УДК 517.956

О. В. Пелюшкевич, Т. І. Фірман (Львівський нац. ун-т ім. І.Франка)

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ ВИРОДЖЕНОЇ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ ЗЛІЧЕННОЇ СИСТЕМИ НАПІВЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

In this paper we proved theorem about a global solvability of the initial-boundary value problem for degenerate countable system of first order hyperbolic equations.

В даній статті для виродженої зліченної системи гіперболічних рівнянь першого порядку доведено теорему про глобальну розв'язність мішаної задачі.

1. Вступ. Гіперболічні рівняння і системи, зазвичай, використовують при моделюваннні процесів, що мають скінченну швидкість поширення збурень. З математичної точки зору це означає, що характеристики відповідних рівнянь і систем є ортогональними до осей координат [1].

Проте, в багатьох задачах фізики твердого тіла, в проміжних рівняннях, при аналізі багатовимірних задач, зустрічаються математичні моделі у вигляді гіперболічних рівнянь, частина сімейства характеристик яких перпендикулярна, наприклад, до осі часу [2, 3]. Наявність таких характеристик вказує на те, що швидкість поширення коливань у одновимірних суцільних середовищах є нескінченною [4].

Представлення розв'язку нелінійного рівняння через нескінченний ряд Фур'є приводить до зліченних систем рівнянь з частинними похідними першого порядку [5–7].

У цій праці розглянуто зліченну систему напівлінійних рівнянь з частинними похідними першого порядку з "нахиленими" та горизонтальними (виродженими) характеристиками. За допомогою методу характеристик та теореми Банаха про стискуючі відображення, використовуючи методику А.М.Самойленка та Ю.В.Теплінського для зліченних систем звичайних диференціальних рівнянь [8], тобто диференціальних рівнянь в просторі $\mathfrak{M}$ обмежених числових послідовностей, доведено теорему про глобальну коректну розв'язність мішаної задачі для виродженої гіперболічної зліченної системи напівлінійних рівнянь.

2. Формулювання задачі.

У прямокутнику $\Pi = \{(x,t) : 0 < t < T,\ 0 < x < l\}$ розглянемо вироджену гіперболічну зліченну систему напівлінійних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(x,t)\frac{\partial u_i}{\partial x} &= f_i(x,t,u_1,u_2,\ldots,v_1,v_2,\ldots),\ \ i\in\{1,\ldots\} \\ \frac{\partial v_j}{\partial x} &= g_j(x,t,u_1,u_2,\ldots,v_1,v_2,\ldots),\ \ j\in\{1,\ldots\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Для системи (1) задамо початкові

$$u_i(x,0) = q_i(x),\ 0 \le x \le l,\ i \in \{1,\ldots\}, \tag{2}$$

та крайові умови при $0 \le t \le T$

$$\begin{aligned} u_i(0,t) &= \gamma_i^0\Big(t, \big(u_s(0,t)\big)_{s\in I_l}\Big), \quad i \in I_0,\\ u_i(l,t) &= \gamma_i^l\Big(t, \big(u_s(l,t)\big)_{s\in I_0}\Big), \quad i \in I_l,\\ v_j(0,t) &= \psi_j\Big(t, \big(u_s(0,t)\big)_{s\in I_l}\Big), \quad j \in \{1,\ldots\}, \end{aligned} \tag{3}$$

де I_0 та I_l – множини індексів, що визначені таким чином

$$I_0 = \Big\{i \in \{1,\ldots\} : \lambda_i(0,t) > 0\Big\}, \qquad I_l = \Big\{i \in \{1,\ldots\} : \lambda_i(l,t) < 0\Big\}.$$

Множини I_0 та I_l можуть бути порожніми, складатися з скінченної або зліченної кількості елементів. Нехай вони містять r_0 та r_l елементів, відповідно. Без обмеження загальності, можна вважати, що r_0 та r_l дорівнюють $\aleph_0$.

Надалі будемо використовувати позначення $u = (u_1, u_2, \ldots)$, $v = (v_1, v_2, \ldots)$ $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$, $f = (f_1, f_2, \ldots)$, $g = (g_1, g_2, \ldots)$, $q = (q_1, q_2, \ldots)$, $\psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots)$, $w = (u, v)$. А також $\gamma^0 = (\gamma_1^0, \gamma_2^0, \ldots)$, $\gamma^l = (\gamma_1^l, \gamma_2^l, \ldots)$, де $\gamma_i^0 = 0$ для $i \notin I_0$ та $\gamma_j^l = 0$, для $j \notin I_l$.

