УДК 518.12

М. М. Ломага (Ужгородський нац. ун-т)

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЛЕКСИКОГРАФІЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ З ЛІНІЙНИМИ ФУНКЦІЯМИ КРИТЕРІЇВ НА ОПУКЛІЙ МНОЖИНІ

In the paper an approximation approach to solving of convex problems of lexicographical optimization is suggested. The approach is based on using ideas of linearization methods, clipping plane methods and lexicographical simplex-algorithm. An algorithm that enables bringing the solving process of a convex problem of lexicographical optimization to solving the sequence of secondary lexicographical problems of linear programming has been constructed and grounded.

В роботі пропонується апроксимаційний підхід до розв'язання опуклих задач лексикографічної оптимізації, в основі якого лежить використання ідей методів лінеаризації, відсікаючих площин та лексикографічного симплекс-алгоритму. Побудовано і обґрунтовано алгоритм, що дозволяє звести процес розв'язання опуклої задачі лексикографічної оптимізації до розв'язання послідовності допоміжних лексикографічних задач лінійного програмування.

1. Вступ. Серед векторних задач лексикографічні задачі утворюють специфічний, але достатньо широкий і важливий клас задач оптимізації. Лексикографічне впорядкування використовується для встановлення правил субординації та пріоритету. Тому ряд задач, зокрема, задачі оптимізації складних систем, задачі стохастичного програмування в умовах ризику, задачі динамічного характеру тощо, можна представити в лексикографічній формі. До варіантів розв'язання лексикографічних задач оптимізації відносяться використання схеми скаляризації або згортки векторного критерію для одноетапного розв'язання [1]– [3]. При розробці методів розв'язання багатокритеріальних задач приходиться вирішувати специфічні проблеми. Різні фактори є причиною того, що здебільшого для задач векторної оптимізації точний розв'язок отримати не вдається, тому обгрунтованою є формальна заміна вхідної задачі більш простішою так, щоб не змінювались оптимальні розв'язки. Успіхи симплекс-методу при розв'язуванні лінійних однокритеріальних задач, навіть великих розмірів, стали причиною розвитку методів лінеаризації. Загальний принцип простий: заміна розв'язання нелінійної задачі розв'язанням послідовності лінійних задач, що апроксимують, в деякому розумінні, вхідну задачу. В [3] для відшукання лексикографічного оптимуму лінійних багатокритеріальних задач лексикографічної оптимізації було запропоновано використання симлекс методу. Отже, можливим є розробка методів розв'язання векторних задач, в основі яких лежить використання ідей методів лінеаризації.

У [4, 5] задача лексикографічної оптимізації з лінійними обмеженнями зводилась до послідовності лінійних лексикографічних задач шляхом апроксимації критеріальних функцій. У даній роботі представлений алгоритм, що дозволяє звести розв'язання вхідної задачі за допомогою апроксимації допустимої множини до розв'язання послідовності багатокритеріальних задач лінійного програмування двоїстим симплекс методом. Запропонована процедура використовується для окремого типу задач лексикографічної оптимізації.

2. Зведення задачі лексикографічної оптимізації з лінійними функціями критеріїв на опуклій множині до розв'язання послідовності лексикографічних задач лінійного програмування.

Розглянемо задачу лексикографічної оптимізації наступного вигляду:

$$\min{}^L\{F(x)|x \in X\}, \tag{1}$$

де $F(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots, f_l(x))$, $f_k(x) = \langle c_k, x\rangle$, $c_k \in R^n$, $k = 1, 2, \ldots, l$, $X = \{x \in R^n | g^i(x) \le 0, x \ge 0, i = 1, 2, \ldots, m\}$, $g^i(x)$ – неперервно диференційовні опуклі функції.

Згідно роботи [3] введемо означення.

Означення 1. *Вектор $z \in R^l$ називається лексикографічно додатним, якщо перша його ненульова компонента в порядку зростання індексів компонент є додатна. Лексикографічну додатність вектора $z \in R^l$ позначатимемо так: $z >^L 0$.*

Означення 2. *Альтернативу $x^* \in X$ називатимемо лексикографічно оптимальною, якщо вона не гірша за будь-яку іншу допустиму альтернативу у розумінні відношення $\ge^L$, тобто якщо $F(x^*) - F(y) \ge^L 0$.*

У лексикографічній задачі оптимізації досягають як завгодно малого приросту більш важливого критерію за рахунок будь-яких втрат за іншим менш важливим критерієм.

Знаходження розв'язку задачі (1) можна звести до розв'язання лексикографічних задач лінійного програмування на многогранній множині, що містить допустиму область X вхідної задачі (1).

