sum_{j \in G_i} y_j \geq y_i,$$

змінна y_i буде дорівнювати нулю, а отже, за рахунок обмеження (12), одержимо, що коефіцієнт $\alpha_i = 0$, що призводить до виключення з розгляду відповідної функції $\mu_i\left(x\right)$.

Таким чином, ґрунтуючись на теоремі 2 та правилах вибору додатних коефіцієнтів (8) ми можемо знаходити досяжні оптимальні розв'язки задачі (3') з векторною цільовою функцією шляхом розв'язання задачі (10)-(11) зі скалярною цільовою функцією.

Розглянемо тепер задачу лексикографічної оптимізації з нечіткими альтернативними залежними цільовими функціями (3'), відмовившись від умови (7). Графічне представлення цільових функцій набуде вигляду:

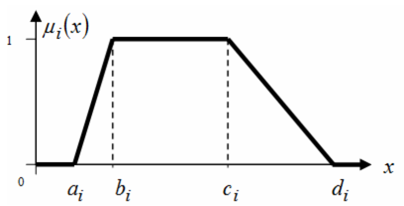

Рис. 5. «Величина x повинна бути приблизно в межах від b до c»

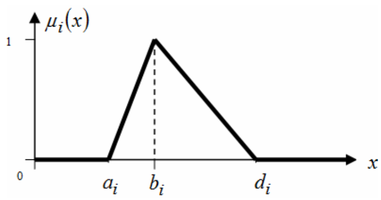

Рис. 6. «Величина x повинна бути близькою до b»

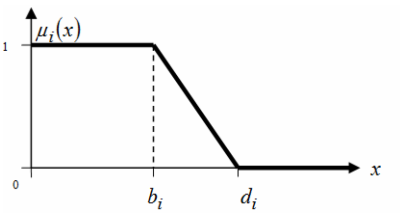

Рис. 7. «Величина x не повинна бути більшою за b»

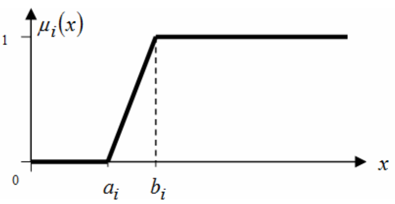

Рис. 8. «Величина x не повинна бути меншою за b»

Будемо вважати, що параметри $a_i, b_i, c_i, d_i,\ i = 1, 2, ..., q$ є цілочисловими. Позначимо X^{**} множину оптимальних розв'язків такої лексикографічної задачі оптимізації з довільними функціями.

Дослідимо проблему відшукання досяжних оптимальних розв'язків. Нехай $\bar{\beta}_q > 0$ довільне додатне число, а інші поступово визначено з

$$\bar{\beta}_i > \frac{1}{\alpha_i} \sum_{l=i+1}^{q} \bar{\beta}_l,\ i = q-1, q-2, ..., 1, \tag{13}$$

де

$$\alpha_i = \min_{\mu_i(x) \neq \mu_i(y)} |\mu_i(x) - \mu_i(y)|, i = 1, 2, ..., q. \quad (14)$$

З використанням коефіцієнтів $\bar{\beta}_i$, знайдених згідно з (13), побудуємо функціонал

$$Z(x) = \sum_{i=1}^{q} \bar{\beta}_i \mu_i(x)$$

і задачу однокритеріальної оптимізації зі скалярною цільовою функцією

$$\max Z(x), x \in X. \quad (15)$$

У [3] показано, що множина оптимальних розв'язків задачі (15) є множиною оптимальних розв'язків задачі (3) без додаткового припущення (7).

Як і у попередньому випадку, ґрунтуючись на коефіцієнтах $\bar{\beta}_i$, $i = 1, 2, ..., q$, задачу знаходження досяжних оптимальних розв'язків лексикографічної оптимізації з нечіткими альтернативними залежними цілями можна звести до задачі

$$H(x) = \beta_1\mu_1(x) + \beta_2\mu_2(x) + ... + \beta_q\mu_q(x) \to \max \quad (16)$$

де

$$\begin{array}{l} x \in X, \\ \mu_i(x) \geq m_i y_i, \; i = 1, 2, ..., q, \\ \beta_i = \bar{\beta}_i y_i, \; i = 1, 2, ..., q, \\ x_j \geq 0, \; j = 1, 2, ..., n, \\ y_i \in \{0, 1\}, \; i = 1, 2, ..., q, \\ \sum_{j \in G_l} y_j \geq y_l, \; l \in D, G_l \neq \emptyset. \end{array} \quad (17)$$

Висновки. Запропонований підхід до розв'язання задачі прийняття рішень із нечітко визначеними цілями, які строго упорядковано за важливістю з додатковими умовами допустимості за залежності від допустимості цілей вищого рангу зводиться до лексикографічної задачі оптимізації з альтернативними критеріями. Розглянуто та обґрунтовано можливість розв'язання задачі з використанням модифікації схеми скаляризації та зведення даної задачі, як задачі з векторною цільовою функцією, до задачі однокритеріальної оптимізації зі скалярною цільовою функцією, що в свою чергу дає можливість застосувати для її розв'язання відомі методи.

Список використаної літератури

1. *Волошин О. Ф.* Моделі та методи прийняття рішень / О.Ф. Волошин, С.О. Мащенко. – К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2010. – 336 с.
2. *Bellman R. E.* Decision-Making in Fuzzy Environment / R. E. Bellman, L. A. Zadeh // Management Science, 1970. – vol.17 – №4. – P.141-160.
3. *Брила А. Ю.* Досяжність нечітких цілей у заданій субординації строгого ранжування / А. Ю. Брила, П. П. Антосяк // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2014. – №3. – С. 76-80.
4. *Рыжов А. П.* Элементы теории нечетких множеств и измерения нечеткости / А. П. Рыжов. – М.: Диалог-МГУ, 1998. – 116 с.
5. *Червак Ю. Ю.* Оптимізація. Непокращуваний вибір / Ю. Ю. Червак – Ужгород: Ужгород. нац. ун-т, 2002. – 312 с.
6. *Подиновский В. В.* Оптимизация по последовательно применяемым критериям / В. В. Подиновский, В. М. Гаврилов.– М.: Сов. Радио, 1975. – 115с.

Одержано 11.11.2015