Через C^∞ позначимо простір, елементом якого є зчисленна послідовність неперервних функцій, обмежених деякою сталою.

Задачу (1) - (3) будемо розглядати в просторі $\mathfrak{C}^2 = C^\infty(\Pi) \times C^\infty(\Pi)$. Нехай $\{w^1, w^2\} \subset \mathfrak{C}^2$, тоді метрику на елементах простору $\mathfrak{C}^2$ визначимо так

$$\begin{aligned} \rho(w^1, w^2) = \max\{&\sup_i \max_{x,t} |u_i^1(x,t) - u_i^2(x,t)| a_i(x) e^{-ct},\\ &\sup_i \max_{x,t} |v_i^1(x,t) - v_i^2(x,t)| b_i(x) e^{-ct}\}, \end{aligned} \tag{4}$$

де сталу $c > 0$ і неперервні додатні функції a_i, b_i підберемо пізніше.

Дослідимо достатні умови розв'язності задачі (1) - (3).

3. Допоміжна лема.

Існування та єдиність розв'язку задачі (1) - (3) будемо доводити за допомогою теореми Банаха про нерухому точку. Для цього, насамперед, переконаємося у повноті простору $\mathfrak{C}^2$ відносно норми, породженої заданою метрикою (4).

Лема 1. *Простір $\mathfrak{C}^2$ повний відносно норми $\|\cdot\|_{\mathfrak{C}^2}$.*

Доведення. Нехай послідовність $\big(u^n, v^n\big)_{n=1}^\infty$ фундаментальна в просторі $\mathfrak{C}^2$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться $N \in \mathbb{N}$ таке, що для всіх натуральних $n, m \ge N$ і для всіх $i \in \mathbb{N}$ та $(x,t) \in \Pi$ маємо

$$|u_i^n(x,t) - u_i^m(x,t)| < \varepsilon, \tag{5}$$

$$|v_i^n(x,t) - v_i^m(x,t)| < \varepsilon. \tag{6}$$

З (5) випливає, що для будь-яких фіксованих $(x,t) \in \Pi$ та $i \in \mathbb{N}$ числова послідовність $(u_i^n(x,t))$, $n \in \mathbb{N}$, є фундаментальною. Позначимо через $u_i(x,t)$ її границю. Покажемо, що функція $u_i(x,t)$, $(x,t) \in \Pi$, є неперервною і обмеженою. Справді, нехай $N \in \mathbb{N}$ таке, що для всіх натуральних $n, m \ge N$, $i \in \mathbb{N}$ та $(x,t) \in \Pi$ маємо

$$|u_i^n(x,t) - u_i^m(x,t)| < 1/2.$$

Тоді

$$|u_i(x,t) - u_i^N(x,t)| = |\lim_{n\to\infty} u_i^n(x,t) - u_i^N(x,t)| = \lim_{n\to\infty} |u_i^n(x,t) - u_i^N(x,t)| \le 1/2.$$

Отже, для кожної $(x,t) \in \Pi$ маємо

$$|u_i(x,t)| \le |u_i(x,t) - u_i^N(x,t)| + |u_i^N(x,t)| \le 1/2 + K_N,$$

де

$$K_N := \sup_{i\in\mathbb{N}} \sup_{(x,t)\in\Pi} |u_i^N(x,t)| < \infty,$$

оскільки $u^N \in C^\infty(\Pi)$. Таким чином отримуємо, що всі функції u_i, $i \in \mathbb{N}$, рівномірно обмежені одною і тою ж сталою.