Покажемо, що

Лема 1. *$X \subset X_p$,*
де $X_p = \{x \in R^n | \langle \nabla g^i(x^j), x - x^j\rangle + g^i(x^j) \le 0, x \ge 0, i = 1, 2, \ldots, m, j = 1, 2, \ldots, p\}$, $x^j \in R^n_+$, $R^n_+ = \{x \in R^n | x_i \ge 0, i = 1, \ldots, n\}$.

Доведення. Справедливість включення випливає безпосередньо з побудови многогранної множини X_p.

За властивістю опуклої неперервно диференційованої функції $f(x)$ для будь-яких $x, y \in R^n$ справедлива нерівність

$$\langle \nabla f(y),\ x - y\rangle + f(y) \le f(x) \tag{2}$$

Згідно (2) для деякого числа $p > 0$ та будь-яких $x^j \in R^n_+$, $j = 1, ..., p$, можна записати

$$\langle \nabla g^i(x^j),\ x - x^j\rangle + g^i(x^j) \le g^i(x), i = 1, 2, \ldots, m, j = 0, 1, \ldots, p \tag{3}$$

Оскільки для довільного $x \in X$, $g^i(x) \le 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, то внаслідок (3) виконуються нерівності

$$\langle \nabla g^i(x^j),\ x - x^j\rangle + g^i(x^j) \le 0, i = 1, 2, \ldots, m, j = 0, 1, \ldots, p,$$

тобто $x \in X_p$, що й треба було довести.

Нехай x^{p+1} – розв'язок задачі (4):

$$\min{}^L\{F(x)|x \in X_p.\}. \tag{4}$$

Якщо $x^{p+1} \in X$, то $x^{p+1} = \arg\ \min^L\{F(x)|x \in X\}$, оскільки $X \subseteq X_p$. Якщо x^{p+1} не задовольняє хоча б одне з обмежень, що описують допустиму область задачі (1), то виділимо множину $J_{p+1} = \{i|g^i(x^{p+1}) > 0\}$ і до нерівностей, що визначають допустиму область лінійної векторної задачі (4) X_p додамо умову

$$\langle \nabla g^i(x^{p+1}),\ x - x^{p+1}\rangle + g^i(x^{p+1}) \leq 0, i = \{i \in J_{p+1} | g^i(x^{p+1}) = \max_{k\in J_{p+1}} g^k(x^{p+1})\}$$

Отримаємо новий многогранник X_{p+1} і виконаємо нову ітерацію алгоритму, розв'язуючи задачу $\min^L\{F(x)\}|x \in X_{p+1}\}$. Процес розв'язування вважається закінченим, якщо на деякому s-му кроці одержане $x^s \in X$.

Для розв'язування допоміжних лінійних задач доцільно застосовувати двоїстий симплекс-метод, який дозволяє використати одержаний на попередньому кроці розв'язок як базисний для поновленої області.

3. Схема алгоритму. 0-й крок. Вибираємо довільну точку $x^0 \geq 0$. Будуємо многогранник $X_0 = \{x \in R^n | \langle \nabla g^i(x^0), x - x^0\rangle + g^i(x^0), x \geq 0, i = 1, \ldots, m\}$ і розв'язуємо задачу $\min^L\{F(x)|x \in X_0\}$ двоїстим симплекс методом. Нехай $x^1 = \arg\ \min^L\{F(x)|x \in X_0\}$. Якщо $x^1 \in X$, то задача (1) розв'язана, інакше переходимо до кроку $s(s \geq 1)$.

s - алгоритму крок алгоритму.

Виділяємо множину $J_s = \{i|g^i(x^s) > 0\}$. Будуємо многогранник X_s, додавши до обмежень, що визначають X_{s-1}, нерівність $\langle \nabla g^i(x^s),\ x - x^s\rangle + g^i(x^s) \leq 0$, $i \in N_s = \{j \in J_s | g^j(x^s) = \max\limits_{k\in J_s} g^k(x^s)\}$. Розв'язуємо задачу $\min^L\{F(x)|x \in X_s\}$. Нехай $x^{s+1} = \arg\ \min^L\{F(x)|x \in X_s$. Якщо $x^{s+1} \in X$, то задача (1) розв'язана, інакше переходимо до кроку $s + 1$.

Теорема 1. *Якщо функції* $g^i(x), i = 1, 2, \ldots, m$ *опуклі і неперервно диференційовні і якщо задача* (1) *має скінченний розв'язок, то послідовність точок, породжена даним алгоритмом, збігаєтьcя до лексикорафічно оптимального розв'язку задачі* (1).