Доведемо неперервність функції u_i. Покажемо, що функція u_i є неперервною в точці $(x,t) \in \Pi$. Нехай дано $\varepsilon > 0$. Для довільних $(x_1,t_1) \in \Pi$ та $n \in \mathbb{N}$ маємо

$$|u_i(x,t)-u_i(x_1,t_1)| \le |u_i(x,t)-u_i^n(x,t)|+|u_i^n(x,t)-u_i^n(x_1,t_1)|+|u_i^n(x_1,t_1)-u_i(x_1,t_1)|.$$

Оскільки для кожної $(x,t) \in \Pi$ маємо, що $u_i^n(x,t) \to u_i(x,t)$ при $n \to \infty$, то знайдеться $N \in \mathbb{N}$ таке, що для всіх натуральних $n \ge N$ маємо

$$|u_i(x,t) - u_i^n(x,t)| < \varepsilon/3, \qquad |u_i(x_1,t_1) - u_i^n(x_1,t_1)| < \varepsilon/3.$$

Крім того, оскільки функція u_i^n є неперервною, то знайдеться $\delta = \delta(i,n) > 0$ таке, що при $|x - x_1| < \delta$ та $|t - t_1| < \delta$ маємо $|u_i^n(x,t) - u_i^n(x_1,t_1)| < \varepsilon/3$.

Отже, при $|x - x_1| < \delta$ та $|t - t_1| < \delta$ маємо, що $|u_i(x,t) - u_i(x_1,t_1)| < \varepsilon$, що і доводить неперервність функції u_i.

Очевидно, що ті самі міркування можна повторити і для $v^n \in C^\infty(\Pi)$, $n \in \mathbb{N}$. Позначимо $u := (u_1, u_2, \ldots)$ та $v := (v_1, v_2, \ldots)$. Оскільки доведено, що $(u,v) \in \mathfrak{C}^2$, то залишається лише показати, що $\|(u,v) - (u^n, v^n)\|_{\mathfrak{C}^2} \to 0$ при $n \to \infty$. Враховуючи наведені вище викладки, цей факт перевіряється безпосередньо.

4. Теорема про глобальну розв'язність.

Нехай $\varphi_i(\tau; x,t)$, $i \in \{1, \ldots\}$ розв'язок задачі Коші

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \lambda_i(\xi, \tau), \;\; \xi(t) = x,$$

який є характеристиками системи (1). Зауважимо, що вихідна система має також горизонтальні характеристики вигляду $\tau = t$. Для уникнення громіздких записів будемо використовувати скорочене позначення $\varphi_i(\tau)$.

Через $\chi_i(x,t)$ $(0 \le \chi_i(x,t) \le T)$, позначимо найменше значення τ таке, що $(\varphi_i(\tau; x,t), \tau) \in \overline{\Pi}$, $\tau \in [\chi_i(x,t), t]$. Тоді, якщо $\chi_i(x,t) > 0$, то $\varphi_i(\chi_i(x,t); x,t)$ дорівнює 0 або l.

Уведемо області:

$$\Pi_q^i = \{(x,t) \in \Pi : \chi_i(x,t) = 0\}, \; i \in \{1, \ldots\};$$
$$\Pi_0^i = \{(x,t) \in \Pi : \chi_i(x,t) > 0, \, \varphi_i(\chi_i(x,t); x,t) = 0\}, \; i \in I_0;$$
$$\Pi_l^i = \{(x,t) \in \Pi : \chi_i(x,t) > 0, \, \varphi_i(\chi_i(x,t); x,t) = l\}, \; i \in I_l.$$

Проінтегрувавши рівняння системи (1) вздовж відповідних характеристик, одержимо системи інтегро-операторних рівнянь

$$u_i(x,t) = F_i[u](x,t) +$$
$$+ \int\limits_{\chi_i(x,t)}^{t} f_i\Big(\varphi_i(\tau), \tau, u_1(\varphi_i(\tau),\tau), u_1(\varphi_i(\tau),\tau), \dots, v_1(\varphi_i(\tau),\tau), v_2(\varphi_i(\tau),\tau), \dots\Big) d\tau,$$
$$i \in \{1, \dots\}, \tag{7}$$

$$v_j(x,t) = \psi_j\Big(t, \big(u_s(0,t)\big)_{s\in I_l}\Big) +$$
$$+ \int\limits_{0}^{x} g_j\big(y, t, u_1(y,t), u_2(y,t), \dots, v_1(y,t), v_2(y,t), \dots\big) dy, \qquad j \in \{1, \dots\}, \tag{8}$$