Доведення. Якщо задача (1) має скінченний лексикографічно оптимальний розв'язок x^*, то, починаючи з деякого номера p послідовність точок $\{x^p\}$ міститься в обмеженій множині. Нехай $\{x^k\}$ – підпослідовність послідовності $\{x^p\}$, що збігається до x^*. Розглянемо підпослідовність $\{x^t\}$ точок, для яких відсікаюча гіперплощина, породжена відносно i-го обмеження, $\langle \nabla g^i(x^t),\ x - x^t\rangle + g^i(x^t) \leq 0$, $i \in \{1, \ldots, m\}$. Якщо на кожній ітерації додавати гіперплощину щодо найсильнішого ($i \in N_s$) обмеження, то, або починаючи з деякого номера $k \geq k_0$ виконається обмеження $g^i(x^k) \leq 0$, тобто x^k належить області допустимих значень, або підпослідовність $\{x^t\}$ нескінченна. У випадку, коли підпослідовність $\{x^t\}$ нескінченна, для будь-якого $t' > t$ виконується $\langle \nabla g^i(x^t), x^{t'} - x^t\rangle + g^i(x^t) \leq 0$, звідки за нерівністю Коші-Буняковського отримаємо $g^i(x^t) \leq \|\nabla g^i(x^t)\| \|x^{t'} - x^t\|$. Враховуючи, що $\|x^i - x^t\| \to 0, \|\nabla g^i(x^t)\| \to \|\nabla g^i(x^*)\|$ з останньої нерівності випливає $g^i(x^t) \to g^i(x^*) \leq 0$, тобто x^* – лексикографічно оптимальний розв'язок задачі (1). З іншого боку, якщо $\tilde{x}$ – оптимальний розв'язок задачі (1), то на кожній ітерації алгоритму справедлива нерівність $F(x^t) \leq^L F(\tilde{x})$, звідки випливає при граничному переході, що $F(x^*) \leq^L F(\tilde{x})$. Отже, x^* – лексикографічно оптимальний розв'язок задачі (1). Теорема доведена.

Одержання послідовності $\{x^s\}$ в запропонованому методі як і однокритеріальній оптимізації здійснюється таким чином, що кожна із точок x^s є недопустимою точкою. Тому процес обчислення не можна зупиняти навіть при досить великих s, лише коли отримаємо допустиму точку. Збіжність до лексикографічно оптимального розв'язку алгоритм гарантує у тому випадку, якщо допустима множина опукла.

Для ілюстрації розробленого алгоритму розглянемо наступну задачу.

Приклад 1. *Знайти*

$$\max^L F(x) = (x_1 + x_2, 2x_1 + x_2)$$

при умовах

$$g^1(x) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 1 \le 0,$$
$$g^2(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0,$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Розв'язання. Нехай $x^0 = (1, 1)$. Замінимо нелінійну задачу на лінійну. Для цього представимо допустиму множину у вигляді опуклої многогранної множини: $\nabla g^1(x) = (2(x_1 - 1),\ 2x_2)$, $\nabla g^2(x) = (2x_1,\ 2x_2)$, $\nabla g^1(x^0) = (0,\ 2)$, $\nabla g^2(x^0) = (2,\ 2)$, $g^1(x^0) = 0$, $g^2(x^0) = 1$, $J_0 = \{1,\ 2\}$. Тоді лінійна задача лексикографічної оптимізації набуває вигляду:

$$\begin{array}{l} \langle (0,\ 2),\ (x_1 - 1,\ x_2 - 1) \rangle + 0 \le 0, \\ \langle (2,\ 2),\ (x_1 - 1,\ x_2 - 1) \rangle + 1 \le 0, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{array}$$

або

$$\overset{L}{\max}(x_1 + x_2, 2x_1 + x_2),$$

$$\begin{array}{l} 2x_2 - 2 \le 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3 \le 0 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{array}$$

Геометрична інтерпретація початкової та допоміжної задач зображена на рис. 1.