де

$$F_i[u](x,t) = \begin{cases} q_i(\varphi_i(0;x,t)), & (x,t) \in \Pi_q^i, \\ \gamma_i^0\Big(\chi_i(x,t), \big(u_s(0, \chi_i(x,t))\big)_{s\in I_l}\Big), & (x,t) \in \Pi_0^i, \\ \gamma_i^l\Big(\chi_i(x,t), \big(u_s(l, \chi_i(x,t))\big)_{s\in I_0}\Big), & (x,t) \in \Pi_l^i. \end{cases}$$

Означення 1. *Узагальненим розв'язком задачі* (1)-(3)*, будемо називати набір функцій* $(u, v) \in \mathfrak{C}^2$*, які задовольняють системи* (7)-(8).

Означення 2. *Функція* $f : \mathbb{R}^2 \times \mathfrak{M}^2 \to \mathfrak{M}$ *задовольняє умову Коші-Ліпшиця за змінними* u *та* v *з деякою неперервною функцією* $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$*, якщо виконується нерівність*

$$|f_i(x,t,u_1', u_2', \dots, v_1', v_2', \dots) - f_i(x,t,u_1'', u_2'', \dots, v_1'', v_2'', \dots)| \le \alpha(x,t) \cdot \Delta,$$

де $\Delta = \max\{\sup\limits_{k\in\mathbb{N}}\{|u_k' - u_k''|\}, \sup\limits_{k\in\mathbb{N}}\{|v_k' - v_k''|\}\}$*, для всіх* $i \in \{1, \dots\}$.

Будемо вважати, що функція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathfrak{M}$ задовольняє умову Ліпшиця за змінною x в Π, якщо $f_i \in Lip_x(\Pi)$ для всіх $i \in \{1, \dots\}$.

Теорема 1. *Нехай вихідні функції задачі* (1)–(3) *задовольняють умови:*
1) $\lambda \in C^\infty(\overline{\Pi}) \cap Lip_x(\overline{\Pi})$;
2) f, g, q, γ^0, γ^l, $\psi \in C^\infty(\overline{\Pi})$ *при довільних фіксованих наборах* $u, v \in C^\infty$;
3) f, g *задовольняють умову Коші-Ліпшиця за змінними* u *та* v *з деякими неперервними функціями* $\alpha(x,t)$ *та* $\beta(x,t)$*, відповідно;*
4) γ^0, γ^l, ψ *задовольняють умову Коші-Ліпшиця за змінною* u *з деякими неперервними функціями* $h^0(t)$, $h^l(t)$ *та* $s(t)$*, відповідно;*
5)

$$q_i(0) = \gamma_i^0(0, (q_s(0))_{s\in I_l}), \quad i \in I_0,$$
$$q_i(l) = \gamma_i^l(0, (q_s(l))_{s\in I_0}), \quad i \in I_l,$$
$$v_j(0,0) = \psi_j(0, (q_s(0))_{s\in I_l}), \quad j \in \{1, \dots\},$$

(умова погодження нульового порядку).

Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (1)-(3).

Доведення. Нехай $A = \max\limits_{x,t} \alpha(x,t)$, $B = \max\limits_{x,t} \beta(x,t)$, $S = \max\limits_{t} s(t)$ та $H = \max\big\{ \max\limits_{t} h^0(t), \max\limits_{t} h^l(t) \big\}$.

На елементах простору $\mathfrak{C}^2$ введемо оператор $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^1, \mathcal{A}^2)$, де оператори $\mathcal{A}^1$ та $\mathcal{A}^2$ визначені, відповідно, правими частинами співвідношень (7)-(8), а саме

$$\mathcal{A}_i^1[w](x,t) = F_i[u](x,t) +$$
$$+ \int\limits_{\chi_i(x,t)}^{t} f_i\Big(\varphi_i(\tau), \tau, u_1(\varphi_i(\tau),\tau), u_1(\varphi_i(\tau),\tau), \ldots, v_1(\varphi_i(\tau),\tau), v_2(\varphi_i(\tau),\tau), \ldots\Big) d\tau,$$
$$i \in \{1, \ldots\},$$

$$\mathcal{A}_j^2[w](x,t) = \psi_j\Big(t, \big(u_s(0,t)\big)_{s\in I_l}\Big) +$$
$$+ \int\limits_0^x g_j\big(y,t,u_1(y,t),u_2(y,t),\ldots,v_1(y,t),v_2(y,t),\ldots\big)dy, \qquad j \in \{1,\ldots\}.$$

Отже, відшукання узагальненого розв'язку задачі (1)-(3) зводиться до знаходження нерухомої точки оператора $\mathcal{A}$ в просторі $\mathfrak{C}^2$. Зауважимо, що $\mathcal{A}[z] \in \mathfrak{C}^2$, якщо $z \in \mathfrak{C}^2$, що випливає з неперервності функцій φ_i за всіма компонентами, з врахуванням припущення 2) теореми.