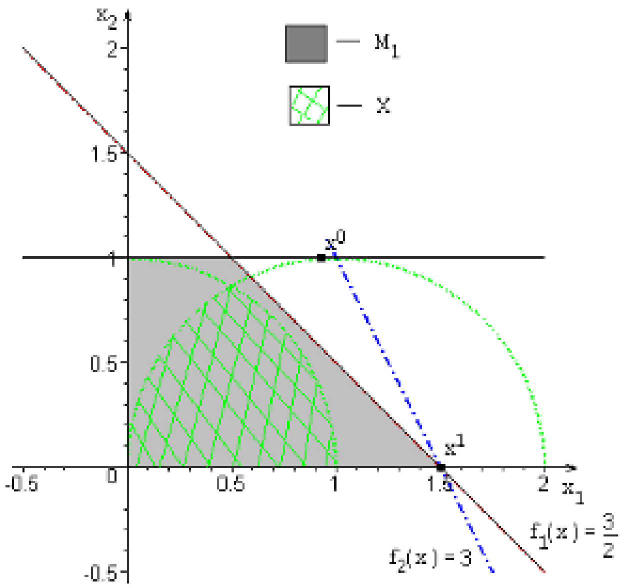

Рис. 1

Оптимальним розв'язком лінійної векторної задачі є $x^1 = (\frac{3}{2}, 0)$, $x^1 \notin M_1$, тому $J_1 = \{2\}$, $N_1 = J_1$ і в наступну лінійну задачу лексикографічної оптимізації треба ввести одне додаткове обмеження. Обчислимо $\nabla g^1(x^1) = (1,\ 0), \nabla g^2(x^1) = (3,\ 0)$, $g^1(x^1) = -\frac{3}{4}$, $g^2(x^1) = \frac{5}{4}$. На другому кроці отримаємо наступну векторну лінійну задачу:

$$\overset{L}{\max}(x_1 + x_2, 2x_1 + x_2),$$

в області M_2:

$$\begin{aligned} &2x_2 - 2 \leq 0, \\ &2x_1 + 2x_2 - 3 \leq 0, \\ &3x_1 - \tfrac{13}{4} \leq 0, \\ &x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Геометрична інтерпретація отриманої векторної лінійної задачі і початкової зображена на рис. 2.

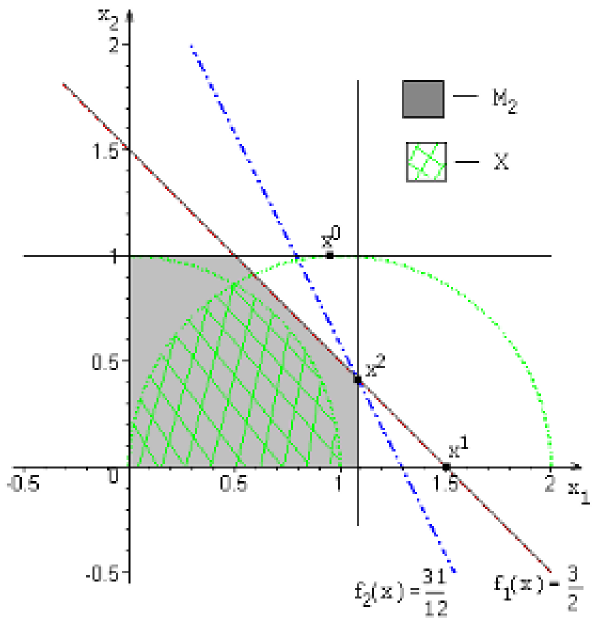

Рис. 2

Оптимальним розв'язком задачі другого кроку є $x^2 = (1.083333333, 0.4166666667)$. $x^2 \notin M_2$, тому продовжуємо розв'язування задачі. Алгоритм виконуємо до тих пір, поки не отримаємо точку, що належить допустимій множині початкової задачі. Наближений оптимальний розв'язок $x^* = (0.7071085077,\ 0.7071050549)$ знайдемо на 18 ітерації алгоритму. $F(x^*) = (1.414213563, 2.121322070)$.

4.Висновок.

Досліджено опуклу задачу лексикографічної оптимізації з лінійними критеріальними функціями. Побудовано та обґрунтовано апроксимаційний алгоритм до розв'язання опуклих задач лексикографічної оптимізації, оснований на використанні ідей методів лінеаризації, відсікаючих площин та лексикографічного симплекс-алгоритму. За розробленим алгоритмом процес розв'язання опуклої задачі лексикографічної оптимізації зводиться до розв'язання послідовності допоміжних лексикографічних задач лінійного програмування. Запропонована схема дозволяє отримувати розв'язки опуклих задач лексикографічної оптимізації, використовуючи симплексний алгоритм [3]. Перспективним напрямком виглядає і адаптація алгоритму для багатопроцесорних середовищ.

Список використаної літератури

1. *Подиновский В. В., Ногин В. Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 256 с.
2. *Семенова Н. В., Колєчкіна Л. М.* Векторні задачі дискретної оптимізації на комбінаторних множинах: методи дослідження та розв'язання. – Київ: Наук. думка, 2009. – 266 с.
3. *Червак Ю.Ю.* Оптимізація. Непокращуваний вибір. – Ужгород: Ужгородський національний університет, 2002. – 312 с.
4. *Ломага М. М., Семенов В. В.* Квадратичные задачи лексикографической оптимизации: свойства и решения // Компьютерная математика. – 2013. – №2. – С. 134-143.
5. *Н. Семенова, М. Ломага, В. Семенов* Алгоритм решения многокритериальных задач лексикографической оптимизации с выпуклыми функциями критериев // International Journal "Information Theories and Applications", **Vol. 21**, Number 3, 2014. – P. 254-262.

Одержано 10.10.2015