Зазначимо, що з означення метрики для всіх допустимих i, x, t, та $w \in \mathfrak{C}^2$ випливає співвідношення

$$|u_i^1(x,t) - u_i^2(x,t)| \le \frac{\rho(w^1,w^2)}{a_i(x)} e^{ct}, \quad |v_i^1(x,t) - v_i^2(x,t)| \le \frac{\rho(w^1,w^2)}{b_i(x)} e^{ct}.$$

Покажемо, що оператор $\mathcal{A}$ є стискуючим, для цього проведемо низку оцінок.

Нехай $w^1, w^2 \in \mathfrak{C}^2$ та $(x,t) \in \Pi_0^i$. Тоді

$$|F_i[w^1](x,t) - F_i[w^2](x,t)| \le$$
$$\le \Big|\gamma_i^0\Big(\chi_i(x,t), \big(u_s^1(0,\chi_i(x,t))\big)_{s\in I_l}\Big) - \gamma_i^0\Big(\chi_i(x,t), \big(u_s^2(0,\chi_i(x,t))\big)_{s\in I_l}\Big)\Big| \le$$
$$\le H \sup_{j\notin I_0}\{|u_j^1(0,\chi_i(x,t)) - u_j^2(0,\chi_i(x,t))|\} \le H \sup_{j\notin I_0} \frac{e^{c\chi_i(x,t)}}{a_j(0)} \rho(w^1,w^2). \quad (9)$$

Аналогічну оцінку можна одержати для $(x,t) \in \Pi_l^i$.

Таким чином, справедливе співвідношення

$$|F_i[w^1](x,t) - F_i[w^2](x,t)| \le \begin{cases} H \sup\limits_{j\notin I_0} \dfrac{e^{c\chi_i(x,t)}}{a_j(0)} \rho(w^1,w^2), \ (x,t) \in \Pi_0^i, \\ H \sup\limits_{j\notin I_l} \dfrac{e^{c\chi_i(x,t)}}{a_j(l)} \rho(w^1,w^2), \ (x,t) \in \Pi_l^i. \end{cases} \quad (10)$$

Позначимо через $\mu = \sup\limits_i \max\limits_{x,t} (|\lambda_i(x,t)|)^{-1}$. Якщо виконується перша нерівність оцінки (10), то $i \in I_0$ і $\chi_i(x,t) \le t - \mu x$. Аналогічно, якщо друга нерівність, то $i \in I_l$ і $\chi_i(x,t) \le t - \mu(l-x)$.

На підставі отриманих співвідношень одержуємо оцінку для оператора $\mathcal{A}^1$

$$\left|(\mathcal{A}_i^1[w^1])(x,t)-(\mathcal{A}_i^1[w^2])(x,t)\right|a_i(x)e^{-ct}\leq$$
$$\leq H\max\left\{\sup_{\substack{i\in I_0,\\ j\notin I_0}}\frac{a_i(x)e^{-c\mu x}}{a_j(0)},\sup_{\substack{i\in I_l,\\ j\notin I_l}}\frac{a_i(x)e^{-c\mu(l-x)}}{a_j(l)}\right\}\rho(w^1,w^2)+$$
$$+A\max\left\{\sup_{i,j,y}\frac{a_i(x)}{a_j(y)},\sup_{i,j,y}\frac{a_i(x)}{b_j(y)}\right\}\rho(w^1,w^2)\int\limits_0^t e^{c(\sigma-t)}d\sigma\leq$$
$$\leq H\max\left\{\sup_{\substack{i\in I_0,\\ j\notin I_0}}\frac{a_i(x)e^{-c\mu x}}{a_j(0)},\sup_{\substack{i\in I_l,\\ j\notin I_l}}\frac{a_i(x)e^{-c\mu(l-x)}}{a_j(l)}\right\}\rho(w^1,w^2)+$$
$$+\frac{A}{c}\max\left\{\sup_{i,j,y}\frac{a_i(x)}{a_j(y)},\sup_{i,j,y}\frac{a_i(x)}{b_j(y)}\right\}\rho(w^1,w^2),$$

а також оцінку для оператора $\mathcal{A}^2$

$$\left|\mathcal{A}_i^2[w^1](x,t)-\mathcal{A}_i^2[w^2](x,t)\right|b_i(x)e^{-ct}\leq\Bigg(S\sup_{\substack{i\in\mathbb{N},\\ j\notin I_l}}\frac{b_i(x)}{a_j(0)}+$$
$$+\int\limits_0^x B\max\left\{\sup_{i,j\in\mathbb{N}}\frac{b_i(x)}{a_j(y)},\sup_{i,j\in\mathbb{N}}\frac{b_i(x)}{b_j(y)}\right\}dy\Bigg)\rho(w^1,w^2).$$

Використавши отримані оцінки, встановлюємо, що

$$\rho(A[w^1],A[w^2])\leq\max_x\Bigg\{H\max\left\{\sup_{\substack{i\in I_0,\\ j\notin I_0}}\frac{a_i(x)e^{-c\mu x}}{a_j(0)},\sup_{\substack{i\in I_l,\\ j\notin I_l}}\frac{a_i(x)e^{-c\mu(l-x)}}{a_j(l)}\right\}+$$
$$+\frac{A}{c}\max\left\{\sup_{i,j,y}\frac{a_i(x)}{a_j(y)},\sup_{i,j,y}\frac{a_i(x)}{b_j(y)}\right\}+S\sup_{\substack{i\in\mathbb{N},\\ j\notin I_l}}\frac{b_i(x)}{a_j(0)}+$$
$$+\int\limits_0^x B\max\left\{\sup_{i,j\in\mathbb{N}}\frac{b_i(x)}{a_j(y)},\sup_{i,j\in\mathbb{N}}\frac{b_i(x)}{b_j(y)}\right\}dy\Bigg\}\rho(w^1,w^2).$$

Нехай

$$a_i(x)=\begin{cases}e^{px(l-x)}, & i\in I_0,\ i\in I_l\\ e^{px}, & i\in I_0,\ i\notin I_l\\ e^{p(l-x)}, & i\notin I_0,\ i\in I_l\\ e^{pl}, & i\notin I_0,\ i\notin I_l\end{cases},\quad b_i(x)=\varepsilon e^{-px},\ i\in\{1,\ldots\},$$

а також виконуються припущення

$$p\leq c\mu,\quad pl\leq c\mu, \tag{11}$$

тоді справджуються оцінки:

$$\max_x\left\{\sup_{\substack{i\in I_0,\\ j\notin I_0}}\frac{a_i(x)e^{-c\mu x}}{a_j(0)}\right\}=\max_x\left\{\sup_{i\in I_0}\frac{a_i(x)e^{-c\mu x}}{e^{pl}}\right\}=$$

$$=\max_x\left\{e^{px(l-x)}e^{-c\mu x-pl},\, e^{px}e^{-c\mu x-pl}\right\}=e^{-pl};$$

$$\max_x\left\{\sup_{\substack{i\in I_l,\\ j\notin I_l}}\frac{a_i(x)e^{-c\mu(l-x)}}{a_j(l)}\right\}=\max_x\left\{\sup_{i\in I_l}\frac{a_i(x)e^{-c\mu(l-x)}}{e^{pl}}\right\}=$$

$$=\max_x\left\{e^{px(l-x)}e^{-c\mu(l-x)-pl},\, e^{p(l-x)}e^{-c\mu(l-x)-pl}\right\}=e^{-pl}.$$

Також мають місце такі співвідношення:

$$\max_x\{\sup_{\substack{i\in\mathbb{N},\\ j\notin I_l}}\frac{b_i(x)}{a_j(0)}\}=\max_x\frac{\varepsilon e^{-px}}{e^{pl}}=\max_x\varepsilon e^{-px-pl}=\varepsilon;$$

$$\max_x\int_0^x\sup_{i,j\in\mathbb{N}}\frac{b_i(x)}{a_j(y)}dy\le\max_x\int_0^x\varepsilon e^{-px}dy\le\max_x\left\{\varepsilon e^{-px}x\right\}\le\varepsilon l;$$

$$\max_x\int_0^x\sup_{i,j\in\mathbb{N}}\frac{b_i(x)}{b_j(y)}dy=\max_x\int_0^x\frac{\varepsilon e^{-px}}{\varepsilon e^{-py}}dy=$$

$$=\max_x\int_0^x e^{p(y-x)}dy=\max_x\frac{1-e^{-px}}{p}\le\frac{1}{p}.$$

У підсумку одержимо нерівність

$$\rho(A[w^1],A[w^2])\le\Bigg(He^{-pl}+\frac{A}{c}\max_x\left\{\max\left\{\sup_{i,j,y}\frac{a_i(x)}{a_j(y)},\sup_{i,j,y}\frac{a_i(x)}{b_j(y)}\right\}\right\}+$$

$$+S\varepsilon+B\left(\varepsilon l+\frac{1}{p}\right)\Bigg)\rho(w^1,w^2).$$

Фіксуємо значення параметра ε достатньо малим, а параметр p достатньо великим, щоб задовольнити умову

$$He^{-pl}+S\varepsilon+B\left(\varepsilon l+\frac{1}{p}\right)<\frac{1}{2},$$

тоді функції a_i, b_i є визначеними, а

$$\max_x\left\{\max\left\{\sup_{i,j,y}\frac{a_i(x)}{a_j(y)},\sup_{i,j,y}\frac{a_i(x)}{b_j(y)}\right\}\right\}$$

менший за деяку сталу M. Насамкінець фіксуємо значення параметру c достатньо великим, щоб задовольнити умови (11) та нерівність

$$\frac{AM}{c} < \frac{1}{2}.$$

Тоді оператор $\mathcal{A}$ є стискуючим на елементах простору $\mathfrak{C}^2$ з вибраними функціями a_i, b_i та параметром c.

Таким чином, на основі теореми Банаха про стискуюче відображення існує єдина нерухома точка оператора $\mathcal{A}$ в просторі $\mathfrak{C}^2$. Ця нерухома точка є узагальненим розв'язком задачі (1)-(3).

Список використаної літератури

1. Рождественский Б.Л. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике / Б.Л. Рождественский, Н.Н. Яненко. – М. : Наука, 1978. – 592 с.
2. Кирилич В.М. Обобщенная непрерывная разрешимость задачи с неизвестными границами для сингулярных гиперболических систем квазилинейных уравнений / В.М. Кирилич, А.М. Филимонов // Матем. студії. – 2008. – Т. 30. – № 1. – С. 42–60.
3. Алексеев В.С. Гиперболическая регуляризация системы Соболева./ В.С. Алексеев // Математические труды - 2002. - Т. 5, №1, С. 3–17.
4. Мауленов О. О разрешимости смешанной задачи для вырожденной полулинейной гиперболической системы на отрезке / О. Мауленов, А.Д. Мышкис // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. – 1981. – №5. – С. 25–29.
5. Berzhanov A.B. Solution of a countable system of quasilinear partial differential equations multiperiodic in a part of variables/ A.B. Berzhanov, E.K. Kurmangaliev// Укр. мат. журн.– 2009.– Т.61.– N2.– С. 280–288.
6. Оселедец В.И. Глобальная устойчивость бесконечных систем нелинейных дифференциальных уравнений и неоднородные счетные цепи Маркова/ В.И. Оселедец, Д.В. Хмелёв// Проблемы передачи информации.– 2000.– Т.36.– Вып.1.– С. 60–76.
7. Камбулов В.Ф. Об одном модельном гиперболическом уравнении, возникающем в радиофизике/ В.Ф. Камбулов, А.Ю. Колесов// Матем. моделирование.– 1996.– Т.8.– N1.– С. 93–102.
8. Самойленко А. М. Счетные системы дифференциальных уравнений / А.М. Самойленко, Ю.В. Теплинський.– К.: Ин-т математики, 1993. – 308 с.

Одержано 26.11.2015